

# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

## a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 14/3/17

1. Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato. Verificare che per ogni  $x, y \in X$  si ha  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .
2. Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $x \in X$  e  $\delta > 0$ . Dimostrare che le palle

$$B_\delta(x) := \{y \in X : d(x, y) < \delta\}, \quad \bar{B}_\delta(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq \delta\}$$

sono, rispettivamente, aperta e chiusa (nella topologia indotta da  $d$ ).

3. Siano  $X$  un insieme e  $B_\alpha, \alpha \in I$ , una collezione di suoi sottoinsiemi ( $I$  insieme arbitrario di indici). Dimostrare la *dualità di De Morgan*:

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha^c.$$

4. Sia  $X$  uno spazio topologico. Dimostrare che
  - (a)  $\emptyset, X$  sono chiusi;
  - (b) se  $C_\alpha, \alpha \in I$ , sono chiusi, allora  $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$  è chiuso;
  - (c) se  $C_1, \dots, C_n$  sono chiusi, allora  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  è chiuso.