Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 13/4/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ spazi di Hilbert. Sullo spazio vettoriale somma diretta

$$H \oplus K := \{(x,y) \,:\, x \in H, y \in K\},$$

i cui elementi saranno denotati con $x \oplus y := (x,y)$, si definisca

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle := \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_K, \qquad x_i \oplus y_i \in H \oplus K.$$

Verificare che $(H \oplus K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno spazio di Hilbert, detto *somma diretta (hilbertiana)* di H e K.

*2. Siano $(H_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha)$, $\alpha \in I$, spazi di Hilbert, e si definisca

$$\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha := \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \,:\, x_\alpha \in H_\alpha \,\forall\alpha \in I, \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty\Big\}.$$

Verificare:

(a) $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite da

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} + (y_\alpha)_{\alpha\in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha\in I}, \qquad \lambda(x_\alpha)_{\alpha\in I} := (\lambda x_\alpha)_{\alpha\in I};$$

(b) $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da

$$\big\langle (x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I}\big\rangle := \sum_{\alpha\in I} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle_\alpha.$$

Tale spazio è detto la *somma diretta* della famiglia $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$.

3. Siano X, Y spazi prehilbertiani, e $j : X \to Y$ un'applicazione che preserva i prodotti scalari. Mostrare che j è lineare (sugg.: calcolare $\|j(x+y) - j(x) - j(y)\|^2$, $\|j(\alpha x) - \alpha j(x)\|^2$).

4. Mostrare che $\ell^2(I)$ è il completamento dello spazio prehilbertiano

$$c_c(I) := \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \,:\, x_\alpha \in \mathbb{C},\, x_\alpha \neq 0 \text{ solo per un insieme finito di } \alpha \in I\}$$

con il prodotto scalare $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in I} \bar{x}_\alpha y_\alpha$.

5. Siano X uno spazio normato, $S \subset X$ un sottoinsieme, e $\langle S\rangle$ il sottospazio da esso generato. Mostrare che $\overline{\langle S\rangle}$ è un sottospazio chiuso di X.