Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 22/3/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia X uno spazio topologico. La famiglia di sottoinsiemi di X

$$\mathscr{B}(X) := \bigcap \{\mathfrak{M} \,:\, \mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)\, \sigma\text{-algebra t.c. } A \in \mathfrak{M}\ \forall A \subset X \text{ aperto}\}$$

   è la più piccola σ-algebra su X che contiene tutti gli insiemi aperti.

2. Indicato con $Q_r(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset \mathbb{R}^n$ l'n-cubo aperto di semilato $r > 0$ e centro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si mostri che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto vale

$$A = \bigcup \{Q_{1/k}(x) \,:\, x \in \mathbb{Q}^n \cap A,\, Q_{1/k}(x) \subset A\}.$$

3. Dato $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ e $n \in \mathbb{N}$, si mostri che esistono un insieme chiuso $F_n \subset A$ e un insieme aperto $G_n \supset A$ tali che $\mu(G_n \setminus A) < 1/n$, $\mu(A \setminus F_n) < 1/n$.

4. Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione dei razionali in $(0,1)$ e, dato $\varepsilon > 0$, si considerino gli insiemi

$$A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \cap (0,1)$$

   e $K = [0,1] \setminus A$. Dimostrare:

   (a) A, K sono Lebesgue-misurabili e $m(A) \leq \varepsilon$, $m(K) \geq 1 - \varepsilon$;

   (b) A è denso in $(0,1)$ e K ha interno vuoto;

   *(c) K non è misurabile secondo Peano-Jordan (sugg.: si ha $m_e(K) \geq 1 - \varepsilon$: se così non fosse, si potrebbe trovare un plurintervallo aperto $E \subset \mathbb{R}$ tale che $K \subset E$ e $m(E) < 1 - \varepsilon$, ma allora $[0,1] \setminus E \subset A$...)