

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 1/6/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

*1. In unità generiche le relazioni di Weyl diventano

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i\hbar}{2}\sigma(z_1, z_2)}W(z_1 + z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Data allora una rappresentazione regolare π dell'algebra di Weyl, e considerata la quantizzazione di Wigner-Weyl della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\pi(W(f)) = \int_{\mathbb{R}^2} d\alpha d\beta \hat{f}(\alpha, \beta) \pi(W(\alpha + i\beta)),$$

si mostri:

(a) $\pi(W(f))\pi(W(g)) = \pi(W(f \times_{\hbar} g))$ dove

$$(f \times_{\hbar} g)(z) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\zeta \hat{f}(\zeta) \hat{g}(z - \zeta) e^{-\frac{i\hbar}{2}\sigma(z, \zeta)};$$

(b) per $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto) si ha

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left\| [\pi(W(f)), \pi(W(g))] - i\hbar \pi(W(\{f, g\})) \right\| = 0,$$

dove $\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g$ è la parentesi di Poisson di f, g .