Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 1/3/16

1. Sia $(X, \| \cdot \|)$ normato. Verificare che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$.

2. Mostrare che su $X = \mathbb{C}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

3. Sia $X = C^1([a, b])$ e si ponga $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in X$. Verificare:
   (a) $\| \cdot \|_{(1)}$ è una norma su X;
   (b) $\| \cdot \|_{(1)}$ è strettamente più forte di $\| \cdot \|_\infty$, cioè esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{(1)}$, ma non il viceversa. (Sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) = n^{-1} \sin(nt)$.)

4. Siano $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ spazi normati, e si consideri $X \times Y$ con la struttura di spazio vettoriale *somma diretta*:

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) := (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in X, y_i \in Y.$$

   Verificare che ponendo

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, \quad \|(x, y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad \|(x, y)\|_2 := \big(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\big)^{1/2},$$

   si ottengono norme su $X \times Y$ che sono equivalenti.