

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 5/4/16

In tutti gli esercizi che seguono, (X, \mathfrak{M}, μ) denota un generico spazio di misura.

1. Siano $E, F \in \mathfrak{M}$ e $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Verificare:
 - (a) se $f \leq g$ allora $\int_X f \leq \int_X g$;
 - (b) se $E \subset F$ allora $\int_E f \leq \int_F f$;
 - (c) se $c \geq 0$ è una costante, allora $\int_X cf = c \int_X f$;
 - (d) se $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$ allora $\int_X f = 0$;
 - (e) se $\mu(E) = 0$ allora $\int_E f = 0$.
2. Sia $s : X \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione semplice. Mostrare che ponendo $\lambda(E) := \int_E s d\mu$, $E \in \mathfrak{M}$, λ è una misura su \mathfrak{M} .
3. Siano $f, g : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ misurabili tali che $f \leq g$ q.o. Verificare che $\int_X f \leq \int_X g$.
4. Sia $f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ tale che $\int_X |f| < +\infty$. Verificare che f è finita quasi ovunque.