

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica 1 – II esonero – 19 gennaio 2026

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [10 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \log(x + ax^4) - \log x - \arctan(x \cos x)}{\left(\sqrt{1 - 2x} - \frac{1}{1+x}\right) \sin(bx)}.$$

$[(a, b) = (1, 2), (-2, 1), (1, 3), (-3, 1)]$

Svolgimento: Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Il numeratore $n(x)$ è un infinitesimo di ordine 3. Infatti per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$x + \log(x + ax^4) - \log(x) = x + \log(1 + ax^3) = x + ax^3 + o(x^3)$$

mentre

$$\begin{aligned} \arctan(x \cos(x)) &= \arctan(x(1 - x^2/2 + o(x^2))) = \arctan(x - x^3/2 + o(x^3)) \\ &= x - x^3/2 + o(x^3) - \frac{1}{3}(x - x^3/2 + o(x^3))^3 + o(x - x^3/2 + o(x^3))^3 \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Quindi

$$n(x) = x + ax^3 + o(x^3) - x + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{(6a + 5)x^3}{6} + o(x^3).$$

Per quanto riguarda il denominatore $d(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} d(x) &= \left((1 - 2x)^{1/2} - \frac{1}{1+x} \right) \sin(bx) \\ &= \frac{bx}{1+x} ((1+x)(1-2x)^{1/2} - 1)(1 + o(1)) \\ &= \frac{bx}{1+x} ((1+x)(1-x - (-2x)^2/8 + o(x^2)) - 1)(1 + o(1)) \\ &= \frac{bx}{1+o(1)} (-x^2 - x^2/2 + o(x^2)) = -\frac{3b}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{\frac{(6a+5)x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{3b}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{6a+5}{9b}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{6a+5}{9b}.$$

Esercizio 2. [15 punti] Studiare l'integrabilità in senso improprio dell'integrale

$$I_\beta = \int_0^\infty \frac{(2\sqrt{x} + a + 1) \log x}{x^\beta (x + (a + 1)\sqrt{x} + a)^2} dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\beta = \frac{1}{2}$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Si tratta di un integrale definito in senso improprio in quanto l'integrale è definito su un intervallo non limitato. Inoltre la funzione integranda, pur essendo ben definita in $(0, +\infty)$, non è limitata in un intorno destro di 0. Per lo studio dell'integrabilità possiamo usare il criterio del confronto asintotico in quanto la funzione è definitivamente di segno costante sia in 0 sia a $+\infty$.

• **Integrabilità.** Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_\beta = \frac{(a + 1) \log(x)(1 + o(1))}{a^2 x^\beta} = \frac{(a + 1)}{a^2} \frac{\log(x)}{x^\beta} (1 + o(1))$$

che risulta integrabile se e solo se $\beta < 1$. Per $x \rightarrow +\infty$

$$f_\beta = \frac{(2\sqrt{x} \log(x)(1 + o(1)))}{x^{\beta+2}(1 + o(1))} = \frac{2 \log(x)}{x^{\beta+2-1/2}} (1 + o(1))$$

che risulta integrabile $\beta + 2 - 1/2 > 1 \iff \beta > -1/2$. In conclusione la funzione è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ se e solo se $\beta \in (-1/2, 1)$.

• **Calcolo per $\beta = 1/2$.** Sostituendo $y = \sqrt{x}$ si ha, $x = y^2$ e $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\int_0^\infty \frac{(2y + (a + 1))4 \log(y)}{(y^2 + (a + 1)y + a)^2} dy$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{(2y + (a + 1))4 \log(y)}{(y^2 + (a + 1)y + a)^2} dy &= -\frac{4 \log(y)}{(y^2 + (a + 1)y + a)} + \int \frac{4}{(y^2 + (a + 1)y + a)y} dy \\ &= -\frac{4 \log(y)}{(y^2 + (a + 1)y + a)} + \int \frac{4}{(y + a)(y + 1)y} dy \end{aligned}$$

Applicando la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{4}{(y + a)(y + 1)y} = \frac{A}{y + a} + \frac{B}{y + 1} + \frac{C}{y}$$

si ha

$$A = \frac{4}{(a - 1)a}, \quad B = \frac{4}{-(a - 1)}, \quad C = \frac{4}{a}$$

Quindi

$$\int \frac{4}{(y + a)(y + 1)y} dy = \frac{4}{(a - 1)a} \log(y + a) - \frac{4}{(a - 1)} \log(y + 1) + \frac{4}{a} \log(y).$$

ossia

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{(y + a)(y + 1)y} dy &= \frac{4}{a(a - 1)} (\log(y + a) - a \log(y + 1) + (a - 1) \log(y)) + C \\ &= \frac{4}{a(a - 1)} \log \left(\frac{(y + a)y^{a-1}}{(y + 1)^a} \right) + C \end{aligned}$$

Una primitiva nella variabile y è la funzione

$$F(y) = -\frac{4 \log(y)}{(y^2 + (a + 1)y + a)} + \frac{4}{a(a - 1)} \log \left(\frac{(y + a)y^{a-1}}{(y + 1)^a} \right)$$

Per il calcolo dell'integrale

$$I_{1/2} = \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) - \lim_{y \rightarrow 0} F(y)$$

Per $y \rightarrow \infty$ si ha

$$F(y) = o(1) + \frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{y^a(1+o(1))}{y^a(1+o(1))} \right) \rightarrow 0$$

Per $y \rightarrow 0^+$ riscrivendo $F(y)$ nel seguente modo

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{4 \log(y)}{(y^2 + (a+1)y + a)} + \frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{(y+a)}{(y+1)^a} \right) + \frac{4}{a(a-1)} \log(y^{a-1}) \\ &= 4 \log(y) \left(-\frac{1}{(y^2 + (a+1)y + a)} + \frac{1}{a} \right) + \frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{(y+a)}{(y+1)^a} \right) \\ &= 4 \log(y) \left(\frac{y^2 + (a+1)y}{a(y^2 + (a+1)y)} \right) + \frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{(y+a)}{(y+1)^a} \right) \\ &= 4 \log(y) y \left(\frac{y + (a+1)}{a(y^2 + (a+1)y)} \right) + \frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{(y+a)}{(y+1)^a} \right) \end{aligned}$$

da cui segue che il primo termine tende a 0 per il confronto potenze logaritmo mentre il secondo termine

$$\frac{4}{a(a-1)} \log \left(\frac{(y+a)}{(y+1)^a} \right) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(a)}{a(a-1)}$$

In conclusione

$$I_{1/2} = -\frac{4 \log(a)}{a(a-1)}$$

Esercizio 3. [7 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$ e **rappresentare le soluzioni sul piano complesso**:

$$|z| = \bar{z} + \sqrt{3} \operatorname{Im}(\bar{z}) + i \operatorname{Im}(z).$$

$$[|z| = i\bar{z} + \sqrt{3}\operatorname{Re}(\bar{z}) - i\operatorname{Re}(z), \quad |z| = z + \sqrt{3}\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Im}(\bar{z}), \quad |z| = iz + \sqrt{3}\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Re}(\bar{z})]$$

Svolgimento: Posto $z = x + iy$ si ha:

$$\begin{aligned} |z| = \bar{z} + \sqrt{3}\operatorname{Im}(\bar{z}) + i \operatorname{Im}(z) &\iff \sqrt{x^2 + y^2} = x - iy - \sqrt{3}y + iy \\ &\iff \sqrt{x^2 + y^2} = x - \sqrt{3}y \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy \\ x \geq \sqrt{3}y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y^2 - \sqrt{3}xy = 0 \\ x \geq \sqrt{3}y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \geq \sqrt{3}y \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x \geq \sqrt{3}y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono rappresentate dall'unione delle due semirette:

