Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 18/5/16

1. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità e ω uno stato di $\mathscr{A}$. Si verifichi
   (a) $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;
   (b) $\omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\omega(b^*b)$ per ogni $a, b \in \mathscr{A}$.
2. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità, e $\pi_\alpha : \mathscr{A} \to B(H_\alpha)$, $\alpha \in I$, rappresentazioni tali che $\pi_\alpha(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{H_\alpha}$ per ogni $\alpha \in I$. Mostrare:
   (a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, l'operatore $\oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a) : \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha \to \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha$ definito da
   $$\oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a)(x_\alpha)_{\alpha\in I} := (\pi_\alpha(a)x_\alpha)_{\alpha\in I}, \qquad (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha,$$
   è limitato;
   (b) $a \in \mathscr{A} \mapsto \oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a) \in B(\oplus_{\alpha\in I}H_\alpha)$ è una rappresentazione di $\mathscr{A}$ (detta la *rappresentazione somma diretta* delle π_α).