Tesi di Dottorato

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dottorato di Ricerca in Matematica - V ciclo -

Un Approccio Geometrico alla Congettura di Novikov sul luogo Jacobiano, sue Generalizzazioni ed un Criterio per le Jacobiane Iperellittiche.

Tesi di Dottorato

di

Giambattista Marini

R I N G R A Z I A M E N T I

Questo lavoro è stato seguito dal Prof. Enrico Arbarello. Lo ringrazio vivamente per la pazienza e l'attenzione dimostratemi nell'ascoltarmi, per avermi seguito durante questi anni ed avermi insegnato gran parte della matematica che conosco.

Desidero inoltre ringraziare il Prof. Riccardo Salvati Manni ed il Prof. Corrado De Concini per le discussioni avute e le utili osservazioni.

Ringrazio il Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" che mi ha ospitato ed offerto la Borsa di Studio di Dottorato.

Ringrazio il Prof. H. Clemens ed il Dipartimento di Matematica della University of Utah che mi hanno ospitato durante il mio terzo anno di dottorato, l'A.A. 1992/'93.

Desidero infine ringraziare i miei insegnanti, in particolare, tra coloro che non ho già menzionato esplicitamente, il Prof. Edoardo Sernesi, il Prof. János Kollár ed il Prof. Ciro Ciliberto.

ai miei genitori

I N D I C E

P R E S E N T A Z I O N E

Ad una curva algebrica complessa liscia e proiettiva (semplicemente curva) $\mathcal{C}$ *viene associata la varietà abeliana* $J(\mathcal{C})$ *definita come lo spazio delle 1-forme modulo il primo gruppo di omologia, equivalentemente, come il gruppo di Picard* $Pic^0(\mathcal{C})$*. L'opposto della forma di intersezione su* $\mathcal{C}$ *definisce in modo naturale la classe di Chern di un fibrato, che indichiamo con* Θ *, sulla varietà abeliana* $J(\mathcal{C})$ *. Tale classe è una polarizzazione principale.*

La coppia $(J(\mathcal{C}), \Theta)$ *è per definizione la Jacobiana della curva* $\mathcal{C}$*.*

Il teorema di Torelli assicura che $\mathcal{C}$ *è determinata dalla sua Jacobiana. Pertanto lo studio di una curva* $\mathcal{C}$ *equivale allo studio della sua Jacobiana. Questo teorema è anche di natura globale: si ha che l'applicazione Jacobiana (di Torelli) è una immersione dello spazio dei moduli delle curve di genere g* $\mathcal{M}_g$ *nello spazio dei moduli delle varietà abeliane principalmente polarizzate* $\mathcal{A}_g$ *.*

Il problema di Schottky è quello di caratterizzare il luogo Jacobiano nello spazio dei moduli delle varietà abeliane principalmente polarizzate. L'approccio di Novikov ne fornisce una risposta soddisfacente. Egli congetturò che una varietà abeliana principalmente polarizzata e indecomponibile (v.a.p.p.i.) è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se la funzione theta di Riemann che rappresenta la polarizzazione soddisfa l'equazione differenziale non-lineare di Kadomtsev-Petviashvilli $K.P.\theta = 0$ *. Il fatto che la funzione theta di una Jacobiana è soluzione dell'equazione K.P. (per opportuni parametri) è il germe di una proprietà geometrica che caratterizza le Jacobiane, e cioè che la varietà di Kummer di una Jacobiana è trisecata da una famiglia di rette. Infatti, da una analisi locale e da considerazioni infinitesimali su tale famiglia segue che la funzione theta è la soluzione di una gerarchia di equazioni differenziali non-lineari di cui* $K.P.\theta = 0$ *è la prima equazione non banale. La congettura di Novikov è stata provata da Shiota in [S] utilizzando tecniche di teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali.*

In questa tesi presento del teorema di Shiota una dimostrazione che utilizza tecniche classiche della teoria delle varietà abeliane. Il mio approccio al problema è quello algebro-geometrico di Arbarello e De Concini ([AD3] è un chiaro survey). Il punto chiave del loro argomento è che la gerarchia K.P., indipendentemente dai parametri da cui dipende, operando sulla sezione della polarizzazione produce una successione di sezioni del fascio $\mathcal{O}(2\Theta)$ *, e che alla luce del criterio di Welters è sufficiente trovare dei parametri in modo tale che la successione in questione è identicamente la successione nulla. Questo è stato fatto in [A] e [AD3] assumendo due ipotesi aggiuntive sulla geometria del divisore theta: che questi sia liscio in codimensione 1 e che il divisore* $D_1\Theta$ *non sia* D_1*-invariante, dove* D_1 *è un campo vettoriale invariante* *per traslazioni che compare nell'espressione dell'operatore K.P. e* $D_1\Theta$ *è il divisore nel sistema lineare* $|\mathcal{O}_\Theta(\Theta)|$, *che corrisponde a* D_1 . *In questa tesi rimuovo queste ipotesi aggiuntive mostrando che il supporto delle componenti che potrebbero costituire una ostruzione alla ricostruzione della gerarchia K.P. è* $< D_1, D_2 >$*-invariante, e quindi che, a meno di concludere la dimostrazione, la varietà abeliana* (X,Θ) *è isogena ad un prodotto. Studiando l'ipotesi K.P. sulle varie fibre della proiezione del prodotto su uno dei due fattori riesco a concludere la dimostrazione.*

La mia analisi, oltre a permettermi di produrre una dimostrazione relativamente semplice, e soprattutto geometrica, del teorema di Shiota, mi ha spinto ad interpretare l'ipotesi K.P. da un punto di vista algebrico e mi ha portato ad enunciare e dimostrare il risultato che segue (si noti che nell'enunciato non compare alcuna equazione differenziale e che esso è di natura puramente algebro-geometrica).

"Una v.a.p.p. (X,Θ) *è la Jacobiana di una curva iperellittica se e solo se il fascio* $\mathcal{O}_\Theta(\Theta)$ *ammette una sezione le cui componenti sono non-ridotte e se, inoltre, il luogo singolare di* Θ *non ha codimensione 2 in* X *(quest'ultima ipotesi è di natura tecnica e probabilmente può essere sostituita con quella della indecomponibilità; in effetti Arbarello ed altri hanno congetturato l'equivalenza delle due ipotesi)."*

Ho studiato l'ipotesi K.P. anche nel caso di polarizzazioni non principali. Più in generale ho cercato di capire la geometria dell'azione di un operatore di tipo K.P. (e.g. uno di quelli che compaiono nella gerarchia) sulle sezioni del fascio $\mathcal{O}_X(\Theta)$ *e di interpretare l'operatore stesso in maniera algebro-geometrica. Questo studio mi ha portato a dimostrare il risultato che segue.*

"Se $(X,\mathcal{L})$ *è una varietà abeliana polarizzata, una sezione di* $\mathcal{O}_X(\mathcal{L})$ *soddisfa l'equazione K.P. ed inoltre* $dim.H^0(X,\mathcal{L}) \leq 5$*, allora esiste una sottovarietà abeliana di* $(X,\mathcal{L})$ *isogena ad una Jacobiana (naturalmente è valida anche l'affermazione inversa)."*

- 1 -

I N T R O D U Z I O N E

§1 Fibrati lineari su Varietà Abeliane

Sia X una varietà abeliana di dimensione n . Sia V il rivestimento universale di X , questi è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n . Si ha

$$X = V/\Lambda , \qquad \Lambda = H_1(X,\mathbb{Z}) .$$

Il reticolo Λ è un sottogruppo discreto di rango massimo di V. Indichiamo con $Pic(X)$ e con $NS(X)$ rispettivamente il gruppo di Picard e di Neron-Severi della varietà abeliana X. C'è una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Pic^0(X) & \longrightarrow & Pic(X) & \longrightarrow & NS(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \rho & \longmapsto & \mathcal{L}(0,\rho) & & & & \\ & & & & \mathcal{L}(H,\rho) & \longmapsto & H & & \end{array}$$

dove H è una forma hermitiana su V la cui parte immaginaria E assume valori interi sul reticolo Λ , ρ è un semicarattere compatibile con H i.e. è un operatore unitario definito su Λ che soddisfa la relazione $\rho(u)\cdot\rho(v) = (-1)^{E(u,v)}\cdot\rho(u+v)$ ed $\mathcal{L}(H,\rho)$ è il fibrato lineare definito nel seguente modo.

Definizione 1.1. *$\mathcal{L} = \mathcal{L}(H,\rho)$ è il fibrato corrispondente al fattore di automorfia*

$$\{f_u(z) = \rho(u)\cdot e^{\pi\cdot H(z,u) + \frac{\pi}{2}\cdot H(u,u)}\}_{u\in\Lambda \quad z\in V} ,$$

i.e. $\mathcal{L}$ è il fibrato su X che si ottiene nel modo seguente come quoziente del fibrato banale su V :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \cong & V\times\mathbb{C}/_{(z,\xi)\equiv(z+u,f_u(z)\cdot\xi)} \quad u\in\Lambda,\ z\in V,\ \xi\in\mathbb{C} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

Si noti che $E|_{\Lambda\times\Lambda}$ è una forma antisimmetrica intera, i.e. è un elemento di $Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$. Si ha che $E|_{\Lambda\times\Lambda}$ determina univocamente H, infatti $E|_{\Lambda\times\Lambda}$ determina

E nonché $H(z,w) = E(z,iw) + i \cdot E(z,w)$. Inoltre E soddisfa la relazione $E(iv,iw) = E(v,w)$, $\forall v,w \in V$. Questa condizione, insieme al fatto che E deve assumere valori interi sul reticolo, determina l'immagine dell'operatore " 1^a classe di Chern" (tramite l'isomorfismo naturale $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$)

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & : & H^1(X,\mathcal{O}^*) & \longrightarrow & NS(X) & \hookrightarrow & H^2(X,\mathbb{Z}) & \cong & Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z}) \ , \\ & & \mathcal{L} & \longmapsto & & & & & E|_{\Lambda\times\Lambda} \end{array}$$

i.e. ci sono degli isomorfismi naturali

$$\begin{aligned} c_1(H^1(X,\mathcal{O}^*)) & \cong \ \{ \ H \mid \ H \ \text{ è Hermitiana} \ , \ E(\Lambda,\Lambda) \ \subseteq \ \mathbb{Z} \ \} \\ & \cong \ \{E \in Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z}) \subset Alt^2(V,\mathbb{R}) \mid E(iv,iw) = E(v,w) \ , \ \forall v,w \in V\} \ . \end{aligned}$$

Per i fibrati su una varietà abeliana X si ha che le nozioni di equivalenza algebrica, equivalenza numerica, equivalenza differenziale (i.e. C^∞), coincidono tra loro. La classe di un fibrato è invariante per traslazioni. Inoltre, se $\mathcal{L}$ è un fibrato ampio, si ha che sua classe di Neron-Severi (equivalentemente, la sua classe algebrica) lo determina univocamente a meno di traslazioni.

Lemma 1.2. *Un fibrato $\mathcal{L}$ è ampio se e solo se la sua classe di Chern H è definita positiva.*

Osservazione 1.3. Le sezioni del fibrato $\mathcal{L}$ corrispondono in modo naturale alle forme automorfe associate al fattore d'automorfia $\{f_u(z)\}_{u\in\Lambda,\ z\in V}$ i.e. alle funzioni θ definite su V che soddisfano la relazione

$$\theta(z+u) \ = \ f_u(z)\cdot\theta(z) \qquad u\in\Lambda,\ z\in V \ .$$

Tali funzioni si definiscono "funzioni theta del fibrato $\mathcal{L}$".

Lemma 1.4. *Sia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H,\rho)$ un fibrato lineare ampio (i.e. H è definita positiva), sia $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$. È possibile trovare un isomorfismo*

$$(X,\ \mathcal{L}) \qquad \cong \qquad \left(\frac{\mathbb{C}^n}{\Lambda} \ , \ \ \mathcal{L}(H,\rho) \right)$$

tale che $\Lambda = <(I,T)>_{\mathbb{Z}} = <\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_{2n}>$ i.e. Λ è il reticolo generato dai vettori $\{\lambda_i\}_1^{2n}$ le cui coordinate in $\mathbb{C}^n$ sono costituite dalle colonne della matrice (I,T) , la restrizione al reticolo della parte immaginaria della forma hermitiana H (che è una forma alternante) è la forma su $<(I,T)>_{\mathbb{Z}}$ associata alla matrice $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dove Δ è la matrice diagonale $(d_1,\ ....,\ d_n)$, d_i divide d_{i+1} , $\forall i = 1,...,n-1$, ΔT è una matrice simmetrica con parte immaginaria definita positiva (i.e. soddisfa le relazioni Riemann).

L'insieme di tali isomorfismi è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle basi simplettiche del reticolo Λ i.e. delle basi di Λ tali che la matrice associata alla forma E è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Osservazione 1.5. La matrice associata alla forma H è ΔB^{-1} , dove B è la parte immaginaria di T , cioè $H(z,w) = z\Delta B^{-1}\bar{w}$, $\forall\ z,\ w \in \mathbb{C}$. Notiamo inoltre che ΔB^{-1} è una matrice simmetrica.

Osservazione 1.6. Si ha $h^0(X,\mathcal{L}) = (det(E))^{\frac{1}{2}}$. Inoltre, modulo l'identificazione naturale tra le forme automorfe associate al fattore di automorfia $\{f_u(z)\ \}_{u\in\Lambda}$ ed $H^0(X,\mathcal{L})$, si ha che una base di $H^0(X,\mathcal{L})$ è data dalle funzioni theta

$$\theta_\sigma(z) = e^{\frac{\pi}{2}z\Delta B^{-1}z} \cdot \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}(p+\sigma)\Delta T(p+\sigma)\ +\ (p+\sigma)\Delta z\}} \quad , \qquad \sigma \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \ ,$$

dove, per semplicità, abbiamo assunto che il moltiplicatore ρ è $\rho(u) = e^{\pi i\cdot m\Delta\tilde{m}}$ (dove $u = m + T\tilde{m}$, $m,\ \tilde{m} \in \mathbb{Z}^n$), cioè abbiamo traslato opportunamente $\mathcal{L}$. Si noti che $e^{\pi i\cdot m\Delta\tilde{m}}$ è un semicarattere compatibile con H , peraltro assicura la simmetria di $\mathcal{L}$. Si noti inoltre che $\rho = e^{\pi i\cdot m\Delta\tilde{m}}$ dipende, in ultima analisi, dalla base simplettica scelta per il reticolo Λ .

Definizione 1.7. *Una polarizzazione su X è la classe di Chern di un fibrato lineare ampio $\mathcal{L}$. Se $h^0(X,\mathcal{L}) = 1$ la polarizzazione viene detta principale.*

Si ha $h^0(X,\mathcal{L}) = (det(E))^{1/2}$, in particolare dipende solo da $c_1(\mathcal{L})$. Peraltro, si noti che se $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}'$ rappresentano la stessa polarizzazione, allora coincidono a meno di una traslazione. Considerando l'immagine inversa di $\mathcal{L}'$ tramite questa traslazione si ottiene l'isomorfismo $H^0(X,\mathcal{L}) \cong H^0(X,\mathcal{L}')$. Per comodità, spesso, per dare una polarizzazione, si considera un fibrato $\mathcal{L}$ (e lo si sceglie simmetrico), sottointendendo il fatto che $\mathcal{L}$ è definito a meno di traslazioni.

Definizione 1.8. *Sia $(X,\mathcal{L})$ una v.a.p.p., $\mathcal{L}$ simmetrico. La varietà di Kummer $K(X)$ è la varietà proiettiva definita come l'immagine del morfismo di Kummer*

$$\begin{aligned} K\ :\ X &\longrightarrow \mathbb{P}\ H^0(X,\mathcal{L}^2)^* \cong \mathbb{P}^{2^n-1} \\ x &\longmapsto [\ \vartheta \mapsto \vartheta(x)\ ] \end{aligned}$$

Si noti che $\mathcal{L}^2$ non dipende affatto dal fibrato simmetrico $\mathcal{L}$ scelto per rappresentare la polarizzazione, in particolare K è data in modo naturale.

Lemma 1.9. *Il morfismo K è regolare, finito sulla sua immagine, si ha $K(X) \cong X/(\pm 1)$ ed inoltre $K(X)$ è una varietà liscia ovunque eccetto che nelle immagini dei punti di ordine due di X .*

§2 Jacobiane

La Jacobiana di una curva algebrica è l'esempio più importante, ed in un certo senso il prototipo di quasi tutti gli esempi, di varietà abeliane che occorrono in natura. A rendere interessante il loro studio c'è, tra altri motivi, il fatto che una curva è univocamente determinata dalla conoscenza della Jacobiana ad essa associata, peraltro la ricerca sulle Jacobiane è stata uno degli incentivi all'introduzione ed allo sviluppo della teoria delle varietà abeliane. Noi siamo interessati al problema di Schottky, cioè al problema di caratterizzare il luogo delle Jacobiane di curve algebriche nello spazio dei moduli di varietà abeliane principalmente polarizzate. È per questa ragione che dedichiamo questo paragrafo allo studio di quelle proprietà delle Jacobiane che hanno il pregio di caratterizzarle.

Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica liscia complessa completa di genere g , indichiamo con $K_{\mathcal{C}}$ il divisore canonico di $\mathcal{C}$.

Definizione 1.10. *Poniamo*

$$J(\mathcal{C}) \quad = \quad \frac{H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}})^*}{H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})} \ , \qquad E \ = \ \text{"} - \textit{ forma di intersezione"} \ .$$

La forma E è la classe di Chern di un sistema lineare ampio contenente un unico divisore che indichiamo con Θ (quindi Θ definisce una polarizzazione principale su $J(\mathcal{C})$). Per definizione, la varietà Jacobiana di $\mathcal{C}$ è la varietà abeliana principalmente polarizzata $(J(\mathcal{C}),\ \Theta)$.

L'applicazione che al ciclo γ associa il funzionale $\omega \ \mapsto \ \int_\gamma \omega$ fornisce l'immersione $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}})^*$. Si ha che $\Lambda := H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$ è un sottogruppo discreto di rango massimo di $H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}})^*$. Inoltre, chiaramente, $E \in Alt^2(\Lambda, \mathbb{Z})$. Come conseguenza delle relazioni di Riemann sulla matrice dei periodi di una curva algebrica si ha che $E \in NS(J(\mathcal{C}))$, nonché definisce una polarizzazione principale. Pertanto Θ è un divisore che è univocamente determinato a meno di traslazioni e, per comodità, viene scelto simmetrico.

Sia $\mathcal{D}iv^0(\mathcal{C})$ il gruppo dei divisori di grado 0 su $\mathcal{C}$. Indichiamo con δ l'applicazione di bordo $C_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \to \mathcal{D}iv^0(\mathcal{C})$.

Teorema 1.11. (Abel) *Le fibre dell'applicazione di Abel-Jacobi*

$$\begin{array}{rcl} u \ : \ \mathcal{D}iv^0(\mathcal{C}) & \longrightarrow & J(\mathcal{C}) \\ D & \longmapsto & \left(\omega \mapsto \displaystyle\int_{\delta^{-1}(D)} \omega \right) \end{array}$$

sono le classi di equivalenza lineare.

Teorema 1.12. (di inversione di Jacobi) *L'applicazione u è suriettiva, e pertanto si ha un isomorfismo naturale*

$$u \ : \ Pic^0(\mathcal{C}) \quad \cong \quad J(\mathcal{C}) \ .$$

Inoltre le fibre delle applicazioni (di Abel Jacobi)

$$\begin{array}{rccc} u^r : & \mathcal{C}^{(r)} & \longrightarrow & J(\mathcal{C}) \\ & Q = \sum_{i=1}^{r} p_i & \longmapsto & \left(\omega \mapsto \int_{\delta^{-1}(Q+Q_0)} \omega \right) \end{array} ,$$

dove Q_0 *è un elemento fissato di* $Pic^{-r}(\mathcal{C})$ *e* $\mathcal{C}^{(r)}$ *è il prodotto simmetrico di* $\mathcal{C}$, r *volte, sono i sistemi lineari completi di grado* r *su* $\mathcal{C}$.

Si noti che u^g è suriettiva nonché genericamente iniettiva, questo segue dalla versione geometrica del teorema di Riemann-Roch.

Teorema 1.13. (Riemann) *Il divisore* Θ *coincide con l'immagine di un opportuno traslato dell'immagine di* $\mathcal{C}^{(g-1)}$:

$$\Theta \quad = \quad u(\mathcal{C}^{(g-1)} - \Delta)$$

inoltre, se Θ *è simmetrico,* Δ *è una opportuna theta caratteristica i.e. è un divisore semicanonico su* $\mathcal{C}$ *(si noti che ha grado* $g-1$ *).*

Come conseguenza dell'isomorfismo $\mathcal{C}^{g-1}/_{equiv.lin.} \cong \Theta$ è possibile dare una interpretazione geometrica della molteplicità di un punto $x \in J(\mathcal{C})$ come punto di Θ. Sia x un punto di $J(\mathcal{C})$, si consideri un divisore $D \in u^{-1}(x) + \Delta$. Si ha

$$Molt_{\Theta}(x) \quad = \quad h^0(\mathcal{C}, D)$$

(è sottointeso che $Molt_{\Theta}(x) = 0$ significa che $x \notin \Theta$). In particolare è possibile calcolare la dimensione del luogo singolare di Θ. Si ha che

$$\begin{array}{rcll} dim.\Theta_{sing} & = & g-3 & (\textit{se } \mathcal{C} \textit{ è iperellittica}) \\ dim.\Theta_{sing} & = & g-4 & (\textit{se } \mathcal{C} \textit{ non è iperellittica}) \end{array}$$

Proposizione 1.14. *Sia* $W_d^r = \{| \ L \ | : deg \ L = d, \ dim| \ L \ | \ \geq r\}$, $W_d = W_d^0$. *Per ogni* $p, \ q \ \in \mathcal{C}$, $p \neq q$, *si ha*

$$W_{g-1} \cap (W_{g-1} + p - q) \quad = \quad (W_g^1 - q) \cup (W_{g-2} + p) \quad .$$

Questa uguaglianza ha delle importanti implicazioni sulla geometria del divisore Theta di una Jacobiana. Infatti, utilizzando il teorema di Riemann, si traduce nelle seguenti proposizioni 1.15, 1.16. Indichiamo con Γ l'immagine di $\mathcal{C}$ tramite l'applicazione di Abel-Jacobi.

Proposizione 1.15. *Per ogni* $\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta \ \in \ \Gamma$, $\beta \neq \gamma$, *si ha che*

$$\Theta_{\beta} \ \cap \ \Theta_{\gamma} \quad \subset \quad \Theta_{\alpha} \ \cup \Theta_{\beta+\gamma-\delta}$$

Questa inclusione è equivalente alla formula trisecante di Fay.

Formula 1.16. (trisecante di Fay) *Per ogni* $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ *si ha che esiste* $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 - 0$ *tale che*

$$c_1 \cdot \theta(z-\alpha)\theta(z-\beta-\gamma+\delta) + c_2 \cdot \theta(z-\beta)\theta(z-\alpha-\gamma+\delta) + c_3 \cdot \theta(z-\gamma)\theta(z-\alpha-\beta+\delta) = 0 .$$

Questa formula si traduce nell'esistenza di rette che trisecano la varietà di Kummer. Infatti, come conseguenza dell'identità di Riemann si ha che

$$c_1 \cdot \sum [\theta_n(z+\xi) \cdot \theta_n(\xi+\alpha)] + c_2 \cdot \sum [\theta_n(z+\xi) \cdot \theta_n(\xi+\beta)] + c_3 \cdot \sum [\theta_n(z+\xi) \cdot \theta_n(\xi+\gamma)] = 0 ,$$

$\forall\, \xi \in \frac{1}{2}(\delta - \alpha - \beta - \gamma)$, dove $\{\theta_n\}$ è una base di $H^0(X, 2\Theta)$ tale che $\theta(z+a) \cdot \theta(z-a) = \sum \theta_n(z) \cdot \theta_n(a)$. Pertanto vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.17. *Per ogni* $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, $\xi \in \frac{1}{2}(\Gamma - \alpha - \beta - \gamma)$, *i punti*

$$K(\xi + \alpha) \quad , \qquad K(\xi + \beta) \quad , \qquad K(\xi + \gamma)$$

sono allineati.

Fissiamo un punto $p_0 \in \mathcal{C}$, sia ϵ una coordinata locale di $\frac{1}{2}\Gamma$ intorno ad $a \in \frac{1}{2}u(p_0)$ e sia

$$\eta(\epsilon) = \sum_{i \geq 1} \epsilon^i \cdot D_i$$

l'espressione parametrica intorno all'origine di $\eta := \frac{1}{2}\Gamma - a$ dove $D_i \in V \cong T_0(X)$. Quindi, modulo questa identificazione naturale, i D_i sono campi vettoriali invarianti su X (su V). Si noti che la curva η non dipende né dalla scelta di a (ovviamente dipende da p_0) , né dalle scelte fatte per definire l'applicazione di Abel-Jacobi. Si osservi inoltre che $\frac{1}{2}\Gamma$ è l'unione delle 2^{2g} curve irriducibili $\{\eta_{a+x}\}_{x \in \frac{0}{2}}$.

La proposizione precedente ci dice che i punti

$$K(x + \xi + 2\eta(\epsilon_1)) \quad , \qquad K(x + \xi + 2\eta(\epsilon_2)) \quad , \qquad K(x + \xi + 2\eta(\epsilon_3)) \quad ,$$

sono allineati (dove $\xi = \eta(\epsilon) - \eta(\epsilon_1) - \eta(\epsilon_2) - \eta(\epsilon_3)$) , $\forall\, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3,\, \epsilon \in \mathbb{C}$, $\forall\, x \in \frac{0}{2}$.

Considerando la situazione limite in cui gli ϵ_i convergono a 0 (poniamo $x = 0$) si trova una famiglia di tangenti di flesso la varietà di Kummer $K(J(\mathcal{C}))$, parametrizzata da $\eta(\epsilon)$.

Il fatto che la varietà di Kummer $K(J(\mathcal{C}))$ è tagliata da una famiglia di rette, che risultano essere tangenti di flesso, parametrizzata da $\eta(\epsilon)$, i.e. che

$$K(\eta(\epsilon)) \;\wedge\; D_1 K(\eta(\epsilon)) \;\wedge\; (D_2 + D_1^2) K(\eta(\epsilon)) \quad \equiv \quad 0 ,$$

si traduce analiticamente nel fatto che la funzione theta è soluzione di una successione di equazioni differenziali non-lineari, la gerarchia K.P.. Quanto affermato è contenuto nella proposizione che segue, dimostrata in [AD1] (cfr. anche [AD3]).

Proposizione 1.18. *Sia* $\mathcal{C}$ *una curva algebrica liscia completa,* $(J(\mathcal{C}),\Theta)$ *la sua Jacobiana,* p_0 *un punto di* $\mathcal{C}$, Γ *l'immagine di* $\mathcal{C}$ *tramite l'applicazione di Abel Jacobi* $p \mapsto p - p_0 \in Pic^0(\mathcal{C}) \cong J(\mathcal{C})$, η *il germe della curva* $\frac{1}{2}\Gamma$ *intorno all'origine. Esiste una espressione parametrica* $\sum \epsilon^i D_i$ *di* η *ed esistono delle costanti* $d_4, \ldots$ *tali che*

$$P_s \ := \ \left(\Delta_s\Delta_1 \ - \ \Delta_{s-1}(D_2 + D_1^2) \ + \ \sum_{i=3}^{s} d_{i+1}\Delta_{s-i}\right)\theta(z+\xi)\cdot\theta(z-\xi)\,|_{\xi=0} \ = \ 0\ ,$$

$\forall\ s \geq 3$, *dove*

$$\Delta_j \ = \sum_{i_1+2i_2+\ldots si_s=j} \frac{1}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots i_j!}\cdot D_1^{i_1}\cdot\ldots D_s^{i_j}\quad ,$$

gli operatori differenziali che compaiono nell'espressine di P_s *agiscono sulla variabile* ξ .

Osservazione 1.19. Sia (X,Θ) una varietà abeliana polarizzata e θ una sezione della polarizzazione. Le espressioni $P_s(\theta)$ definite precedentemente sono sezioni della polarizzazione 2Θ . Come abbiamo già osservato, queste sezioni sono la sezione 0 quando (X,Θ) è una Jacobiana con la sua polarizzazione principale ed i D_i e d_i sono campi e costanti "giusti". La prima di queste espressioni differenziali, i.e. $P_3\theta$, è la forma bilineare di Hirota della espressione di Kadomtsev-Petviashvili:

$$\begin{aligned} K.P.\theta \ := \ P_3(D_1,D_2,D_3;d_4)\theta \ &= \\ &-\frac{2}{3}D_1^4\theta\cdot\theta + \frac{8}{3}D_1^3\theta\cdot D_1\theta - 2D_1^2\theta\cdot D_1^2\theta + \\ &2D_2\theta\cdot D_2\theta - 2D_2^2\theta\cdot\theta \ + \ 2D_1D_3\theta\cdot\theta - 2D_3\theta\cdot D_1\theta \ + \ d_4\theta\cdot\theta\ . \end{aligned}$$

Abbiamo visto alcune proprietà delle Jacobiane di curve algebriche, ora vediamo alcuni criteri di caratterizzazione del luogo Jacobiano. Questi criteri si basano sul teorema di Matsusaka (generalizzato da Hoyt).

Teorema 1.20. (Matsusaka-Hoyt) *Una v.a.p.p.* (X,Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esiste un 1-ciclo positivo* Γ *tale che*

$$[\Theta]^{n-1} \ = \ (n-1)!\ [\Gamma]\ ,$$

dove [ ] *rappresenta la classe di equivalenza numerica.*

Utilizzando questo teorema Gunning è riuscito a dimostrare che le Jacobiane sono caratterizzate dal fatto che la corrispondente varietà di Kummer possiede una famiglia di trisecanti.

Teorema 1.21. (Gunning) *Una v.a.p.p.i.* (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esiste una curva irriducibile* $\Gamma \subset X$ *e dei punti* $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ *tali che*

$$dim_{-\alpha-\beta} 2V \;\geq\; 1 \;,$$

dove $V = \{\xi \in X | K(\xi+\alpha) \wedge K(\xi+\beta) \wedge K(\xi+\gamma) = 0\}$. *Inoltre, in questo caso, si ha* $\mathcal{C} = 2V$.

Welters ha esteso questo risultato anche al caso in cui le trisecanti sono degeneri, più precisamente egli ha dimostrato quanto segue.

Teorema 1.22. (Welters) *Una v.a.p.p.i.* (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esistono dei campi vettoriali invarianti* $D_1 \neq 0,\ D_2$ *tali che*

$$dim_0 V \;\geq\; 1 \;,$$

dove $V = \{\xi \in X \mid K(\xi) \wedge D_1 K(\xi) \wedge (D_1^2 + D_2) K(\xi) = 0 \}$. *Inoltre, in questo caso, si ha* $\mathcal{C} = 2V$.

Una maniera equivalente di formulare il criterio di Welters è la seguente.

Teorema 1.23. (Arbarello - De Concini) *Una v.a.p.p.i.* (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esistono dei campi vettoriali invarianti* $D_1 \neq 0,\ D_2,\ ....$ *e delle costanti* $d_4 \neq 0,\ d_5, ...$ *tali che la funzione theta di Riemann soddisfa la gerarchia K.P.*

$$P_s \;:=\; \left(\Delta_s \Delta_1 \;-\; \Delta_{s-1}(D_2 + D_1^2) \;+\; \sum_{i=3}^{s} d_{i+1} \Delta_{s-i} \right) \theta(z+\xi) \cdot \theta(z-\xi) \,|_{\xi=0} \;=\; 0 \;,$$

dove gli operatori Δ_i *sono quelli che abbiamo introdotto al punto 1.18.*

I criteri menzionati hanno in comune il fatto che, per ipotesi, nella v.a.p.p.i. in esame c'è una curva che soddisfa certe proprietà. Di natura diversa sono le congetture di Welters e di Novikov (quest'ultima è stata provata da Shiota utilizzando tecniche di teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali).

Congettura 1.24. (Welters) *Una v.a.p.p.i.* (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esiste una retta che triseca la varietà di Kummer* $K(X)$.

Teorema 1.25. (Shiota) (= congettura di Novikov) *Una v.a.p.p.i.* (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esistono dei campi vettoriali invarianti* $D_1 \neq 0,\ D_2,\ D_3$ *ed una costante* d *tali che la funzione theta di Riemann soddisfa l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili*

$$P_3(D_1, D_2, D_3; d)\theta \;=\; 0 \;.$$

Nei capitoli 2 e 3 presentiamo una dimostrazione algebro-geometrica di questo teorema.

- 2 -

V A R I E T Á A B E L I A N E I S O G E N E A D U N P R O D O T T O

In questo capitolo studiamo alcuni aspetti riguardanti la geometria delle varietà abeliane isogene ad un prodotto e proviamo un lemma chiave, il lemma 2.6, per la nostra dimostrazione del teorema di Shiota.

Sia (X,Θ) una v.a.p.p.i. e sia $\mathcal{S}$ una sottovarietà non banale di X. Indichiamo con V il rivestimento universale di X, con π il morfismo di rivestimento e con Λ la preimmagine del punto 0 tramite π. Ricordiamo che $\mathcal{O}(\Theta)$ è il fibrato corrispondente al fattore di automorfia

$$\{f_u(z) \;=\; \rho(u)\cdot e^{\pi\cdot H(z,u)\;+\;\frac{\pi}{2}\cdot H(u,u)}\}_{u\in\Lambda}\ .$$

La restrizione $\mathcal{O}_X(\Theta)|_{\mathcal{S}}$ è una polarizzazione su $\mathcal{S}$. Il teorema di decomposizione ci dice che $\mathcal{S}$ ha un complementare, lo indichiamo con $\mathcal{B}$. Indichiamo con $V_{\mathcal{S}}$ il sottospazio di V che riveste $\mathcal{S}$ e poniamo $\pi_{\mathcal{S}} := \pi|_{V_{\mathcal{S}}}$. Analogamente indichiamo con $V_{\mathcal{B}}$ il sottospazio di V che riveste $\mathcal{B}$ e poniamo $\pi_{\mathcal{B}} := \pi|_{V_{\mathcal{B}}}$.

Osservazione 2.1. C'è una identificazione naturale di V con lo spazio tangente $T_0(X)$, di $V_{\mathcal{S}}$ con $T_0(\mathcal{S})$, di $V_{\mathcal{B}}$ con $T_0(\mathcal{B})$, inoltre, posto $\Lambda_{\mathcal{S}} = \Lambda\cap V_{\mathcal{S}}$, $\Lambda_{\mathcal{B}} = \Lambda\cap V_{\mathcal{B}}$, si ha

$$\mathcal{S} \;=\; V_{\mathcal{S}}/\Lambda_{\mathcal{S}}\ , \qquad\qquad \mathcal{B} \;=\; V_{\mathcal{B}}/\Lambda_{\mathcal{B}}\ ,$$

$$\Lambda_{\mathcal{S}}+\Lambda_{\mathcal{S}} \;\subset\; \Lambda\ ,$$

l'isomorfismo naturale $V_{\mathcal{S}}\times V_{\mathcal{B}}\cong V$ induce l'isogenia data dall'applicazione somma $\mathcal{S}\times\mathcal{B}\longrightarrow X$. Ricordiamo che $V_{\mathcal{B}} \;=\; \{\, v\in V \mid H(v,V_{\mathcal{S}}) \;=\; 0\,\}$.

Lemma: 2.2. *Si abbiano (X,Θ), $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{S}$ come sopra. L'applicazione*

$$\begin{array}{rcl}\phi\ :\ V_{\mathcal{B}} & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S},\Theta|_{\mathcal{S}})\\ b & \longmapsto & \theta_b|_{\mathcal{S}}\end{array}$$

è ben definita. Nonché risulta

$$t_b^*\Theta|_{\mathcal{S}} \;\cong\; \Theta|_{\mathcal{S}}\ , \qquad \forall\ b\ \in\ \mathcal{B}\ .$$

Naturalmente valgono anche le affermazioni analoghe in cui i ruoli di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{B}$ sono scambiati tra loro.

Dim.: Per mostrare che ϕ è ben definita bisogna verificare che $\theta_b(z+a) = f_a(z)\cdot\theta_b(z)$ per ogni $a\in\Lambda_{\mathcal{S}}$. In quanto $\theta(z) \in H^0(X,\Theta)$ ed $a \in \Lambda_{\mathcal{S}} \subset \Lambda$ si ha che $\theta(z+b+a) = f_a(z+b)\cdot\theta(z+b)$, quindi è sufficiente osservare che risulta $\frac{f_a(z+b)}{f_a(z)} = e^{\pi\cdot H(b,a)} = 1$ (infatti, come abbiamo visto, $H(V_{\mathcal{S}},V_{\mathcal{B}}) = 0$). Notiamo che dalla precedente uguaglianza segue anche che $t_b^*\Theta|_{\mathcal{S}} \cong \Theta|_{\mathcal{S}}$, $\forall\, b \in \mathcal{B}$.

q.e.d.

Osserviamo che l'applicazione ϕ induce l'applicazione razionale

$$\begin{aligned} \psi\ :\ \mathcal{B} &\dashrightarrow \mathbb{P}H^0(\mathcal{S},\Theta|_{\mathcal{S}}) \quad , \\ b &\longmapsto [\theta_b|_{\mathcal{S}}]\ . \end{aligned}$$

Anch'essa è ben definita. Infatti, se $\beta \in \Lambda_{\mathcal{B}}$ si ha che $f_\beta(z+b)|_{\mathcal{S}} = \rho(\beta)\cdot e^{\pi\cdot H(z+b,\beta)\ +\ \frac{\pi}{2}H(\beta,\beta)} = \rho(\beta)\cdot e^{\frac{\pi}{2}H(2b+\beta,\beta)}$. Poiché quest'ultimo termine non dipende da z abbiamo che $\theta_{\beta+b}(z)|_{\mathcal{S}} = f_\beta(z+b)\cdot\theta_b(z)\,|_{\mathcal{S}} \in \mathbb{C}^*\cdot\theta_b(z)|_{\mathcal{S}}$, $\forall\,\beta \in \Lambda_{\mathcal{B}}$. Questo mostra che ψ è ben definita (come applicazione razionale).

Lemma 2.3. *Si abbiano (X,Θ), $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{S}$ come sopra. Per ogni $E_1,...,E_l \in T_0(\mathcal{S})$ si ha che*

$$E_1...E_l\theta|_{\mathcal{B}} \quad\in\quad H^0(B,\Theta|_{\mathcal{B}})$$

Naturalmente, anche in questo caso, i ruoli di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{B}$ possono essere scambiati.

Dim.: Questa affermazione può essere dedotta dal lemma precedente ed il fatto che una derivata è limite di un rapporto incrementale, comunque preferiamo scrivere una dimostrazione diretta. Dobbiamo solamente mostrare che

$$E_1...E_l\theta(z+u) = E_1...E_l[f_u(z)\cdot\theta(z)] = f_u(z)\cdot E_1...E_l\theta(z)\ , \qquad \forall\, u \in \Lambda_{\mathcal{B}}\ .$$

Questo segue immediatamente dal fatto che $Ef_u(z) = E\rho(u)\cdot e^{\pi H(z,u)+\frac{1}{2}H(u,u)} = 0$, per ogni $u \in \Lambda_{\mathcal{S}}$, $E \in T_0(\mathcal{B})$, infatti $H(E,u) = 0$.

q.e.d.

Osservazione 2.4. In quanto Θ è una polarizzazione principale ed $\mathcal{S}$ è il complementare di $\mathcal{B}$, abbiamo che $\mathcal{B}\cap\mathcal{S}$ è il gruppo theta associato a $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\Theta|_{\mathcal{B}})$ (si veda [BL], cor. 1.4, pag. 368), quindi $\{\ \alpha(t_b^*(\theta_{|_{\mathcal{B}}}))\ |\ \alpha : t_b^*(\theta_{|_{\mathcal{B}}} \xrightarrow{\cong} \theta_{|_{\mathcal{B}}}\ ,\ b\in\mathcal{B}\cap\mathcal{S}\ \}$ genera $H^0(\mathcal{B},\Theta|_{\mathcal{B}})$. È quindi chiaro che anche $\phi(V_{\mathcal{B}})$, dove ϕ è il morfismo introdotto nel lemma 2.2, nonché l'immagine di un qualsiasi aperto analitico $W \subset \phi(V_{\mathcal{B}})$, genera $H^0(\mathcal{B},\Theta|_{\mathcal{B}})$. Ne segue che l'insieme $\{E_1...E_l\theta|_{\mathcal{B}}\}_{E_1,...,E_l\ \in\ T_0(\mathcal{S})}$ genera $H^0(\mathcal{B},\Theta|_{\mathcal{B}})$.

Lemma 2.5. *Sia $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ una varietà abeliana polarizzata. Sia $D = \{\delta = 0\}$ dove $\delta \in H^0(\mathcal{S},\mathcal{L})$, $\delta\neq 0$. L'applicazione*

$$\begin{aligned} \Upsilon\ :\ T_0(\mathcal{S})\ \times\ H^0(\mathcal{S},\mathcal{L}) &\longrightarrow H^0(D,\mathcal{L}_{|_D}) \\ E \qquad\qquad \eta \qquad &\longmapsto E\delta\ +\ \eta \end{aligned}$$

è suriettiva, il suo nucleo è $0 \times \mathbb{C} \cdot \delta$.

Dim.: Il fibrato $\mathcal{L}$ è ampio. Dalla successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\cdot \delta} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{|_D} \longrightarrow 0$$

ricaviamo la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^0(\mathcal{S},\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(D,\mathcal{L}_{|_D}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S},\mathcal{O}_{\mathcal{S}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S},D) = 0 .$$

Poiché $dim\, H^1(\mathcal{S},\mathcal{O}_{\mathcal{S}}) = dim\, \mathcal{S}$ abbiamo che $dim\, H^0(D,\mathcal{L}_{|_D}) = dim\, \mathcal{S} + d - 1$ e pertanto, essendo $H^1(\mathcal{S},\mathcal{O}_{\mathcal{S}}) = T_0(\mathcal{S})$, dobbiamo mostrare che l'applicazione $T \mapsto T\delta$ è una spaccamento della successione esatta

$$0 \longrightarrow \frac{H^0(\mathcal{S},\mathcal{L})}{\mathbb{C}\cdot\delta} \longrightarrow H^0(D,\mathcal{L}_{|_D}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S},\mathcal{O}_{\mathcal{S}}) \longrightarrow 0 .$$

A tal fine è sufficiente far vedere che non esistono elementi $E \neq 0,\ \eta$ tali che $(E\delta+\eta)|_D = 0$. Ragioniamo per assurdo. Per ogni $\omega \in H^0(\mathcal{S},\mathcal{L})$ consideriamo

$$y = (E\delta + \eta)\cdot\omega - \delta\cdot E\omega .$$

Questa espressione è una sezione del fascio $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^{\otimes^2})$, infatti, si verifica immediatamente che risulta $y(z+u) = f_u(z)^2 \cdot y(z)$, per ogni $u \in \Lambda_{\mathcal{S}}$. D'altro canto y svanisce su D . Quindi, usando la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\cdot\delta} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^2) \longrightarrow \mathcal{O}_D({\mathcal{L}^2}_{|_D}) \longrightarrow 0$$

è chiaro che esiste una sezione (unica) $I(\omega) \in H^0(\mathcal{S},\mathcal{L})$ tale che

$$y + \delta\cdot I(\omega) = (E\delta + \eta)\cdot\omega - \delta\cdot E\omega + \delta\cdot I(\omega) = 0 .$$

La precedente proprietà caratterizza $I(\omega)$, ne segue immediatamente che l'applicazione

$$\begin{aligned} I \ : \ H^0(\mathcal{S},\mathcal{L}) &\longrightarrow H^0(\mathcal{S},\mathcal{L}) \\ \omega &\longmapsto I(\omega) \end{aligned}$$

è lineare. Ora mostriamo che $[E\omega - I(\omega)]|_\Omega = 0$, dove $\Omega = \{\omega = 0\}$. Se $\omega = 0$ non c'è niente da provare, sia $\omega \neq 0$. Sia p un punto generico di una componente del divisore Ω e sia h un elemento irriducibile dell'anello locale $\mathcal{O}_{\mathcal{S},p}$, tale che $\omega = h^m$ dove m è un intero positivo. Poiché $[E\delta+\eta]\cdot\omega = \delta\cdot[E\omega - I(\omega)]$ si ha $E\delta+\eta = 0$ se e solo se $E\omega - I(\omega) = 0$, in questo caso, ovviamente, $[E\omega - I(\omega)]|_\Omega = 0$. Esistono degli interi $a,\ b,\ c \geq 0$ e degli elementi irriducibili $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ nell'anello locale $\mathcal{O}_{\mathcal{S},p}$ tali che $\alpha\cdot h^a = [E\delta+\eta]$, $\beta\cdot h^b = \delta$, $\gamma\cdot h^c = [E\omega - I(\omega)]$. Poiché $[E\delta+\eta]\cdot\omega = \delta\cdot[E\omega - I(\omega)]$ abbiamo $a+m = b+c$. D'altro canto, poiché $[E\delta+\eta]$ svanisce su $D = \{\delta = 0\}$, abbiamo $a \geq b$, quindi $c \geq m$. Ne segue che $[E\omega - I(\omega)]|_\Omega = 0$ per ogni ω . Se $I = 0$ allora $E\omega|_\Omega = 0$ per ogni ω , se $I \neq 0$ abbiamo che I fissa una retta passante per l'origine. In ogni caso c'è una sezione non-nulla $\omega \in H^0(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ tale che $E\omega|_\Omega = 0$. Ora mostriamo che questo non può accadere. Sia Ω_i una componente di Ω , poiché $E\omega|_{\Omega_i} = 0$, Ω_i deve essere E-invariante. Infatti, se h^m è una equazione locale di Ω_i in un suo punto generico, $Eh^m|_{\Omega_i} = 0$ implica che h divide $E(h)$. Quindi Ω è E-invariante. La varietà abeliana $\mathcal{S}$ si surietta sulla sottovarietà abeliana generata da E (che è non banale in quanto contenuta in Ω) ed il divisore Ω è una immagine inversa tramite questa suriezione. La restrizione di Ω a tale sottovarietà abeliana di $\mathcal{S}$ è zero, questo è assurdo perché Ω è ampio.

q.e.d.

Lemma 2.6. *Sia (X, Θ) una varietà abeliana principalmente polarizzata indecomponibile, θ un generatore dello spazio vettoriale $H^0(X, \Theta)$, $\mathcal{B}$ una sottovarietà abeliana propria non-banale di X ed $\mathcal{S}$ la varietà abeliana complementare. Sia σ l'isogenia $\sigma : \mathcal{B} \times \mathcal{S} \longrightarrow X$. Sia A un aperto di $\mathcal{B}$ invariante rispetto all'azione del gruppo $\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$, supponiamo che $\theta|_{\mathcal{S}+b} \neq 0$ per ogni $b \in A$. Sia $\tilde{\sigma}$ la restrizione $\tilde{\sigma} = \sigma|_{A \times \mathcal{S}}$, consideriamo le proiezioni*

$$\begin{array}{ccc} & A \times \mathcal{S} & \\ {}^{q}\swarrow & & \searrow^{\tilde{\sigma}} \\ A & & X \end{array}$$

Si ha che l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \Upsilon \ : \ T_0(\mathcal{S}) \ \times & \left(\dfrac{q_* \tilde{\sigma}^* \Theta}{< \tilde{\sigma}^* \theta >} \right) & \longrightarrow & q_* \left(\tilde{\sigma}^* \Theta|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta} \right) \\ (\ E \qquad , & \chi\ ) & \longmapsto & (E\theta + \eta)|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta} \end{array}$$

è un isomorfismo naturale di fibrati vettoriali su A , dove (E, χ) è una sezione locale di $T_0(\mathcal{S}) \times \left(\frac{q_* \tilde{\sigma}^* \Theta}{< \tilde{\sigma}^* \theta >} \right)$, ed η è un qualsiasi sollevamento locale di χ ad una sezione (locale) di $q_* \tilde{\sigma}^* \Theta$.

Osservazione 2.7. L'applicazione σ (nonchè l'applicazione $\tilde{\sigma}$) è un morfismo liscio ètale di grado $\#\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$, inoltre $b \times \mathcal{S}$ va isomorficamente in $\mathcal{S}_b := \mathcal{S} + b$ per ogni b (per ogni $b \in A$). È chiaro che $\tilde{\sigma}^* \Theta$ è un fibrato lineare su $A \times \mathcal{S}$, quindi $q_* \tilde{\sigma}^* \Theta$ è un fibrato vettoriale su A . Poiché per ipotesi $\theta|_{\mathcal{S}+b} \neq 0$ per ogni $b \in A$ abbiamo che $\tilde{\sigma}^* \theta$ è una sezione ovunque non-nulla del fibrato $q_* \tilde{\sigma}^* \Theta$, quindi $\frac{q_* \tilde{\sigma}^* \Theta}{< \tilde{\sigma}^* \theta >}$ è un fibrato su A ben definito. Il fascio $q_* \left(\tilde{\sigma}^* \Theta|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta} \right)$ è localmente libero, i.e. è un fibrato vettoriale. Questa affermazione è una conseguenza immediata della osservazione 2.8.

Ora mostriamo che Υ è una applicazione ben definita (come morfismo di fasci). Sia E una sezione locale definita su un aperto U del fibrato vettoriale $T_0(\mathcal{S})$ (visto come fibrato vettoriale banale su A). Abbiamo che $E\theta \in H^0 \left(U, q_* \tilde{\sigma}^* \Theta|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta} \right) \right)$.

Infatti, l'inclusione $\sigma^* \ : \ H^0(X,\Theta) \ \hookrightarrow \ H^0(\mathcal{B}\times\mathcal{S}),\sigma^*\Theta)$ è, in termini di forme automorfe, l'identità $\theta \ = \sigma^*\theta$ (sono entrambe funzioni su V , che è il rivestimento universale sia di X che di $\mathcal{B}\times\mathcal{S}$). Sia $E \ = \ \sum\alpha_i(b)\cdot E_i$ dove gli E_i sono costanti. Si ha che $E_i\theta \ \in \ H^0(\Theta,\Theta) \ \subset \ H^0(\sigma^{-1}\Theta,\sigma^*\Theta|_{\sigma^{-1}\Theta})$ pertanto è chiaro che $E\theta \ = \ \sum\alpha_i(b)\cdot E_i\theta \ \in \ H^0\left(U, q_*(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta})\right)$.

Osservazione 2.8. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}} \stackrel{\cdot\tilde\sigma^{-1}\theta}{\longrightarrow} \tilde\sigma^*\Theta \longrightarrow \tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta} \longrightarrow 0\ .$$

Applicando il funtore q_* otteniamo la successione esatta di fasci

$$\text{(2.8.1)} \quad 0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}} \stackrel{\cdot\tilde\sigma^{-1}\theta}{\longrightarrow} \pi_*\tilde\sigma^*\Theta \longrightarrow \pi_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right) \longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}} \longrightarrow 0$$

dove l'ultimo termine è zero perché $R^1\pi_*\tilde\sigma^*\Theta \ = \ 0$, infatti è il fascio associato al prefascio le cui sezioni sopra un aperto U sono gli elementi dello spazio vettoriale $H^1(U\times\mathcal{S},\tilde\sigma^*\Theta|_{U\times\mathcal{S}})$, questo spazio è zero per l'ampiezza del fascio $\Theta|_{U\times\mathcal{S}}$. Inoltre $R^1\pi_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}} \ \cong \ T_0(\mathcal{S})$ (è un isomorfismo di fibrati vettoriali su A), infatti tale isomorfismo si ottiene globalizzando su A l'isomorfismo naturale $H^1(\mathcal{S},\mathcal{O}) \ \cong \ T_0(\mathcal{S})$. Il fascio $q_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right)$ appare come l'estensione di fasci associata alla successione esatta (ottenuta dalla 2.8.1)

$$\text{(2.8.2)} \qquad 0 \longrightarrow \frac{\pi_*\tilde\sigma^*\Theta}{<\tilde\sigma^*\theta>} \longrightarrow q_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right) \longrightarrow R^1q_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}} \longrightarrow 0\ ;$$

poiché $\frac{\pi_*\tilde\sigma^*\Theta}{<\tilde\sigma^*\theta>}$, $R^1q_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}}$ sono fibrati vettoriali, abbiamo che $q_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right)$ è anch'esso un fibrato vettoriale.

Osserviamo che il lemma 2.6 è equivalente al fatto che il morfismo di fibrati vettoriali su A , $T_0(\mathcal{S}) \to q_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right),\ E \mapsto E\theta_{|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}}$, è uno spaccamento della successione 2.8.2.

Dim.: (del lemma 2.6) Abbiamo visto che i fasci che appaiono nel lemma sono fibrati vettoriali, pertanto è sufficiente mostrare che Υ è un isomorfismo sulle fibre. A tal fine è sufficiente applicare il lemma 2.5.

q.e.d.

Sottolineiamo che lo stesso risultato può essere ottenuto sviscerando la geometria dell'applicazione $q_*\left(\tilde\sigma^*\Theta|_{\tilde\sigma^{-1}\Theta}\right) \ \to \ R^1q_*\mathcal{O}_{A\times\mathcal{S}}$ e provando che $E \mapsto E\theta$ è uno spaccamento della successione 2.8.2.

- 3 -

UNA DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI SHIOTA (= CONGETTURA DI NOVIKOV)

In questo capitolo presentiamo una dimostrazione algebro-geometrica del seguente teorema di Shiota (= congettura di Novikov).

Teorema 3.1. *Sia (X,Θ) una varietà abeliana principalmente polarizzata indecomponibile di dimensione n. Supponiamo che una forma automorfa θ relativa alla polarizzazione principale Θ soddisfi l'equazione differenziale K.P.*

$$\begin{aligned} P_3(D_1,D_2,D_3;d)\theta \;=\; & -\frac{2}{3}D_1^4\theta\cdot\theta+\frac{8}{3}D_1^3\theta\cdot D_1\theta-2D_1^2\theta\cdot D_1^2\theta-2D_2^2\theta\cdot\theta+ \\ & +2D_2\theta\cdot D_2\theta+2D_1D_3\theta\cdot\theta-2D_3\theta\cdot D_1\theta+d\theta\cdot\theta \;=\; 0\ . \end{aligned}$$

Si ha che (X,Θ) è la Jacobiana di una curva algebrica.

Alla luce del teorema 1.23 si ha che se riusciamo a trovare dei campi vettoriali $D_4,\ D_5,\ D_6$ .... e delle costanti $d_5,\ d_6,\ d_7$ ..... tali che la funzione theta soddisfa la gerarchia K.P. i.e. se per ogni intero $s\ \geq\ 3$ risulta

$$P_s(\theta)\quad\stackrel{\rm def}{=}\quad\left[\Delta_sD_1-\Delta_{s-1}(D_2+D_1^2)+\sum_{i=3}^{s}d_{i+1}\Delta_{s-i}\right]\ \theta(z+\zeta)\cdot\theta(z-\zeta)|_{\zeta=0}\ =0\ ,$$

dove per definizione

$$\Delta_s\ =\sum_{i_1+2i_2+...si_s=s}\frac{1}{i_1!\cdot i_2!\cdot...i_s!}\cdot D_1^{i_1}\cdot...D_s^{i_s}\quad ,$$

si ha che (X,Θ) è la Jacobiana della curva $\mathcal{C}$ che localmente in 0 è definita dall'espressione

$$\frac{1}{2}\Gamma\ =\ \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^i\cdot w_i\ ,$$

dove Γ è la curva immagine in X ed i w_i sono le coordinate dei D_i .

Per ipotesi sappiamo che

$$\exists\ D_1\neq 0,\ D_2,\ D_3\ \in\ T_0(X),\ d_4\in\mathbb{C}\ ,\quad \text{tali che}\quad P_3(...)\theta\ =\ 0\ ,$$

troveremo induttivamente dei campi $D_4, ...$ e delle costanti $d_5, ...$ tali che risulti $P_m(...)\theta = 0$, per ogni m .

Ricordiamo che $D_1\Theta$ è il sottoschema di Θ dove si annulla la sezione $D_1\theta \in H^0(\Theta, \Theta|_\Theta)$. Cominciamo con due osservazioni.

Osservazione 3.2. (si veda [AD3]) $P_m(D_1, ..., D_m; d_4, ...d_{m+1})\theta = P_m(D_1, ..., D_{m-1}, 0; d_4, ..., d_m, 0)\theta + 2D_mD_1\theta\cdot\theta - 2D_m\theta\cdot D_1\theta + d_{m+1}\theta\cdot\theta$, in particolare la restrizione di $P_m\theta$ a $D_1\Theta$ non dipende da D_m e d_{m+1} .

Osservazione 3.3. (si veda [AD3]) Se s è una sezione del fascio $\mathcal{O}_X(2\Theta)$ che svanisce sullo schema $D\Theta$ allora esistono un campo vettoriale E ed una costante d tali che $s = E\theta \cdot D\theta - ED\theta \cdot \theta + d \cdot \theta^2$.

Infatti, essendo $s|_{D\Theta} = 0$, per la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \xrightarrow{\cdot D\theta} \mathcal{O}_\Theta(2\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{D\Theta}(2\Theta) \longrightarrow 0 ,$$

abbiamo che esiste E tale che $s - E\theta \cdot D\theta = 0$, *modulo* θ . A questo punto è sufficiente osservare che $s - E\theta \cdot D\theta + ED\theta \cdot \theta$ è una sezione del fascio $\mathcal{O}_X(2\Theta)$ ed utilizzare la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(\Theta) \xrightarrow{\cdot\theta} \mathcal{O}_X(2\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(2\Theta) \longrightarrow 0 .$$

Osservazione 3.4. Assumiamo, per induzione su m, che $P_i(D_1, ..., D_i; d_4, ..., d_{i+1})\theta = 0$, per ogni $i \leq m-1$. Al fine di trovare un D_m ed un d_{m+1} in modo tale che risulti $P_m(D_1, ..., D_m; d_4, ..., d_{m+1})\theta = 0$ è sufficiente mostrare che

$$P_m\theta|_{D_1\Theta} = 0 .$$

Infatti, come conseguenza immediata delle due osservazioni precedenti, abbiamo che possiamo trovare un D_m ed un d_{m+1} in modo tale che risulti $P_m(...)\theta = 0$ se e solo se $P_m(...)\theta$ si annula sullo schema $D_1\Theta$ per qualche (ogni) D_m , d_{m+1} .

Una conseguenza importante delle precedenti osservazioni è che il teorema di Shiota può essere enunciato nel modo che segue.

Teorema 3.5. *Una v.a.p.p.i. (X, Θ) è la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se esistono dei campi vettoriali invarianti $D_1 \neq 0$, D_2 tali che risulta*

$$P_3(D_1, D_2, 0; 0)\theta|_{D_1\Theta} = 0 .$$

Questa formulazione del teorema di Shiota ha il seguente vantaggio, la proprietà $P_3(D_1, D_2, 0; 0)\theta|_{D_1\Theta} = 0$ non dipende dalla forma automorfa scelta per rappresentare θ . Può invece accadere che $P_3(D_1, D_2, D_3; d)\theta = 0$, $P_3(D_1, D_2, D_3; d)\tilde{\theta} \neq 0$, dove θ e $\tilde{\theta}$ sono forme automorfe relative alla stessa polarizzazione. Comunque, si ha che esistono D_1, D_2, D_3, d tali che $P_3(D_1, D_2, D_3; d)\theta = 0$ se e solo se esistono $D_1, D_2, \tilde{D}_3, \tilde{d}$ tali che $P_3(D_1, D_2, \tilde{D}_3; \tilde{d})\tilde{\theta} = 0$. Per ora non ci soffermiamo su questa affermazione, ci limitiamo ad osservare che segue dall'osservazione 3.3. Torneremo su questo punto nel capitolo in cui consideriamo polarizzazioni non necessariamente principali.

Osservazione 3.6. Valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned} \left(P_s + \sum_{i=1}^{s} \Delta_i P_{s-i}\right)\theta \ &= (D_1^2\theta - D_2\theta) \cdot (-\tilde{\Delta}_{s-1}\theta) \\ &+ \ \theta \cdot \ [D_1\tilde{\Delta}_s - (D_1^2 + D_2)\tilde{\Delta}_{s-1} + \sum_{i=3}^{s} d_{i+1}\tilde{\Delta}_{s-i}]\theta \\ &+ \ D_1\theta \cdot (-\tilde{\Delta}_s + 2D_1\tilde{\Delta}_{s-1})\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(P_s + \sum_{i=1}^{s} \Delta_i^- P_{s-i}\right)\theta \ &= (D_1^2\theta + D_2\theta) \cdot (-\tilde{\Delta}_{s-1}^-\theta) \\ &+ \ \theta \cdot \ [-D_1\tilde{\Delta}_s^- - (D_1^2 - D_2)\tilde{\Delta}_{s-1}^- + \sum_{i=3}^{s} d_{i+1}\tilde{\Delta}_{s-i}^-]\theta \\ &- \ D_1\theta \cdot (-\tilde{\Delta}_s^- - 2D_1\tilde{\Delta}_{s-1}^-)\theta \ , \end{aligned}$$

dove $\Delta_i^-(D_1, ..., D_i) = \Delta_i(-D_1, ..., -D_i)$, $\tilde{\Delta}_i(D_1, ..., D_i) = \Delta_i(2D_1, ..., 2D_i)$, $\tilde{\Delta}_i^-(D_1, ..., D_i) = \Delta_i(-2D_1, ..., -2D_i)$.

Osservazione 3.7. L'espressione di $P_3\theta$ è, modulo $D_1\Theta$, $(D_1^2\theta - D_2\theta) \cdot (D_1^2\theta + D_2\theta)$. Quindi, se $\mathcal{W}$ è una componente dello schema $D_1\Theta$, si ha che $(D_1^2\theta - D_2\theta)$ oppure $(D_1^2\theta + D_2\theta)$ svanisce su $\mathcal{W}_{rid}$. Come conseguenza delle precedenti formule e dell'ipotesi induttiva si ha che

$$\begin{aligned} P_m\theta \ &= (D_1^2\theta + D_2\theta) \cdot (-\tilde{\Delta}_{s-1}^-\theta) \ , \ \ \textit{modulo} \ (\theta, D_1\theta) \\ &= (D_1^2\theta - D_2\theta) \cdot (-\tilde{\Delta}_{s-1}\theta) \ , \ \ \textit{modulo} \ (\theta, D_1\theta) \end{aligned}$$

e pertanto si ha che $P_m\theta|_{(D_1\Theta)_{rid}} = 0$. Quindi l'unica ostruzione alla soluzione del problema viene dalle eventuali componenti non ridotte di $D_1\Theta$.

Osservazione 3.8. È sempre possibile aggiungere un multiplo di D_1 a D_2 senza alterare l'espressione di P_3 , in particolare si può assumere $D_2 \neq 0$, infatti

$$P_3(D_1, D_2, D_3; d_4) \ = \ P_3(D_1, D_2 + bD_1, D_3 + 2bD_2 + b^2D_1; d_4) \ , \ \ \forall \ b \in \ \mathbb{C} \ .$$

§1 La $< D_1, D_2 >$-invarianza

In questo paragrafo dimostriamo la seguente proposizione.

Proposizione 3.9. *Sia* (X,Θ) *una v.a.p.p.i. ed assumiamo che* $P_3(...)\theta = 0$. *Sia* $\mathcal{W}$ *una componente non ridotta di* $D_1\Theta$.
- *i* - *Se il luogo singolare di* Θ *non contiene* $\mathcal{W}_{rid}$ *allora* $P_m\theta$ *svanisce su* $\mathcal{W}$ *oppure* $\mathcal{W}_{rid}$ *è* $< D_1, D_2 >$*-invariante.*
- *ii* - *Se* Θ *è singolare lungo* $\mathcal{W}_{rid}$ *allora* $\mathcal{W}_{rid}$ *è* $< D_1, D_2 >$*-invariante.*

Dim. (3.9 -i-) **:** Per provare che se $\mathcal{W}_{rid}$ non è D_1-invariante allora $P_m\theta$ svanisce su $\mathcal{W}$ è sufficiente seguire [A]. Sia p un punto generico di $\mathcal{W}_{rid}$. In quanto p è un punto liscio di Θ e $\mathcal{W}$ è non-ridotta si ha che c'è un elemento irriducibile $h \in \mathcal{O}_{X,p}$, degli elementi invertibili $c,\ d\ \in\ \mathcal{O}_{X,p}$, degli elementi $\alpha,\ \gamma,\ \delta\ \in\ \mathcal{O}_{X,p}$ e degli interi $m \geq 2$, $s,\ t$ tali che in $\mathcal{O}_{X,p}$ risulta

$$\begin{aligned} D_1\theta &= h^m + \alpha\cdot\theta , \\ D_2\theta &= c\cdot h^s + \gamma\cdot\theta , \\ D_3\theta &= d\cdot h^t + \delta\cdot\theta , \end{aligned}$$

in particolare l'ideale di $\mathcal{W}$ in p è $I_{\mathcal{W}} = (h^m,\theta)$. Se $s = 0$ si ha $P_3\theta|_{\mathcal{W}_{rid}} \neq 0$ e questo è assurdo. Quindi ci sono due possibilità:

a) $m \geq 2,\ \ s \geq 1,\ \ h \not| D_1(h)$;
b) $m \geq 2,\ \ s \geq 1,\ \ h \mid D_1(h)$.

Nel secondo caso, chiaramente, si ha che $\mathcal{W}$ è D_1-invariante. Nel primo caso, calcolando $D_1D_2\theta$ nei due modi possibili, i.e. dall'uguaglianza $D_1(c\cdot h^s+\gamma\cdot\theta) = D_2(h^m+\alpha\cdot\theta)$, si vede che $s \geq m$, inoltre, uguagliando a zero $P_3\theta$ e la sua derivata $D_1P_3\theta$ si vede che $m = 2$. Poiché

$$0 = P_{m-1}\theta|_\Theta = (D_1^2 - D_2)\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-2}\theta) + D_1\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-1} + 2D_1\tilde{\Delta}_{m-2})\theta\ |_\Theta ,$$

si ha $\tilde{\Delta}_{m-2}\theta \in (h,\theta)$. Sia $\tilde{\Delta}_{m-2}\theta \equiv ah$, *modulo*(h^2,θ) . Calcolando la precedente formula modulo (h^3,θ) si ottiene $0 = P_{m-1}\theta \equiv 2D_1(h)\cdot h\cdot(-ah) - D_1\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-1}\theta - 2D_1(ah)\ ) \equiv D_1\theta\cdot(\tilde{\Delta}_{m-1}\theta)$, *modulo* (h^3,θ) . Quindi $\tilde{\Delta}_{m-1}\theta \in (h,\theta)$ e pertanto

$$P_m\theta \equiv D_1^2\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-1}\theta) \equiv 0 , \qquad modulo\ (h^2,\theta) = I_{\mathcal{W}} .$$

Questo mostra che nel caso a) $P_m\theta$ svanisce su $\mathcal{W}$. Nel caso b) si ha che $\mathcal{W}_{rid}$ è $< D_1, D_2 >$-invariante, per dimostrare quanto affermato procediamo nel modo che segue. Ricordiamo che p è un punto generico di $\mathcal{W}_{rid}$, $h \in \mathcal{O}_{X,p}$ è irriducibile (nonché il luogo $\{h = 0\}$ incontra trasversalmente Θ in p). In quanto $h|D_1(h)$ si ha che $D_1^2\theta \in (h^m,\theta)$ e pertanto, se $s \geq m$, allora $P_m\theta|_{\mathcal{W}} = 0$. Si ha che:

$$0 = P_3 \equiv 2\cdot(c\cdot h^s)^2 + h^m\cdot(-2d\cdot h^t) , \qquad mod.(h^{2m},\theta) ,$$

quindi (essendo $s < m$) $2s = m + t$, nonché $d - c^2 \in (h^{2m-2s}, \theta)$. Posto $j = m - s$ si ha che

$$j \geq 1 ,$$
$$s = m - j \geq 1 ,$$
$$t = m - 2j \geq 0 .$$

Ora vogliamo mostrare che se $t \geq 1$ si ha che $D_2(h) \in (h, \theta)$. A tal fine è sufficiente confrontare le due espressioni

$$D_2 D_3 \theta \equiv d \cdot (m-2j) \cdot h^{m-2j-1} \cdot D_2(h) + D_2(d) \cdot h^{m-2j} + \delta \cdot c \cdot h^{m-j} , \quad (mod.\theta);$$
$$D_3 D_2 \theta \equiv c \cdot (m-j) \cdot h^{m-j-1} \cdot D_3(h) + D_c(c) \cdot h^{m-j} + \gamma \cdot d \cdot h^{m-2j} , \quad (mod.\theta).$$

Anche nel caso $t = 0$ si ha che $D_2(h) \in (h, \theta)$. In quanto d è invertibile si ha che $D_3|_p \neq 0$. Inoltre, poichè $h|D_1(h)$, $D_2(\theta) \in (h^{m-j}, \theta) \subset (h, \theta)$ abbiamo che $D_1 D_2 \theta|_p = 0$, $D_1^3 \theta|_p = 0$. Ricapitolando, sappiamo che

$$0 = \theta|_p = D_1 \theta|_p = D_2 \theta|_p = D_1^2 \theta|_p = D_1^3 \theta|_p = D_1 D_2 \theta|_p , \; D_3 \theta|_p \neq 0 .$$

Queste ipotesi sono sufficienti a garantire che

$$D_1^{\beta} D_2^{\gamma} \theta|_p = 0 , \qquad \forall \; \beta, \gamma \in \mathbb{N} .$$

Infatti, assumendo per induzione che $D_2^{\mu} \theta|_p = 0$, $\forall \mu \leq \beta - 1$ (si noti che $D_1^{\nu} D_2^{\mu} \theta|_p = 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\forall \mu \leq \beta - 1$), abbiamo che

$$0 = D_3 D_2^{\beta-2} P_3 \theta|_p = -2 \cdot D_3 \theta \cdot D_2^{\beta} \theta|_p .$$

Questo assicura che $h|D_2(h)$.

q.e.d.

Per dimostrare la proposizione 3.9 -ii- abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Kollár (si veda [Ko]) ha dimostrato il seguente teorema.

Teorema 3.10. (J. Kollár) *Sia* (X, Θ) *una varietà abeliana principalmente polarizzata. Si ha che*

$$dim\{ \, x \in \Theta \mid molt_x \Theta \geq h \, \} \quad \leq \quad n - h.$$

In particolare, se $dimZ = n - 2$, *un punto generico di* Z *può essere al più un punto doppio di* Θ *i.e.:*

(3.10.1) *se* $p \in Z_{gen}$ *allora*
$p \notin \{x \in X \; t.c. \; \theta|_p = E\theta|_p = EF\theta|_p = 0 , \; \forall \; E, F \}$.

Inoltre, se $dimZ = n - 2$,

(3.10.2) *un punto generico di* Z *può essere al più un punto nodale (semplice) per* Θ .

Lemma 3.11. *Sia* (X, Θ) *una v.a.p.p. di dimensione* n *e* Z *una componente di dimesione* $n-2$ *del luogo singolare di* Θ *. Assumiamo* $P_3(D_1,\ D_2,\ D_3;\ d)\theta = 0$ *. Sia* T *il fibrato tangente di* Z *. La terna* $T,\ D_1,\ D_2$ *non è in posizione generale i.e.:*

$$dim < D_1, D_2, T_p(Z) > \ \leq \ n-1\ , \quad \forall\ p\ \in\ Z_{liscio}\ .$$

Dim.: Poiché Θ è singolare lungo Z abbiamo che $\theta|_Z = D_1\theta|_Z = D_2\theta|_Z = D_3\theta|_Z = 0$. Quindi $P_3|_Z = (D_1^2\theta)^2|_Z$ e pertanto $D_1^2\theta|_Z = 0$. Poiché $0 = D_2P_3|_Z = \frac{8}{3}D_1D_2\theta \cdot D_1^3\theta|_Z$, $0 = D_1^2P_3|_Z = \frac{-4}{3}(D_1^3\theta)^2 + 4(D_1D_2\theta)^2\ |_Z$, abbiamo anche che $D_1D_2\theta|_Z = D_1^3\theta|_p = 0$. Se per assurdo esiste $p_0 \in Z_{liscio}$ tale che $< D_1, D_2, T_{p_0}(Z) > = T_{p_0}(X)$, ciò deve accadere in un intorno U di p_0 (in Z). Ora, sia p un punto di U. Per ogni E possiamo scrivere $E = S + \lambda D_1 + \mu D_2,\ S \in T_p(Z)$. Chiaramente $ED_1\theta|_p = (S + \lambda D_1 + \mu D_2)D_1\theta|_p$, in particolare $D_1D_3\theta|_p = 0$. Se $D_2^2\theta|_Z = 0$, abbiamo $EF\theta|_p = (S + \lambda D_1 + \mu D_2)(\tilde{S} + \tilde{\lambda}D_1 + \tilde{\mu}D_2)\theta|_p = 0$ *i.e.* $EF\theta|_Z = 0$, questo contraddice (3.10.1). Se $D_2^2\theta|_Z \neq 0$, in quanto $D_1 \notin T_p(Z)$ nonché $D_1E\theta|_Z = 0$, $\forall E \in T_0(X)$, abbiamo che il cono tangente a Θ in un punto generico p di Z è l'iperpiano $< T_p(Z), D_1 >$ contato due volte, questo contraddice (3.10.2) .

q.e.d.

Lemma 3.12. *Sia* (X, Θ) *una v.a.p.p. di dimensione* n *e* Z *una componente di dimesione* $n-2$ *del luogo singolare di* Θ *. Assumiamo* $P_3(D_1,\ D_2,\ D_3;\ d)\theta = 0$ *. Il divisore* Θ *è* D_1*-invariante nei punti di* Z *.*

Dim.: Per il lemma precedente si ha che esistono λ, μ funzioni complesse non entrambe nulle, definite su Z , tali che

$$\lambda(p)D_1 + \mu(p)D_2 \in T_p(Z) \qquad (1)$$

Se $\mu \equiv 0$ allora Z è D_1-invariante. Se Z non è D_1-invariante allora possiamo assumere che Z non è D_2-invariante e cioè che $\lambda \not\equiv 0$, infatti, per l'osservazione 3.8, possiamo aggiungere a D_2 un multiplo di D_1 (a patto di modificare opportunamente anche D_3) senza alterare la K.P.. In definitiva possiamo assumere che

né λ né μ è identicamente nulla. (2)

Ora vogliamo mostrare "di più", e cioè che $D_1^\alpha D_2^\beta\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha, \beta$. Ragioniamo per induzione su $\alpha + \beta$. Supponiamo che $D_1^\alpha D_2^\beta\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha + \beta \leq \nu_0$. Osserviamo che è sufficiente mostrare che $D_1^{\nu_0+1}\theta|_Z \equiv 0$, infatti per (1), (2) e per induzione su β si ha $D_1^{\nu_0+1-\beta}D_2^\beta\theta|_Z \equiv 0$. Distinguiamo due casi:

a) $D_3 \in < D_1, D_2, T_p(Z) >$, $\forall\ p\ \in Z$;

b) $\exists\ p \in Z$ tale che $D_3 \notin < D_1, D_2, T_p(Z) >$ e quindi $D_3 \notin < D_1, D_2, T_p(Z) >$, per p generico in Z .

Cominciamo con a). Poiché $\lambda(p)D_1 + \mu(p)D_2 \in T_p(Z)$ abbiamo che $D_1^\alpha D_2^\beta D_3^\gamma\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha + \beta + \gamma\ \leq\ \nu_0$ (questo è ovvio per induzione su γ, ricordiamo che stiamo nel caso a)) e quindi

$$0 \equiv \quad D_1^{2\nu_0-2}P_3|_Z \equiv$$

$$\left[-2\binom{2\nu_0-2}{\nu_0-1}+\frac{8}{3}\binom{2\nu_0-2}{\nu_0-2}-\frac{2}{3}\binom{2\nu_0-2}{\nu_0-3}\right]\cdot D_1^{\nu_0+1}\theta\cdot D_1^{\nu_0+1}\theta|_Z \ .$$

È facile verificare che il coefficiente tra parentesi quadre non è mai nullo, quindi $D_1^{\nu_0+1}\theta|_Z \equiv 0$.
Consideriamo il caso b). Premettiamo che $< D_1, D_2, D_3, T_p(Z) > = T_p(X)$, $\forall\, p \in Z$, e pertanto, dati $E, F \in T_p(X)$ possiamo scrivere $EF = (aD_1 + bD_2 + cD_3 + T)(a'D_1 + b'D_2 + c'D_3 + T')$, dove $T, T' \in T_p(Z)$. Poiché $\lambda(p)D_1 + \mu(p)D_2 \in T_p(Z)$ chiaramente possiamo assumere che

$$D_1D_3\theta|_Z \neq 0 \quad \text{oppure} \quad D_3^2\theta|_Z \neq 0 \qquad (3)$$

(altrimenti la premessa precedente contraddirrebbe 3.10.1). Ricordiamo che $\nu_0 \geq 3$. Dal sistema

$$0 \equiv \quad D_1^4P_3|_Z \quad \equiv \quad (-2D_1^4\theta\ D_1^4\theta \ \ -6D_1^4\theta\ D_1D_3\theta\ )|_Z$$

$$0 \equiv \quad D_1D_3P_3|_Z \quad \equiv \quad (2D_1^4\theta\ D_1D_3\theta\ )|_Z$$

si vede che $D_1^4\theta|_Z \equiv 0$, quindi che $\nu_0 \geq 4$. Se $D_1D_3\theta|_Z \not\equiv 0$, poiché $\nu_0 \geq 4$, si ha che $D_1^{\nu_0+1}P_3\theta|_Z \equiv [-2(\nu_0+1)+2]D_1^{\nu_0+1}\theta D_1D_3\theta|_Z$, quindi che $D_1^{\nu_0+1}\theta|_Z \equiv 0$. Se $D_1D_3\theta|_Z \equiv 0$ allora, analogamente al caso del lemma precedente, abbiamo che il cono tangente a Θ in un punto generico p di Z è l'iperpiano $< T_p(Z), D_1 >$ contato due volte, questo contraddice (3.10.2) .

q.e.d.

Lemma 3.13. *Sia (X, Θ) una v.a.p.p.i. di dimensione n e D un campo vettoriale invariante su X . Se il divisore Θ è D-invariante nei punti di una sottovarietà Z di dimensione $n-2$ allora Z è D-invariante.*

Dim.: Sia $\mathcal{Z}$ il D-span di Z . Per il lemma 3.12 si ha che $\mathcal{Z}$ è contenuto in Θ . Se Z non è D-invariante si ha che $\mathcal{Z}$ ha dimensione $n-1$ e pertanto è una componente di Θ . Il divisore Θ di una varietà abeliana principalmente polarizzata indecomponibile è irriducibile, supponiamo per assurdo che sia D-invariante. La varietà X si surietta sulla sottovarietà abeliana generata da D (che è non banale in quanto contenuta in Θ) ed il divisore Θ è l'immagine inversa tramite questa suriezione di un fibrato su tale sottovarietà abeliana. La restrizione di Θ a tale sottovarietà abeliana di X è zero, questo è assurdo perché Θ è ampio.

q.e.d.

Dim.: (della proposizione 3.9 -ii-) Per i lemma 3.12 e 3.13 abbiamo che Z è D_1-invariante. Osserviamo che

$$\text{se} \quad f|_Z \equiv 0 \quad \text{allora} \quad D_1^nf|_Z \equiv 0\ , \quad \forall\, n \geq 0 \qquad (1)$$

Sia p un punto generico di Z . Se $dim < D_2,\ T_p(Z) > = n-2$ abbiamo concluso, quindi ci sono due possibilità:
a) $D_3 \in < D_2,\ T_p(Z) >$, $\forall\, p \in Z$;
b) $< D_2,\ D_3, T_p(Z) > = T_p(X)$, $\forall\, p \in Z$.

Consideriamo il caso a). Supponiamo che $D_2^\alpha\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha \leq \nu_0$ (quindi da (1) segue che $D_1^n D_2^\alpha\theta|_Z = 0$, $\forall\alpha \leq \nu_0, \forall n$) e vogliamo mostrare che $D_2^{\nu_0+1}\theta|_Z \equiv 0$. Questo segue immediatamente dall'equazione

$$0 \equiv D_2^{2\nu_0}P_3|_Z \equiv \left[2\binom{2\nu_0}{\nu_0} - 2\binom{2\nu_0}{\nu_0-1}\right] D_2^{\nu_0+1}\theta \cdot D_2^{\nu_0+1}\theta \ .$$

Ora consideriamo il caso b). Sappiamo che $D_2\theta|_Z = D_3\theta|_Z = 0$, utilizzando (1) si verifica immediatamente che $0 \equiv D_2^2P_3|_Z \equiv (4-2)D_2^2\theta|_Z \cdot D_2^2\theta|_Z$, quindi $D_2^2\theta|_Z \equiv 0$. Ne segue che $0 \equiv D_3^2P_3|_Z \equiv 4D_2D_3\theta|_Z \cdot D_2D_3\theta|_Z$, pertanto $D_1D_3\theta|_Z \equiv 0$. A questo punto osserviamo che $0 \not\equiv D_3^2\theta|_Z$ (infatti, in caso contrario, il teorema 3.10.1 verrebbe contraddetto). Supponiamo che $D_2^\alpha\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha \leq \nu_0$, $D_2^\alpha D_3\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha \leq j_0$. Per mostrare (per induzione) che $D_2^\alpha\theta|_Z \equiv 0$, $\forall\ \alpha$, è sufficiente che facciamo vedere quanto segue:
se $j_0 \geq \nu_0 - 1$ allora $D_2^{\nu_0+1}\theta|_Z = 0$,
se $j_0 \leq \nu_0 - 2$ allora $D_2^{j_0+1}D_3\theta|_Z = 0$.
A tal fine è sufficiente osservare che per (1) e l'ipotesi induttiva si ha che
se $j_0 \geq \nu_0 - 1$ allora $0 \equiv D_2^{2\nu_0}P_3|_Z \equiv \left[2\binom{2\nu_0}{\nu_0} - 2\binom{2\nu_0}{\nu_0-1}\right] D_2^{\nu_0+1}\theta \cdot D_2^{\nu_0+1}\theta$;
se $j_0 \leq \nu_0 - 2$ allora $0 \equiv D_2^{j_0-1}D_3^3P_3|_Z \equiv -6(j_0-1)D_3^2\theta \cdot D_2^{j_0+1}D_3\theta|_Z$.
Questo mostra che Θ è $< D_1, D_2 >$-invariante lungo Z . Per il lemma 3.13 abbiamo che Z è $< D_1, D_2 >$-invariante.

q.e.d.

§2 La fine della dimostrazione

Finora abbiamo mostrato che se (X, Θ) è una v.a.p.p.i. di dimensione n tale che θ soddisfa l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili $P_3(D_1, D_2, D_3; d_4)\theta = 0$, assumendo per induzione di aver trovato dei campi vettoriali invarianti D_4, ... , D_{m-1} e delle costanti d_5, ... , d_m tali che

$$P_i(...)\theta = 0 \ , \qquad \forall\, i \leq m-1 \ ,$$

e posto $P_m = P_m(D_1, ..., D_{m-1}, 0; d_4, ...d_m, 0)\theta$, si ha che le componenti di $D_1\Theta$ sulle quali P_m potrebbe non svanire sono non ridotte nonché $< D_1, D_2 >$-invarianti. Abbiamo inoltre mostrato che il luogo singolare di Θ in dimensione $n-2$ è anch'esso $< D_1, D_2 >$-invariante.

Sia $\tilde{\mathcal{W}}$ l'unione delle componenti $< D_1, D_2 >$-invarianti di $D_1\Theta$. Indichiamo con $\mathcal{S}$ la sottovarietà abeliana $< D_1, D_2 >$-invariante e minima di X . Si noti che $\mathcal{S} \neq 0$ perché $D_1 \neq 0$, inoltre $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$ (in particolare $\mathcal{S} \neq X$). Indichiamo con $\mathcal{B}$ il complementare di $\mathcal{S}$. Ricordiamo che $\mathcal{B}$ è caratterizzata dal fatto che la forma H corrispondente alla classe di Chern di Θ si spezza, più precisamente $H(V_\mathcal{B}, V_\mathcal{S}) = 0$, dove $V_\mathcal{B}$, $V_\mathcal{S}$ sono rispettivamente il rivestimento universale di $\mathcal{B}$, di $\mathcal{S}$. Sia $R = \mathcal{B} \cap \tilde{\mathcal{W}}_{rid}$. Osserviamo che $\tilde{\mathcal{W}}_{rid}$ è il $< D_1, D_2 >$-span di R e che R ha codimensione 2 in $\mathcal{B}$ (la stessa codimensione di $\tilde{\mathcal{W}}$ in X). Sia $U = X - \tilde{\mathcal{W}}_{rid}$, osserviamo che $P_m|_{U \cap D_1\Theta} = 0$. Come conseguenza della successione esatta di fasci

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U\cap\Theta}(\Theta|_{U\cap\Theta}) & \xrightarrow{\cdot D_1\theta|_{U\cap\Theta}} & \mathcal{O}_{U\cap\Theta}(2\Theta|_{U\cap\Theta}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{D_1\Theta\cap U}(2\Theta|_{U\cap\Theta}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & P_m|_{U\cap\Theta} & \longmapsto & 0 & & \end{array}$$

abbiamo che esiste un elemento $f \in H^0(U \cap \Theta, \mathcal{O}(\Theta|_{U\cap\Theta}))$ tale che

$$P_m|_{U\cap\Theta} = D_1\theta|_{U\cap\Theta} \cdot f \ . \tag{3.14}$$

Utilizzeremo le stesse notazioni del lemma 2.6. Sia $A = \mathcal{B} - R$. L'invarianza di $\tilde{\mathcal{W}}_{rid}$ rispetto a $T_0(\mathcal{S})$ implica la $T_0(\mathcal{S})$-invarianza del suo complementare U , nonché la $(\mathcal{B}\cap\mathcal{S})$-invarianza di $\tilde{\mathcal{W}}_{rid}$ e di U . Quindi $\sigma^{-1}(U) = \tilde{\sigma}^{-1}(U) = A\times\mathcal{S}$, dove σ è l'isogenia $\sigma : \mathcal{B} \times \mathcal{S} \rightarrow X$. Ricordiamo che per definizione $\tilde{\sigma}$ è la restrizione $\tilde{\sigma} = \sigma|_{A\times\mathcal{S}}$. Poiché $\sigma^{-1}(U) = A \times \mathcal{S}$ abbiamo che $\tilde{\sigma}^* f$ è una sezione globale del fascio $q_* \left(\tilde{\sigma}^*\Theta|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta}\right)$. Per il lemma 2.6 abbiamo che esistono $E \in \Gamma\left(A, T_0(\mathcal{S})\right)$, $\chi \in \Gamma\left(A, \frac{q_*\tilde{\sigma}^*\Theta}{<\tilde{\sigma}^*\theta>}\right)$, dove Γ è il funtore sezioni globali, tali che $(E\theta + \chi)_{|_{\tilde{\sigma}^{-1}\Theta}} = \tilde{\sigma}^* f$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & T_0(\mathcal{S}) \\ b & \longmapsto & E(b) \end{array}$$

è regolare in codimensione 2 (infatti, $codim_\mathcal{B} R = 2$), quindi è costante. Prima di procedere osserviamo che l'immersione $H^0(U, \Theta) \hookrightarrow H^0(\sigma^{-1}(U), \sigma^*\Theta)$, dove U è un qualsiasi aperto nella varietà abeliana X, è di fatto una inclusione, i.e., in termini di forme automorfe, σ^* è l'identità (entrambe gli spazi $H^0(U,\Theta)$, $H^0(\sigma^{-1}(U),\sigma^*\Theta)$ si identificano con sottospazi di funzioni analitiche definite su un opportuno aperto contenuto in V, dove V è il rivestimento universale di X nonché di $\mathcal{B}\times\mathcal{S}$), lo stesso vale per le sezioni di 2Θ ecc.. In particolare sarà lecito scrivere θ invece di $\sigma^*\theta$, P_m invece di $\sigma^* P_m$, ecc.. . L'espressione $Y := D_1\chi\cdot\theta - \chi\cdot D_1\theta$ è una sezione globale ben definita del fascio $\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{S}}(2\sigma^*\Theta)$. Infatti, un rappresentante locale di χ è una sezione locale di $q_*\tilde{\sigma}^*\Theta$ definita a meno di un elemento del tipo $g\cdot\theta$, dove $g\in H^0(A\times\mathcal{S},q^{-1}\mathcal{O}_A)$, in particolare $D_1 g = 0$, ne segue che $D_1(g\cdot\theta)\cdot\theta-(g\cdot\theta)\cdot D_1\theta = 0$ e quindi Y non dipende dal rappresentante locale di χ , pertanto $Y \in H^0(A\times\mathcal{S},2\sigma^*\Theta|_{A\times\mathcal{S}}) = H^0(\mathcal{B}\times\mathcal{S},2\sigma^*\Theta)$, dove l'uguaglianza segue dal Teorema di Hartogs. Consideriamo

$$P_m \ - D_1\theta\cdot E\theta \ + \theta\cdot ED_1\theta \ - \ Y \ .$$

Questa è una sezione globale del fascio $\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{S}}(2\sigma^*\Theta)$. Per l'equazione 3.14 svanisce su un aperto di $\sigma^{-1}\Theta$, quindi svanisce su $\sigma^{-1}\Theta$. Ne segue che esiste una sezione $\xi \in H^0(\mathcal{B}\times\mathcal{S},\sigma^*\Theta)$ tale che

$$(3.15) \qquad P_m \ - D_1\theta\cdot E\theta \ + \theta\cdot ED_1\theta \ - \ Y \ + \ \xi\cdot\theta \ = \ 0 \ .$$

Ora consideriamo un fibrato lineare $\mathcal{L}$ definito su $\mathcal{B}$ ed una sezione non-zero $g\in H^0(\mathcal{B},\mathcal{L})$, tale che $R\subset(g)_0$. Fissiamo

$$(3.16) \qquad \mathcal{L} \ = \ \mathcal{O}(\Theta)|_{\mathcal{B}} \ , \qquad g \ = \ \theta|_{V_{\mathcal{B}}\times\{s\}} \ ,$$

dove s è un punto generico di $V_{\mathcal{S}}$. Consideriamo la successione esatta

$$(3.17) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{B}} & \longrightarrow & q_*\sigma^*\Theta & \longrightarrow & \dfrac{q_*\sigma^*\Theta}{<\sigma^*\theta>} & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longmapsto & \sigma^*\theta & & & & \end{array}$$

(e ricordiamo che la restrizione $\frac{q_*\sigma^*\Theta}{<\sigma^*\theta>}|_A$ è un fibrato vettoriale). Sia $U = \mathcal{B}-(g)_0$. L'aperto U è affine, non interseca R , quindi χ è definita su U e si solleva ad una sezione $\eta \in H^0(U,q_*\sigma^*\Theta)$, infatti $H^1(U,\mathcal{O}) = 0$. Quindi, $\delta := \eta\cdot g^i \in H^0(\mathcal{B},q_*\sigma^*\Theta\otimes\mathcal{L}^i)$, per qualche $i\gg 0$. Si noti che $H^0(\mathcal{B},q_*\sigma^*\Theta\otimes\mathcal{L}^i) = H^0(\mathcal{B},q_*(\sigma^*\Theta\otimes q^*\mathcal{L}^i)) = H^0(\mathcal{B}\times\mathcal{S},\sigma^*\Theta\otimes q^*\mathcal{L}^i)$, e che, quando consideriamo g^i come un elemento dello spazio $H^0(\mathcal{B}\times\mathcal{S},q^*\mathcal{L}^i)$, abbiamo che g^i è costante sulle fibre di q , quindi $D_1 g = 0$. Ne segue che $Y = \frac{D_1\delta\cdot\theta-\delta\cdot D_1\theta}{g^i}$. L'equatione 3.15 diventa

$$(3.18) \qquad D_1\left(\frac{\delta \ - \ g^i\cdot E\theta}{g^i\cdot\theta}\right) \ = \ \frac{P_m \ + \ \xi\cdot\theta}{\theta^2} \ .$$

Si noti che la precedente equazione è globale i.e. $x := \frac{\delta \ - \ g^i\cdot E\theta}{g^i\cdot\theta}$ è una soluzione (meromorfa) globale dell'equazione $D_1 x = \frac{P_m \ + \ \xi\cdot\theta}{\theta^2}$. Si osservi che per ogni

$b \in \mathcal{B} - R$ esiste $s \in \mathcal{S}$ tale che $\theta(b+s) \neq 0$, quindi la sezione g definita al punto 3.16 può essere scelta in modo tale da non svanire nel punto b . In paricolare, al di fuori di $R \times \mathcal{S}$, esistono sempre soluzioni locali dell'equazione $D_1 h = \frac{P_m + \xi \cdot \theta}{\theta^2}$, dove $h \cdot \theta$ è regolare.

A questo punto siamo in grado di concludere la nostra dimostrazione del teorema di Shiota utilizzando due idee già presenti in [AD2]. In un certo senso i lemma 3.21 e 3.22 sono versioni dei lemma 1 e 2 in [AD2].

Notazioni 3.19. Indichiamo con $\bar{R}$ il luogo base del sistema lineare $|\Theta_{|\mathcal{B}}|$. Per l'osservazione 2.3 si ha $b \in \bar{R}_{red} \Leftrightarrow \mathcal{S}_b \subset \Theta \Leftrightarrow b \in R$, quindi $\bar{R}_{rid} = R$. Indichiamo con $\tilde{\mathcal{B}}$ lo scoppiamento di $\mathcal{B}$ lungo $\bar{R}$, $Bl_{\bar{R}}\mathcal{B}$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Xi} \subset \tilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{S} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \times \mathcal{S} \supset \Xi \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B} \end{array} , \qquad (3.19.1)$$

dove $\Xi = \sigma^*\Theta$ e $\tilde{\Xi}$ è la trasformata propria di Ξ , e dove le applicazioni β_0, β sono i morfismi di scoppiamento di $\mathcal{B}$ lungo $\bar{R}$, di $\mathcal{B} \times \mathcal{S}$ lungo $\bar{R} \times \mathcal{S}$. Poiché $D_1 \in T_0(\mathcal{S})$ abbiamo che il corrispondente campo vettoriale (definito su $\mathcal{B} \times \mathcal{S}$) si solleva ad un campo vettoriale, che continuiamo ad indicare con D_1 , definito su $\tilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{S}$. Fissiamo un punto generico $b \in R$, ed un suo intorno (in $\mathcal{B}$) analitico sufficientemente piccolo, che denotiamo con Q . Sia s un punto generico di $\mathcal{S}$ e fissiamo un suo intorno analitico sufficientemente piccolo, lo denotiamo con W . Fissiamo inoltre una identificazione di W con una sua preimmagine nel rivestimento universale di $\mathcal{S}$, $V_{\mathcal{S}}$. Si osservi che nella categoria analitica c'è un isomorfismo $(Q,\ Q \cap R) \cong (\Delta,\ \{w_1 = w_2 = 0\})$, dove Δ è la palla unitaria in un qualche $\mathbb{C}^t$. Indichiamo con $\mathcal{N}$ l'insieme delle funzioni meromorfe f , definite su $Q \times W$, tali che i poli di $f \circ \beta$ sono contenuti in $\tilde{\Xi}$.

Lemma 3.20. *Si abbiano W ed $\mathcal{N}$ come sopra. La trasformata propria $\tilde{\Xi}$ non contiene curve D_1-invarianti i.e. $\tilde{b} \times \mathcal{S} \not\subset \tilde{\Xi}$, per ogni $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$. Se $f \in H^0(\mathcal{B} \times W, \sigma^*\Theta|_{\mathcal{B}\times W})$ allora $(\theta^{-1} \cdot f)|_{Q\times W} \in \mathcal{N}$. In particolare $(\theta^{-1} \cdot D_1^a D_2^b \theta)|_{Q\times W} \in \mathcal{N}$, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$.*

Dim.: Innanzi tutto osserviamo che avendo identificato W con una sua preimmagine nel rivestimento universale $V_{\mathcal{S}}$, per il lemma 2.3, $(\theta^{-1} \cdot D_1^a D_2^b \theta)|_{\mathcal{B}\times W}$ è una funzione meromorfa su $\mathcal{B} \times W$ (in particolare, su $Q \times W$), ben definita. Poiché $\bar{R} = Base|\Theta_{|\mathcal{B}}|$ si ha che c'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \overset{\psi}{- \rightarrow} & \mathbb{P}H^0(\mathcal{B}, \mathcal{L})^* \\ \beta_0 \uparrow & \nearrow_{\tilde{\psi}} & \\ \tilde{\mathcal{B}} = Bl_{\bar{R}}\mathcal{B} & & \end{array}$$

dove ψ è un morfismo razionale e $\tilde{\psi}$ è un morfismo regolare. Poiché $\tilde{\psi}$ è regolare abbiamo che per ogni $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$, esistono $\alpha \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{b}}$ ed $\eta_0 \in \beta_0^*(H^0(\mathcal{B},\mathcal{L}))$ tali che $(\eta \cdot \alpha^{-1})$ è regolare, per ogni $\eta \in \beta_0^*(H^0(\mathcal{B},\mathcal{L}))$, nonché $(\eta_0 \cdot \alpha^{-1})(\tilde{b}) \neq 0$ (si noti che α è una equazione locale in $\tilde{b}$ del divisore eccezionale $\beta^{-1}(\bar{R})$). Per l'osservazione 2.4 $H^0(\mathcal{B},\mathcal{L})$ è generato dalle sezioni $\theta_s|_{V_{\mathcal{B}}}$, dove s varia in W (che identifichiamo con una sua preimmagine tramite il rivestimento universale $\pi_{\mathcal{S}} : V_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$), quindi abbiamo che $\tilde{b} \times \mathcal{S} \not\subset \tilde{\Xi}$. Nell'anello locale $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{b}}$ abbiamo $\beta^*(f \cdot \theta^{-1}) = [\beta^* f \cdot (\tilde{q}^*\alpha)^{-1}] \cdot [(\beta^*\theta) \cdot (\tilde{q}^*\alpha)^{-1}]^{-1}$, dove $\tilde{q}$ è la proiezione $\tilde{q} : \tilde{\mathcal{B}} \times \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{B}}$, che se $(\tilde{b}, s) \notin \tilde{\Xi}$, è regolare nel punto $(\tilde{b}, s)$, quindi $\theta^{-1} \cdot f \in \mathcal{N}$, per definizione di $\mathcal{N}$.

q.e.d.

Lemma 3.21. *Siano Q, W, ed $\mathcal{N}$ come al punto 3.19. Se h è una funzione meromorfa su $Q \times W$ allora si ha che $D_1 h \in \mathcal{N}$ se e solo se $h \in \mathcal{N}$.*

Dim.: Consideriamo il morfismo di scoppiamento β_0 e restringiamolo a $\tilde{Q} := \tilde{\mathcal{B}} \cap \beta_0^{-1}(Q)$. Ricordiamo che D_1 è un campo vettoriale su $Q \times W$, nonché un campo vettoriale su $\tilde{Q} \times W$. Poiché $D_1(h \circ \beta) = D_1 h \circ \beta$ è chiaro che se $h \in \mathcal{N}$ allora $D_1 h \in \mathcal{N}$. Oro proviamo l'implicazione opposta. Osserviamo che $(Q, \bar{R} \cap Q) \cong (\Delta_2, \bar{0}) \times \Delta_{t-2}$, dove Δ_i è la sfera unitaria in $\mathbb{C}^i$, e $\bar{0}_{rid}$ è uno schema, eventualmente non-ridotto, supportato su $\{0\}$. Per il teorema di risoluzione delle singolarità delle superfici c'è un morfismo $\gamma_0 : \bar{Q} \to \tilde{Q}$, dove $\bar{Q}$ è liscio. Poniamo $\gamma := \gamma_0 \times 1_d : \bar{Q} \times W \to \tilde{Q} \times W$. Gli oggetti in considerazione si inquadrano nel diagramma

$$\text{(3.21.1)} \qquad \begin{array}{ccccccc} \gamma^{-1}(\tilde{\Xi}) \subset & \bar{Q} \times W & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{Q} \times W & \xrightarrow{\beta} & Q \times W & \supset \Xi \\ & q \downarrow & & q \downarrow & & q \downarrow & \\ & \bar{Q} & \xrightarrow{\gamma_0} & \tilde{Q} & \xrightarrow{\beta_0} & Q & \end{array} .$$

Sia $\mathcal{M}$ il fascio delle funzioni meromorfe su $\bar{Q} \times W$, con poli in $\gamma^{-1}(\tilde{\Xi})$, cioè si fa l'immagine inversa tramite γ della trasformata propria tramite β_0. (si osservi che il campo vettoriale D_1 si solleva banalmente ad un campo su $\bar{Q} \times W$ e che $\bar{Q} \times W$ non contiene curve D_1-invarianti, questo segue immediatamente dal fatto che $\tilde{Q} \times W$ non ne contiene). Consideriamo l'applicazione $D_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Affermiamo che questa applicazione è suriettiva sulle sezioni globali del fascio immagine, che indichiamo con $im\mathcal{M}$. Decomponiamo il disco W nel prodotto $W_0 \times W_1$, dove W_1 è il disco di dimensione 1 tangente a D_1. Poiché $\gamma^{-1}(\tilde{\Xi})$ non contiene curve D_1-integrali abbiamo che il nucleo dell'applicazione $D_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ è $p^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Q} \times W_0}$, dove p è la proiezione $\bar{Q} \times W \to \bar{Q} \times W_0$. Ne segue che la successione

$$0 \longrightarrow p^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Q} \times W_0} \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{D_1} im\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

è esatta. Abbiamo che $H^1(\bar{Q} \times W, p^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Q} \times W_0}) = H^1(\bar{Q} \times W_0, \mathcal{O}_{\bar{Q} \times W_0}) = H^1(\bar{Q}, \mathcal{O}_{\bar{Q}}) = H^1(Q, \mathcal{O}) = 0$, infatti $R^1(\beta_0 \circ \gamma_0)_* \mathcal{O}_Q = 0$. Quindi esiste

$k \in H^0(\bar{Q} \times W, \mathcal{M})$ tale che $D_1 k = (D_1) \circ \beta \circ \gamma$, e quindi $D_1[k - (h \circ \beta \circ \gamma)] = 0$, e $k - (h \circ \beta \circ \gamma) \in H^0(\bar{Q} \times W, q^{-1}\mathcal{O}_{\bar{Q} \times W})$. I poli di k sono contenuti in $\gamma^{-1}(\tilde{\Xi})$, pertanto i poli di $h \circ \beta$ sono contenuti in $\tilde{\Xi}$ i.e. $h \in \mathcal{N}$.

q.e.d.

Lemma 3.22. *Sia $\mathcal{N}$ lo spazio introdotto al punto 3.19. Consideriamo l'equazione 3.18. Si ha che $\frac{P_m + \xi \cdot \theta}{\theta^2} \in \mathcal{N}$.*

Dim.: Poiché $\xi \in H^0(\mathcal{B} \times \mathcal{S}, \sigma^*\Theta)$, e per il lemma 3.20, abbiamo che $\xi \cdot \theta^{-1} \in \mathcal{N}$. Quindi dobbiamo mostrare che $\theta^{-2} \cdot P_m \in \mathcal{N}$. Ora mostriamo che $\frac{D_1^{a_1} ... D_k^{a_k} \theta}{\theta} \in \mathcal{N}$, per ogni $k \leq m - 1$, dove $a_i \geq 0$. Assumiamo, per induzione su k, che $(\theta^{-1} \cdot D_1^{a_1} ... D_k^{a_j} \theta) \in \mathcal{N}$, per ogni $j \leq k - 1$. Osserviamo che, per il lemma 5.20, abbiamo $k \geq 3$. Vogliamo mostrare che $\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta \in \mathcal{N}$, dove $\mathcal{D} = D_1^{a_1} ... D_k^{a_k}$. Ora procediamo per induzione su a_k . Se $a_k = 0$ non c'è nulla da provare, assumiamo che $\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta \in \mathcal{N}$, $\forall\ a_k \leq \nu - 1$; e sia $a_k = \nu$. Ora procediamo per induzione su $\sum a_i$, assumiamo che $\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta \in \mathcal{N}$, $\forall \sum a_i \leq \mu - 1$; e sia $\sum a_i = \mu$. Cominciamo col provare la seguente affermazione preliminare.

$$(\star) \qquad a_1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta \in \mathcal{N} .$$

Sia $a_1 \geq 1$, abbiamo che $\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta = D_1(\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}'\theta) - \theta^{-2} \cdot (D_1\theta \cdot \mathcal{D}'\theta) \in \mathcal{N}$, dove $\mathcal{D}'$ è definito dalla relazione $\mathcal{D}' D_1 = \mathcal{D}$. Questo prova $(\star)$. Sia $\mathcal{E}$ l'operatore definito dall'uguaglianza $\mathcal{E} D_k = \mathcal{D}$. Risulta $D_1(\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta) = \theta^{-2} \cdot \mathcal{E}(D_1 D_k \theta \cdot \theta - D_1\theta \cdot D - k\theta) - \theta^{-2} \cdot (\sum D_1 D_k \mathcal{E}_t \theta \cdot \mathcal{F}_t \theta - D_1 \mathcal{F}_t \theta \cdot D_k \mathcal{E}_t \theta)$, dove gli $\mathcal{E}_t$ hanno al più grado $\mu - 2$, e gli $\mathcal{F}_t$ hanno al più grado $\mu - 1$. Pertanto $\sum D_1 D_k \mathcal{E}_t \theta \cdot \mathcal{F}_t \theta - D_1 \mathcal{F}_t \theta \cdot D_k \mathcal{E}_t \theta) \in \mathcal{N}$ (infatti, i termini di grado μ , i.e. i soli che non sono considerati dall'ipotesi induttiva, contengono un D_1 , e quindi sono del tipo di quelli che appaiono nella affermazione preliminare $(\star)$). Poiché $P_k\theta = 0$, e per l'osservazione 3.2, abbiamo che $2(D_1\theta \cdot D_k\theta - D_1 D_k \theta \cdot \theta) = P_k(D_1, ..D_{k-1}, 0; ...)\theta$, quest'ultimo è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle funzioni $D_1^{a_1} ... D_{k-1}^{a_{k-1}} \theta$. Quindi $\theta^{-2} \cdot \mathcal{E}(D_1 D_k \theta \cdot \theta - D_1 \theta \cdot D_k \theta) \in \mathcal{N}$. Segue che $D_1(\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta) \in \mathcal{N}$. Quindi, per il lemma 3.21, $\theta^{-1} \cdot \mathcal{D}\theta \in \mathcal{N}$. Questo conclude la nostra induzione. Il lemma segue quindi dal fatto che P_m è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle funzioni $D_1^{a_1} ... D_{m-1}^{a_{k-1}} \theta$.

q.e.d.

Torniamo a considerare l'equazione 3.18. Per il lemma 3.21 abbiamo che $x := \frac{\delta - g^i \cdot E\theta}{g^i \cdot \theta} \in \mathcal{N}$, In particolare, i poli di x sono contenuti in Ξ (si osservi che il fatto che $D_1 x$ è regolare al di fuori di Ξ, che è chiaro per l'equazione 3.18, non implica che x soddisfa la stessa proprietà. Nel lemma 3.21 abbiamo provato che vale una affermazione più forte sotto ipotesi più forti, più precisamente abbiamo mostrato che c'è un sottoinsieme $\mathcal{N}$ dello spazio delle funzioni meromorfe che sono regolari al di fuori di Ξ tale che se $D_1 h \in \mathcal{N}$ allora $h \in \mathcal{N}$. Nel lemma 3.22 abbimo provato che $D_1 x \in \mathcal{N}$. Ricordiamo che $g \in H^0(\mathcal{B}, \Theta|_{\mathcal{B}}) \cong H^0(\mathcal{B} \times \mathcal{S}, q^{-1}(\Theta|_{\mathcal{B}}))$. Il divisore dei poli di $(g^i \cdot \theta)^{-1}$ contiene il divisore D_1-invariante $\Omega := \{g = 0\} \times \mathcal{S}$. Poiché Ω non è contenuto in Ξ , e poiché $\frac{\delta - g^i \cdot E\theta}{g^i \cdot \theta} \in \mathcal{N}$ si ha che $\delta - g^i \cdot E\theta$

svanisce su Ω con molteplicità i . D'altro canto, assumendo che i è minimale, δ non svanisce su Ω a meno che si abbia $i = 0$. Ne segue $i = 0$ e l'equazione 3.18 diventa

$$P_m\theta \quad = \quad D_1\delta \cdot \theta - \delta \cdot D_1\theta \ - \ \xi \cdot \theta \ + \ D_1\theta \cdot E\theta - D_1 E\theta \cdot \theta \ ,$$

quindi $P_m\theta$ svanisce sullo schema $D_1\Theta$.

Questo conclude la nostra dimostrazione del teorema di Shiota.

q.e.d.

Osservazione 3.23. Sia $\mathcal{W}$ una componente di $D_1\Theta$. Sappiamo che il supporto delle uniche componenti $\mathcal{W}$, di $D_1\Theta$, sulle quali P_m potrebbe non svanire è $< D_1, D_2 >$-invariante. Sia $\mathcal{W}$ una tale componente. Se $\theta(z+a)$ svanisse su $\mathcal{W}$, per ogni $a \in \mathcal{S}$, si avrebbe anche che $D_1^2\theta|_{\mathcal{W}} \ = \ 0$ e $D_2\theta|_{\mathcal{W}} \ = \ 0$. Per l'osservazione 3.6 si avrebbe che $P_m|_{\mathcal{W}} \ = \ 0$. In definitiva, se si potesse mostrare che tali componenti sono (come schemi) $< D_1, D_2 >$-invarianti la dimostrazione del teorema ne risulterebbe notevolmente semplificata.

- 4 -

U N C R I T E R I O P E R L E J A C O B I A N E I P E R E L L I T T I C H E

Le tecniche utilizzate fin'ora ci permettono di provare un teorema di caratterizzazione del luogo delle Jacobiane iperellittiche nello spazio dei moduli delle varietà abeliane principalmente polarizzate. Il criterio che intendiamo dimostrare in questo capitolo è di natura puramente algebro-geometrica. Questi è il seguente.

Teorema 4.1. *Sia (X, Θ) una varietà abeliana principalmente polarizzata di dimensione n. Le seguenti affermazioni sono equevalenti.*

a) (X, Θ) *è la Jacobiana di una curva iperellittica;*

b) *esiste una sezione globale del fascio $\mathcal{O}_\Theta(\Theta)$ che corrisponde ad un divisore le cui componenti sono non-ridotte, ed inoltre $dim\Theta_{sing} \leq n-3$;*

$\bar{b}$) *esiste un campo vettoriale invariante per traslazioni D tale che le componenti di $D\Theta$ sono non-ridotte, ed inoltre $dim\Theta_{sing} \leq n-3$.*

Ricordiamo che è stato congetturato che l'ipotesi " $dim\Theta_{sing} \leq n-3$ " , è equivalente all'ipotesi " (X, Θ) è indecomponibile".

§1 Geometria delle Jacobiane Iperellittiche

Nell'introduzione abbiamo visto che la funzione theta di Riemann di una Jacobiana soddisfa una gerarchia K.P. di equazioni differenziali, inoltre, i parametri dai quali dipende la gerarchia, sono i campi vettoriali di uno sviluppo in serie di Taylor della curva $\frac{1}{2}\Gamma$. In particolare si ha che $< D_1 >$ è la retta tangente ad $\frac{1}{2}\Gamma$ in 0 e $< D_1, D_2 >$ è il piano osculante $\frac{1}{2}\Gamma$ in 0 . Quindi si può assumere $D_2 = 0$ (equivalentemente, per l'osservazione 2.6, $D_2 \in < D_1 >$) se e solo se l'origine è un punto di flesso della curva $\frac{1}{2}\Gamma$.

Proposizione 4.2. *Sia $\mathcal{C}$ una curva liscia, $K_\mathcal{C}$ il divisore canonico e Γ l'immagine di $\mathcal{C}$ tramite l'applicazione di Abel-Jacobi*

$$u \;:\; p \longmapsto \int_{p_0}^{p} \;\in\; \frac{H^0(C, K_\mathcal{C})^*}{H_1(C, \mathbb{Z})} \;=\; J(C).$$

Lo spazio tangente $T_0(\Gamma)$ *è di flesso se e solo se* $dim|2p_0| = 1$ *, in questo caso si ha che* $\mathcal{C}$ *è iperellittica.*

Dim.: Sia $\{\omega\}_{i=1}^{g}$ una base di $H^0(C,K)$ ed ϵ una coordinata locale in un intorno di p_0 . Scriviamo $\omega_i = \alpha_i \cdot d\epsilon$. Dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}} - 2p_0) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, \mathbb{C}^2_{p_0}) \longrightarrow \ldots$$

segue che

$$h^1(\mathcal{C}, 2p_0) = g - dim\ Im\ H^0(\mathcal{C}, K_{\mathcal{C}}) = g - rank\begin{pmatrix} \alpha_1(p_0) & , \ldots , & \alpha_g(p_0) \\ \frac{d}{d\epsilon}\ \alpha_1(p_0) & , \ldots , & \frac{d}{d\epsilon}\ \alpha_g(p_0) \end{pmatrix}$$

quindi, per il teorema di Riemann-Roch, si ha che i vettori

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\int_{p_0}^{p(\epsilon)} \omega_1 \ , \ \ldots \ , \int_{p_0}^{p(\epsilon)} \omega_g\right)_{|\epsilon=0} \ , \qquad \frac{d^2}{d\epsilon^2}\left(\int_{p_0}^{p(\epsilon)} \omega_1 \ , \ \ldots \ , \int_{p_0}^{p(\epsilon)} \omega_g\right)_{|\epsilon=0}$$

differiscono per uno scalare se e solo se $h^0(\mathcal{C}, 2p_0) = 2$.

q.e.d.

È possibile esibire esplicitamente la tangente di flesso. Sia $\mathcal{C}$ iperellittica, p_0 un punto di ramificazione per l'involuzione iperellittica ι . Dall'uguaglianza $|2p_0| = |p + \iota(p)|$ segue che

$$u(p) = \int_{p_0}^{p} = 2\int_{p_0}^{p_0} - \int_{p_0}^{\iota(p)} = -\int_{p_0}^{\iota(p)} = -\ u(\iota(p))\ .$$

Ora osserviamo che se p è vicino a p_0 allora lo stesso accade per $\iota(p)$, pertanto, essendo $u(p) = -u(\iota(p))$, i punti $u(p)$, 0, $u(\iota(p))$ sono distinti ed allineati (tramite l'identificazione naturale di un piccolo intorno di $0 = u(p_0)$ con un intorno di 0 nello spazio tangente $T_0(J(\mathcal{C}))$, che è anche il rivestimento universale di $J(\mathcal{C})$). Inoltre, al tendere di p a p_0 , $\iota(p)$ tende a p_0 , quindi $T_0(\Gamma)$ è una tangente di flesso.

§2 Dimostrazione del criterio

È ben noto che se $\mathcal{C}$ è una curva iperellittica, Γ è la sua immagine in X tramite l'applicazione di Abel-Jacobi $u: \mathcal{C} \to X$, $u(p) = \int_{p_0}^{p}$, dove $dim|2p_0| = 1$ e D è un generatore dello spazio tangente $T_0(\frac{1}{2}\Gamma)$, allora $\bar{b}$ è verificata, più precisamente $D\Theta$ è irriducibile, non-ridotta di molteplicità 2. Poniamo $D_1 = D$. Una maniera involuta ma comunque efficace per dimostrare quanto affermato è quella di osservare che, localmente in un punto di una componete $\mathcal{W}$ di $D_1\Theta$, si ha

$$0 = P_3(D_1, 0, D_3; d) = -2(D_1^2\theta)^2 \ , \qquad modulo\ \ (D_1\theta,\ \theta)\ ,$$

e quindi $D_1^2\theta$ svanisce sullo schema ridotto $\mathcal{W}_{red}$, soggiacente lo schema $\mathcal{W}$. Questo implica che $\mathcal{W}$ è non-ridotto.

Si ha che $b)$ e $\bar{b})$ sono equivalenti. Infatti, poiché $dim\Theta_{sing} \leq n-3$, si ha che X è indecomponibile, inoltre $H^0(\Theta, \mathcal{O}(\Theta)|_\Theta)$ è lo spazio vettoriale delle derivate $T\theta$, dove T è un campo vettoriale su X invariante per traslazioni.

Assumiamo $\bar{b}$. Sia $\mathcal{W}$ una componente di $D\Theta$ ed x un suo punto chiuso generico. Poiché $dim(\mathcal{W}) = g-2$ abbiamo che x è un punto liscio del divisore Θ . Pertanto, l'ideale di $\mathcal{W}$ in x è $I_{\mathcal{W}} = (h^m, \theta)$ ed inoltre $D\theta = h^m + \alpha\theta$, dove h è un elemnto irriducibile dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$. Si noti che $m \geq 2$, altrimenti $\mathcal{W}$ sarebbe una componente ridotta dello schema $D\Theta$.

Consideriamo la sezione globale

$$\begin{aligned} S &= 2D^4\theta \cdot \theta - 8D^3\theta \cdot D\theta + 6D^2\theta \cdot D^2\theta \\ &= \sum_{n \in \frac{\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g}{\mathbb{Z}^g}} D^4\theta_n(\zeta)|_0 \cdot \theta_n(z) \qquad \in \qquad H^0(X, \mathcal{O}(2\Theta)) \ , \end{aligned}$$

del fascio $\mathcal{O}_X(2\Theta)$, dove $\{\theta_n\}$ è una base di $H^0(X, \mathcal{O}(2\Theta))$ tale che vale l'identità di Riemann $\theta(z+\zeta)\cdot\theta(z-\zeta) = \sum_n \theta_n(z)\cdot\theta_n(\zeta)$. È chiaro che $D^2\theta \in (h^{m-1}, \theta)$, quindi, essendo $m \geq 2$, $(D^2\theta)^2 \in (h^m, \theta)$. L'ultima proprietà è banalmente soddisfatta da θ e $D\theta$, quindi abbiamo che

$$S|_{D\Theta} = 0 \ .$$

Come conseguenza dell'osservazione 3.3 abbiamo che esistono un campo invariante D_3 ed una costante d tali che

$$-\frac{2}{3}D_1^4\theta\cdot\theta + \frac{8}{3}D_1^3\theta\cdot D_1\theta - 2D_1^2\theta\cdot D_1^2\theta + 2D_1D_3\theta\cdot\theta - 2D_3\theta\cdot D_1\theta + d\theta\cdot\theta = 0 \ .$$

Questa è l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili $P_3(D_1, 0, D_3; d)\theta = 0$.

A questo punto, potremmo applicare quanto visto nel capitolo precedente o, se si preferisce, il teorema di Shiota, e dedurre che $\mathcal{C}$ è la Jacobiana di una curva. Per le osservazioni fatte nel paragrafo precedente tale curva deve necessariamente essere iperellittica.

Preferiamo però produrre una dimostrazione diretta del nostro risultato, che in questo caso è particolarmente semplice.

Supponiamo, per induzione, di aver trovato dei campi $D_4, ..., D_{m-1}$ e delle costanti $d_5, ..., d_m$ in modo tale che $P_i(...)\theta = 0$, $\forall\ i \leq m$. Per la formula 2.4, essendo $D_2 = 0$, abbiamo

$$P_m\theta = -D_1^2\theta\cdot\tilde{\Delta}_{m-2}\theta \ , \qquad modulo\ (\theta, D_1\theta) \ .$$

Pertanto, se $h|D_1h$ abbiamo $P_m|_{\mathcal{W}} = 0$. Se $h \not| D_1h$, uguagliando a zero $P_3\theta$ e la sua derivata $D_1P_3\theta$, si vede che $m = 2$. Per la formula 3.6, essendo $D_2 = 0$, abbiamo

$$0 \;=\; P_{m-1}\theta|_{\Theta} \;=\; D_1^2\theta \cdot (-\tilde{\Delta}_{m-2}\theta) \;+\; D_1\theta \cdot (-\tilde{\Delta}_{m-1} + 2D_1\tilde{\Delta}_{m-2})\theta\;|_{\Theta}\;,$$

quindi $\tilde{\Delta}_{m-2}\theta \;\in\; (h,\theta)$. Sia $\tilde{\Delta}_{m-2}\theta \;\equiv\; ah$, $modulo(h^2,\theta)$. Calcolando la precedente formula modulo (h^3,θ) si ottiene

$$\begin{aligned} 0 \;=\; P_{m-1}\theta \;&\equiv\; 2D_1(h)\cdot h\cdot(-ah) \;-\; D_1\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-1}\theta \;-\; 2D_1(ah)\,) \;\equiv \\ &\equiv\; D_1\theta\cdot(\tilde{\Delta}_{m-1}\theta)\quad, \qquad\qquad\qquad\qquad modulo\ (h^3,\theta)\;\;. \end{aligned}$$

quindi $\tilde{\Delta}_{m-1}\theta \;\in\; (h,\theta)$, e pertanto

$$P_m\theta \;\equiv\; D_1^2\theta\cdot(-\tilde{\Delta}_{m-1}\theta) \;\equiv\; 0\;, \qquad modulo\;\;(h^2,\theta) \;=\; I_{\mathcal{W}}\;.$$

q.e.d.

- 5 -

L'IPOTESI K.P. NEL CASO DI POLARIZZAZIONI NON PRINCIPALI

In questo capitolo consideriamo una varietà abeliana polarizzata $(X, \mathcal{L})$ (non richiediamo che $\mathcal{L}$ sia principale). Dimostriamo un Teorema (il 5.22) che in un certo senso generalizza il Teorema di Shiota.

§1 Generalità sul gruppo Theta

Sia X una varietà abeliana di dimensione n . Sia $\mathcal{L}$ un fibrato ampio definito su X . Al fibrato $\mathcal{L}$ vengono associati due gruppi "theta" ed una applicazione importanti. I due gruppi sono

$$(5.0.1) \qquad \begin{aligned} K(\mathcal{L}) &\stackrel{def}{=} \{\, x \in X \mid t_x^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}\} \,, \\ H(\mathcal{L}) &\stackrel{def}{=} \{\, (x,\alpha) \mid x \in K(\mathcal{L}) \,,\ \alpha : \mathcal{L} \xrightarrow{\cong} t_x^*\mathcal{L}\} \,, \end{aligned}$$

dove l'operazione di gruppo è definita da $(x,\alpha)\cdot(y,\beta) = (x+y, t_y^*\alpha \circ \beta)$. L'applicazione è

$$(5.0.2) \qquad \begin{aligned} \phi_{\mathcal{L}} \ : \ X &\longrightarrow Pic^0(X) \\ x &\longmapsto t_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{aligned} \qquad .$$

Osserviamo che c'è una successione esatta

$$(5.0.3) \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & H(\mathcal{L}) & \longrightarrow & K(\mathcal{L}) & \longrightarrow 0 \\ & c & \longmapsto & (0,\cdot c) & & & \\ & & & (x,\alpha) & \longmapsto & x & \end{array} \qquad .$$

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} d \ := \ h^0(X,\mathcal{L}) \ &= \ (\#K(\mathcal{L}))^{\frac{1}{2}} \ = \ (grado\ \phi_{\mathcal{L}})^{\frac{1}{2}} \ = \ \frac{c_1(\mathcal{L})^n}{n!} \ = \ \frac{D^n}{n!} \ , \\ h^0(X,\mathcal{L}^r) \ &= \ r^n \cdot d \ , \quad \forall\, r \geq 1 \ . \end{aligned}$$

Siamo interessati a varietà abeliane polarizzate $(X/G,\ \mathcal{M})$ tali che:

i) G è un sottogruppo discreto di X ,
ii) l'immagine inversa di $\mathcal{M}$ è $\mathcal{L}$.

Alla terna $(G,\ \mathcal{M},\ \phi)$, dove $\pi : X \to X/G$ è la proiezione e $\phi : \pi^*\mathcal{M} \to \mathcal{L}$ è un isomorfismo, associamo il sottogruppo di $H(\mathcal{L})$,

$$\tilde{K} \ := \ \{\ (x,\alpha)\ |\ x \in G,\ \ \alpha = t_x^*(\phi) \circ \phi^{-1}\ \}\ .$$

Osserviamo che $\tilde{K}$ è isomorfo alla sua immagine in $K(\mathcal{L})$.

Definizione 5.1. *Un sottogruppo di* $H(\mathcal{L})$ *isomorfo alla sua immagine in* $K(\mathcal{L})$ *si chiama sottogruppo di livello.*

Proposizione 5.2. *I sottogruppi di livello sono esattamente i gruppi ottenibili nel modo descritto i.e. quelli associati a quozienti discreti polarizzati di* X *tali che valgono i) e ii).*

Oss. (definizione di $e_{\mathcal{L}}$) 5.3. L'operatore $H(\mathcal{L}) \times H(\mathcal{L}) \longrightarrow H(\mathcal{L})$, $(g,h) \longmapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$ induce una forma bilineare antisimmetrica non degenere

$$e_{\mathcal{L}}\ :\ K(\mathcal{L}) \times K(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}^*\ .$$

Definizione 5.4. *Un sottogruppo* $\tilde{K}$ *di* $K(\mathcal{L})$ *si dice isotropico se la restrizione di* $e_{\mathcal{L}}$ *a* $\tilde{K}$ *è banale.*

Proposizione 5.5. *I sottogruppi isotropici di* $K(\mathcal{L})$ *sono esattamente le immagini dei sottogruppi di livello di* $H(\mathcal{L})$ *.*

Definizione 5.6. *I gruppi* $H(\mathcal{L})$ *e* $K(\mathcal{L})$ *agiscono rispettivamente sullo spazio delle sezioni del fibrato* $\mathcal{L}$ *e sul proiettificato di quest'ultimo, definiamo*

$$\begin{array}{rccccl} \Upsilon_{\mathcal{L}} : & H(\mathcal{L}) & \times & H^0(X,\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{L})\ . \\ & (x,\alpha) & , & s & \longmapsto & t_{-x}^*(\alpha(s)) \end{array}$$

Proiettificando quest'azione si ha l'azione di $K(\mathcal{L})$ su $\mathbb{P}H^0(X,\mathcal{L})$. Osserviamo che moralmente si ha $x(s(z)) = s(z+x)$. Queste azioni si inquadrano nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & H(\mathcal{L}) & \longrightarrow & K(\mathcal{L}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathrm{GL}(d) & \longrightarrow & \mathbb{P}\,\mathrm{GL}(d) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Osservazione 5.7. Sia $(X,\mathcal{L})$ una varietà abeliana polarizzata. Per quanto abbiamo visto nell'introduzione, esistono una matrice diagonale $\Delta = diag(d_1, \dots, d_n)$

ed una matrice T tali che ΔT è una matrice simmetrica con parte immaginaria definita positiva e

$$(X,\mathcal{L}) \;\cong\; (\mathbb{C}^n/\Lambda,\ \mathcal{L}(H,\rho))\ ,$$

dove $\Lambda = \mathbb{Z}^n + T\mathbb{Z}^n$, H è la forma Hermitiana determinata da $E = imH = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (rispetto alla base reale naturale di $\mathbb{R}^n + T\cdot\mathbb{R}^n$), $\rho(m+T\tilde{m}) = e^{\pi i m\Delta\tilde{m}}$.[1]
Il fattore di automorfia di $\mathcal{L}(H,\rho)$ è $\{f_u(z) = e^{\pi i m\Delta\tilde{m}}\cdot e^{\pi H(z,u)+\frac{\pi}{2}H(u,u)}\}_{u\in\Lambda, z\in V}$, inoltre $H^0(X,\mathcal{L}) = <\theta_\sigma(z)>_{\sigma\,\in\,\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n}$, dove

$$(5.7.1) \qquad \theta_\sigma(z) \;=\; e^{\frac{\pi}{2}z\Delta B^{-1}z}\cdot\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}(p+\sigma)\Delta T(p+\sigma)\;+\;(p+\sigma)\Delta z\}}\ .$$

Osservazione 5.8. $K(\mathcal{L}) = \{\,\rho + T\cdot\mu \mid \rho,\ \mu \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n\,\} \subset \mathbb{C}^n/\Lambda$.

Osservazione 5.9. Dato $x = \rho + T\cdot\mu \in K(\mathcal{L})$ e data $s = \sum c_\sigma\theta_\sigma(z)$, si ha che

$$x([s]) \;=\; [\,\sum e^{2\pi i\rho\Delta\sigma}\cdot c_\sigma\cdot\theta_{\sigma+\mu}(z)\,]\ ,$$

dove [s] denota la classe di s in $\mathbb{P}H^0(X,\mathcal{L})$.

Definizione 5.10. *Siano $d_1,\dots,d_n$ degli interi positivi, e sia Δ la matrice diagonale $\Delta = diag(d_1,\dots,d_n)$. Definiamo i gruppi $H(\Delta)$, $K(\Delta)$, la forma e_Δ su $K(\Delta)$, lo spazio vettoriale Γ_Δ marcato dalla base $\{\theta_\sigma\}$ ed una azione Υ_Δ di $H(\Delta)$ su Γ_Δ nel modo che segue.*

$$H(\Delta) \;:=\; \mathbb{C}^* \times \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \times \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n\ ,$$

dove l'operazione di gruppo è $(c,x,l)\cdot(d,y,m) = (c\cdot d\cdot e^{2\pi i m\Delta x},\ x+y,\ l+m)$,

$$K(\Delta) \;:=\; \frac{H(\Delta)}{\mathbb{C}^*} \;=\; \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \times \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n\ ,$$

$$\begin{array}{rcccl} e_\Delta & : & K(\Delta)\times K(\Delta) & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & & (x,l)\ ,\ (y,m) & \longmapsto & e^{2\pi i(m\Delta x\;-\;l\Delta y)} \end{array}$$

(questa forma è indotta dall'operatore $\tilde{e}_\Delta$ su $H(\Delta)$, definito da $\tilde{e}_\Delta(h,g) = h\cdot g\cdot h^{-1}\cdot g^{-1}$),

$$\Gamma_\Delta \;:=\; <\{\theta_\sigma\}_{\sigma\in\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n}>_{\mathbb{C}}\ ,$$

$$\begin{array}{rcccl} \Upsilon_\Delta & : & H(\Delta)\times\Gamma_\Delta & \longrightarrow & \Gamma_\Delta \\ & & (c,x,\mu)\quad \sum c_\sigma\cdot\theta_\sigma & \longmapsto & c\cdot\sum e^{2\pi i x\Delta\sigma}\cdot c_\sigma\cdot\theta_{\sigma+\mu}\,] \end{array} .$$

Il dato costituito dai precedenti oggetti è, per definizione, il modello astratto associato a Δ .

[1] non traspongo i vettori per non appesantire le notazioni.

Osservazione 5.11. L'azione di $H(\mathcal{L})$ si proiettifica ad una azione di $K(\mathcal{L})$ su $\mathbb{P}\Gamma_\Delta$. Anche per i modelli astratti possiamo ripetere le definizioni 5.1, 5.4, nonché vale la proposizione 5.5.

Proposizione 5.12. *Sia* $(X, \mathcal{L})$ *una varietà abeliana polarizzata e sia* $(d_1, ... , d_n)$ *il tipo di* $\mathcal{L}$ *. Si ha che il modello astratto associato a* $\Delta = diag(d_1, ... , d_n)$ *è isomorfo a* $\{ \ H(\mathcal{L}), \ K(\mathcal{L}), \ e_\mathcal{L}, \ H^0(X, \mathcal{L}), \ \Upsilon_\mathcal{L} \ \}$.

Ricordiamo che il dato rilevante è un isomorfismo $H(\mathcal{L}) \cong H(\Delta)$ che su $\mathbb{C}^*$ si restringe all'identità. Un tale isomorfismo, per definizione, è una struttura theta sulla varietà abeliana polarizzata $(X, \mathcal{L})$.

§2 Inciso: sulle forme automorfe

In questo paragrafo facciamo alcune riflessioni riguardanti il problema corrispondente al fatto che la $K.P.$ non agisce sulle sezioni di un fibrato ma su funzioni definite su uno spazio vettoriale complesso.

Se θ è una forma automorfa relativa al fibrato $\mathcal{L}$, allora è stato scelto un isomorfismo $\pi^*\mathcal{L} \cong V \times \mathbb{C}$ e θ è l'immagine inversa di una sezione di $\mathcal{L}$, dove V è il rivestimento universale di X e π è la proiezione naturale $V \rightarrow X$. Si noti che la forma automorfa θ è una funzione definita su V . La proprietà $K.P.\theta = 0$ non solo dipende dalla particolare sezione di $\mathcal{L}$ in questione ma anche dalle scelte fatte, cioè dalla particolare forma automorfa che la rappresenta. Questo naturalmente crea dei problemi, specialmente se si cerca di definire un operatore K.P. sullo spazio $H^0(X, \mathcal{L})$. Nel caso in cui la polarizzazione $\mathcal{L}$ è principale non bisogna preoccuparsi di questo problema perché, per le osservazioni 3.2, 3.3 e 3.4 e visto che la dimostrazione del teorema di Shiota non utilizza l'espressione scelta per la forma automorfa theta, la chiave di lettura del teorema è la seguente: sia (X, Θ) una v.a.p.p.i., se esistono una qualsiasi forma automorfa θ che rappresenta la polarizzazione ed una K.P. tali che $K.P.\theta = 0$, allora (X, Θ) è una Jacobiana. Ricordiamo che le osservazioni menzionate permettono di enunciare (Teorema 3.5) il teorema di Shiota in modo tale che l'ipotesi $K.P.\theta = 0$ non dipende dalla forma automorfa θ scelta.

I punti chiave nell'eliminazione del problema in considerazione sono due. Uno è la proposizione 5.14, che ci permette di dire che l'ipotesi K.P. è, in un certo senso, indipendente dal fattore di automorfia che si sceglie; l'altro è l'osservazione 5.20, che è la chiave per poter lavorare "all'interno del fattore di automorfia standard scelto".

Abbiamo una v.a.p. $(X, \mathcal{L})$. Da un lato abbiamo una situazione naturale: abbiamo il rivestimento universale V di X , la fibra Λ sopra lo 0, il l'immagine inversa di $\mathcal{L}$ su V ed una collezione di funzioni (fattore d'automorfia) $\{\tilde{f}_u(z)\}_{u \in \Lambda, \ z \in V}$ per ogni isomorfismo tra l'immagine inversa di $\mathcal{L}$ su V ed il fibrato $V \times \mathbb{C}$. D'altro canto abbiamo la precedente descrizione (osservazione 5.7) di $(X, \mathcal{L})$, e quindi la formula 5.7.1. Le regole che determinano questa formula ci vengono date una volta per tutte le varietà abeliane dal teorema di Appell-Humbert (quindi potrebbero essere considerate naturali) ma dipendono anche dalla scelta di una base simplettica di Λ (che certamente non è unica). Non vogliamo considerare tutte le collezioni $\{\tilde{f}_u(z)\}_{u\in\Lambda,\ z\in V}$ ma solo quelle compatibili con le relazioni bilineari di Riemann (r.b.R.). Introduciamo una notazione. Scriviamo

$$\theta \quad \leftrightarrow \quad \{\tilde{f}_u(z)\}$$

se θ è una forma automorfa associata a $\{\tilde{f}_u(z)\}$ i.e. se $\theta(z+u) = \tilde{f}_u(z)\cdot\theta(z)\ \forall u \in \Lambda,\ z \in V$. Diciamo che $\{\tilde{f}_u(z)\}_{u\in\Lambda,\ z\in V}$ è compatibile con le r.b.R. se vale una delle seguenti (equivalenti) condizioni:

i) $\exists\, \theta \ \leftrightarrow\ \{\tilde{f}_u(z)\}$ e 2^n funzioni indipendenti $\theta_i \ \leftrightarrow\ \{(\tilde{f}_u(z))^2\}$ tali che

$$\theta(z+w)\cdot\theta(z-w) \quad = \quad \sum \theta_i(z)\cdot\theta_i(w)$$

ii) Se g è la funzione olomorfa mai nulla che collega le $\tilde{f}_u$ con le f_u (dove la collezione $\{f_u\}$ è un fattore di automorfia standard cioè come quello introdotto nell'osservazione 5.7) i.e. è tale che $\tilde{f}_u(z) \ = \ g(z+u)^{-1}\cdot g(z)\cdot f_u(z)$ (e quindi $\theta \ \leftrightarrow\ \{\tilde{f}_u(z)\} \iff g\cdot\theta \ \leftrightarrow\ \{f_u(z)\}$) , allora g soddisfa la relazione

$$(\star) \qquad\qquad g(z+w)\cdot g(z-w) \ = \ g^2(z)\cdot g^2(w)$$

iii) Esiste una base $\{\theta_\sigma\}_{\sigma\in\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n}$ dello spazio delle funzioni $\theta \ \leftrightarrow\ \{\tilde{f}_u(z)\}$ ed una base $\{\vartheta_\nu\}_{\sigma\in(2\Delta)^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n}$ dello spazio delle funzioni $\vartheta \ \leftrightarrow\ \{(\tilde{f}_u(z))^2\}$ (si noti l'inclusione $\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \ \subset\ (2\Delta)^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$) tali che

$$s(z+\xi)\cdot r(z-\xi) \quad = \quad \sum_{\sigma,\ \mu,\ n} \Big(c_\sigma\cdot d_\mu\cdot \vartheta_{\frac{\sigma+\mu}{2}+n}(z)\cdot\vartheta_{\frac{\sigma-\mu}{2}+n}(\xi)\Big) \ ,$$

per ogni $s \ = \ \sum c_\sigma\cdot\theta_\sigma(z)$, $r \ = \ \sum d_\sigma\cdot\theta_\sigma(z)$. Si noti che la divisione per 2 è una funzione $1 : 2^{2n}$, i punti $\frac{\sigma+\mu}{2}$, $\frac{\sigma-\mu}{2}$ sono ben definiti a meno di un punto di ordine 2. E' necessario che, per ogni coppia $(\sigma,\ \mu)$ fissata, le scelte siano coerenti i.e. che si abbia $\frac{\sigma+\mu}{2}+\frac{\sigma-\mu}{2} \ = \ \sigma$, sottolineiamo anche il fatto che, fissata una coppia $(\sigma,\ \mu)$, la scelta di $\frac{\sigma+\mu}{2}$, $\frac{\sigma-\mu}{2}$ deve essere fatta una volta per tutte i.e. deve essere la stessa per tutti gli n .

Ovviamente ii) $\Rightarrow$ i) e iii) , iii) $\Rightarrow$ i) . i) $\Rightarrow$ ii) è una conseguenza dell'unicità delle r.b.R. .

Notiamo che se $\{\tilde{f}_u(z)\}$ ed $\{\tilde{\tilde{f}}_u(z)\}$ sono entrambe compatibili con le r.b.R. allora esiste g , come in $(\star)$, che le collega.

Osservazione 5.13. Sia $(X,\mathcal{L})$ una varietà abeliana polarizzata. Supponiamo che $\theta \ \leftrightarrow\ \{\tilde{f}_u(z)\}$, $\vartheta \ \leftrightarrow\ \{f'_u(z)\}$ e che θ , ϑ rappresentino la stessa sezione del fibrato $\mathcal{L}$ i.e. $\theta \ = \ g\cdot\vartheta$ dove g è la funzione olomorfa (e mai nulla) che collega i due fattori di automorfia $\{\tilde{f}_u(z)\}$, $\{f'_u(z)\}$. Sia $K.P. = K.P.(D_1, D_2, D_3; d)$. Si ha che

$$K.P.(g \cdot \theta) = (K.P.(\theta)) \cdot g^2 + ((K.P.(g)) \cdot \theta^2 - d \cdot g^2 \cdot \theta^2$$
$$- 8 \cdot (D_1^2 g \cdot g - D_1 g \cdot D_1 g) \cdot (D_1^2 \theta \cdot \theta - D_1 \theta \cdot D_1 \theta) \ .$$

Se ora assumiamo che i fattori di automorfia $\{\tilde{f}_u(z)\}$, $\{f'_u(z)\}$ sono compatibili con le r.b.R. abbiamo che g soddisfa $(\star)$ e quindi che

$$(5.13.1) \qquad K.P.(D_1, D_2, D_3 + lD_1; d + m)(g \cdot \theta) =$$
$$g^2 \cdot K.P.(D_1, D_2, D_3; d)(\theta) + g^2 \cdot \left[-4(D_1^2 g^2)_{|0} + 2lg^2{}_{|0} \right] \cdot (D_1^2 \theta \cdot \theta - D_1 \theta \cdot D_1 \theta) +$$
$$g^2 \cdot \left[\left((-\frac{1}{3} D_1^4 - D_2^2 + D_1 D_3 + lD_1^2 + m) g^2 \right)_{|0} \right] \cdot \theta^2 \ .$$

Si ricordi che g è una funzione olomorfa mai-nulla, in particolare $g(0) \neq 0$. Si noti che dall'espressione scritta è evidente che, indipendentemente da g , per l, m opportuni, i termini tra parentesi quadre sono nulli e quindi risulta

$$K.P.(D_1,\ D_2,\ D_3 + lD_1;\ d + m)(g \cdot \theta) \quad = \quad g^2 \cdot K.P.(D_1, D_2\ , D_3\ ; d)(\theta) \ .$$

Vedremo che (proposizione 5.15) K.P. è un operatore, che dipende dal fattore di automorfia scelto (compatibile con le r.b.R.) per rappresentare $\mathcal{L}$, definito su $H^0(X, \mathcal{L})$ ed a codominio $H^0(X, \mathcal{L}^2)$. Questo, insieme a quanto osservato precedentemente, implica che K.P. è una applicazione intrinsecamente definita

$$\text{"}K.P.\text{"} : \quad H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \left\{ (\theta, \phi) \mid \theta \in H^0(X, \mathcal{L}),\ \phi \in \frac{H^0(X, \mathcal{L}^2)}{< \theta, D_1^2 \theta \cdot \theta - (D_1 \theta)^2 >} \right\}$$
$$\theta \longmapsto (\theta,\ [K.P.\theta]\ )$$

In definitiva abbiamo che vale la seguente proposizione.

Proposizione 5.14. *Sia $(X, \mathcal{L})$ una varietà abeliana polarizzata, θ una sezione di $\mathcal{L}$, $D_1 \neq 0$, D_2, D_3 campi vettoriali invarianti e d una costante. Le condizioni*

i) $\text{"}K.P.\text{"}\, \theta = (\theta, [0])$,

ii) esiste un fattore d'automorfia $\{f_u(z)\}$ tale che $P_3(D_1, D_2, D_3; d)\theta = 0$, dove $\theta \leftrightarrow \{f_u(z)\}$,

iii) per ogni fattore d'automorfia $\{f_u(z)\}$ esistono l, m tali che $P_3(D_1, D_2, D_3 + lD_1; d + m)\theta = 0$, dove $\theta \leftrightarrow \{f_u(z)\}$,

sono equivalenti.

§3 L'operatore K.P.

In questo paragrafo studiamo le relazioni tra un operatore K.P. ed il modello associato alla polarizzazione $\mathcal{L}$. Fissiamo, una volta per tutto il resto del paragrafo, i seguenti oggetti:

i) una varietà abeliana polarizzata $(X, \mathcal{L})$,

ii) una base simplettica di $H_1(X, \mathbb{Z})$,

iii) l'operatore $K.P. := K.P.(D_1, D_2, D_3; d)$.

Si noti che "ii)" determina la descrizione di $(X, \mathcal{L})$ che abbiamo fatto al punto 5.7.

Proposizione 5.15. *L'operatore K.P. è la diagonale del seguente operatore bilineare simmetrico*

$$\begin{array}{ccc} H^0(X,\mathcal{L}) \times H^0(X,\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{L}^2) \\ & & -\frac{1}{3}(D_1^4 r \cdot s + D_1^4 s \cdot r) + \frac{4}{3}(D_1^3 r \cdot D_1 s + D_1^3 s \cdot D_1 r) \\ (\ r\ ,\ s\ ) & \longmapsto & -2D_1^2 r \cdot D_1^2 s \ - (D_2^2 s \cdot r \ + \ D_2^2 r \cdot s) + 2D_2 r \cdot D_2 s + \\ & & (D_1 D_3 r \cdot s \ + \ D_1 D_3 s \cdot r) - (D_3 r \cdot D_1 s \ + \ D_3 s \cdot D_1 r) \\ & & + d \cdot r \cdot s \end{array}$$

dim.: L'unica verifica, non-banale, che dobbiamo dimostrare è che il codominio di questa applicazione è $H^0(X, \mathcal{L}^2)$. Per ogni matrice τ nel semipiano di Siegel $\mathcal{H}_n$ si ha

$$\left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}p\tau p \ + \ p(z+\xi)\}} \right) \cdot \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}p\tau p \ + \ p(z-\xi)\}} \right) \quad =$$

$$\sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}(p+n)2\tau(p+n) \ + \ (p+n)\cdot 2z\}} \right) \cdot \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\{\frac{1}{2}(p+n)2\tau(p+n) \ + \ (p+n)\cdot 2\xi\}} \right) ,$$

quindi, per ogni $\sigma \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$, si ha

$$\theta_\sigma(z+\xi) \ \cdot \ \theta_\sigma(z-\xi) \ = \ \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n} \tilde{\theta}_n(\xi) \ \cdot \ \tilde{\theta}_{\sigma \ + \ n}(z) \ ,$$

dove le $\tilde{\theta}_\nu(z) \ = \ e^{\pi z \Delta B^{-1} z} \cdot \sum e^{2\pi i\{\frac{1}{2}(p+\nu)2\Delta T(p+\nu) \ + \ (p+\nu)2\Delta z\}}$, $\nu \in \frac{1}{2}\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$ sono chiaramente sezioni del fibrato $\mathcal{L}^2$ (esse corrispondono al fattore di automorfia $\{(f_u(z))^2\}_{u \in \Lambda}$) . Infine, se $s \ = \ \sum c_\sigma \cdot \theta_\sigma(z)$, $r \ = \ \sum d_\sigma \cdot \theta_\sigma(z)$, si ha

$$s(z+\xi) \cdot r(z-\xi) \quad = \quad \sum_{\sigma,\ \mu \ \in \ \Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \ , \ n \ \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n} \left(c_\sigma \cdot d_\mu \cdot \tilde{\theta}_{\frac{\sigma+\mu}{2}+n}(z) \cdot \tilde{\theta}_{\frac{\sigma-\mu}{2}+n}(\xi) \right)$$

(ricordiamo che i quozienti $\frac{\sigma+\mu}{2}$, $\frac{\sigma-\mu}{2}$ possono essere scelti in modo arbitrario a patto che le scelte siano l'una coerente con le altre). Quindi, se $\mathcal{D}$ è l'operatore differenziale $-\frac{1}{3}D_1^4 - D_2^2 + D_1D_3 + d_4$, operante sulla variabile ξ , si ha

$$K.P.(s,r) \quad = \quad \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\left(s(z+\xi)\cdot r(z-\xi) \; + \; s(z-\xi)\cdot r(z+\xi)\right)\right)_{|0} \quad =$$

$$\sum_{\nu\in\ \frac{1}{2}\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n} \tilde{\theta}_\nu(z)\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{\frac{\sigma+\mu}{2}+n\,=\,\nu} c_\sigma\cdot d_\mu\cdot\mathcal{D}\tilde{\theta}_{\frac{\sigma-\mu}{2}+n} \; + \; c_\mu\cdot d_\sigma\cdot\mathcal{D}\tilde{\theta}_{\frac{\mu-\sigma}{2}+n}\right)_{|0} \quad .$$

q.e.d.

Osservazione 5.16. L'operatore $\mathcal{D}$ non ha nulla di speciale: se $\mathcal{E}$ è un qualsiasi operatore differenziale, e.g. $\mathcal{E} = \sum E_I$, dove I è un multiindice e gli E_i sono campi vettoriali invarianti su X , si ha che

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(s(z+\xi)\cdot r(z-\xi) \; + \; s(z-\xi)\cdot r(z+\xi)\right)\right)_{|0}$$

è una sezione di $\mathcal{L}^2$.

Osservazione 5.17. L'unica cosa che abbiamo utilizzato per dimostrare la precedente proposizione sono le relazioni bilineari di Riemann.

Definizione 5.18. *Indichiamo con* $\mathcal{KP}$ *l'applicazione lineare che si ottiene fattorizzando tramite il tensore simmetrico l'operatore bilineare simmetrico introdotto nella proposizione 5.15, i.e.*

$$\mathcal{KP} \; : \quad H^0(X,\mathcal{L}) \; \otimes_s \; H^0(X,\mathcal{L}) \quad \longrightarrow \quad H^0(X,\mathcal{L}^2) \; ,$$

notiamo che $\mathcal{KP}(s\otimes s) \; = \; K.P.(s)$.

E' giunto il momento di far intervenire nel gioco anche l'azione del gruppo theta $H(\mathcal{L})$. Vedremo che questa commuta con $\mathcal{KP}$.

Poiché gli elementi di $H(\mathcal{L})$ agiscono linearmente sulle sezioni del fibrato $\mathcal{L}$ si ha che $H(\mathcal{L})$ agisce anche sul tensore simmetrico di $H^0(X,\mathcal{L})$ i.e. l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H(\mathcal{L}) \; \times \; \left(H^0(X,\mathcal{L}) \; \otimes_s \; H^0(X,\mathcal{L})\right) & \longrightarrow & \left(H^0(X,\mathcal{L}) \; \otimes_s \; H^0(X,\mathcal{L})\right) \\ g \qquad , \qquad \sum s_i\otimes r_i & \longmapsto & \sum g(s_i)\otimes g(r_i) \end{array}$$

è ben definita. Si osservi che l'azione introdotta è banale sul nucleo di $H(\mathcal{L}) \to H(\mathcal{L}^2)$.

Osservazione 5.19. $H(\mathcal{L})$ surietta su un sottogruppo di $H(\mathcal{L}^2)$ e pertanto agisce anche su $H^0(X,\mathcal{L}^2)$.

Osservazione 5.20. Consideriamo un punto $(x,\alpha) \in H(\mathcal{L})$, continuiamo ad indicare con x un punto di $\mathbb{C}^n$ sulla fibra di x . Sia s una sezione di $\mathcal{L}$. Si ha che esistono un vettore a ed una costante c , che non dipendono da s , tali che $(x,\alpha)(s) = e^{za+c}\cdot s(z+x)$. Infatti, $(x,\alpha)(s)$ è una funzione olomorfa definita su $\mathbb{C}^n$ che, a meno di una costante moltiplicativa non nulla, è caratterizzata dalle proprietà $\{(x,\alpha)(s)=0\} = \{s(z+x)=0\}$, $(x,\alpha)(s)$ è compatibile con il fattore di automorfia $\{f_u(z)\}$ (5.7). La nostra affermazione segue immediatamente dal confronto delle espressioni dei $\theta_\sigma(z)$ (5.7.1) con quelle dei $\theta_\sigma(z+x)$. Ricordiamo che un quoziente di $H(\mathcal{L})$ è un sottogruppo di $H(\mathcal{L}^2)$ (l'applicazione $(x,\alpha) \mapsto (x,\alpha\otimes\alpha)$ è un morfismo di gruppi, in termini dei modelli astratti si ha $H(\Delta)/\binom{+}{-} \triangleleft H(2\Delta)$, dove l'inclusione è $(\pm c,x,l) \mapsto (c^2,x,l)$). Inoltre, osserviamo che se $q \in H(\mathcal{L}^2)$ allora $(x,\alpha)(q) = e^{2(za+c)}\cdot q(z+x)$.

Proposizione 5.21. *Sia $(X,\mathcal{L})$ una varietà abeliana polarizzata, $\mathcal{K}P$ l'operatore su definito (5.18). L'azione di $H(\mathcal{L})$ commuta con l'operatore $\mathcal{K}P$.*

Dim.: Poiché $\mathcal{K}P$ è lineare ed ogni elemento di $H(\mathcal{L})$ agisce linearmente su $H^0(X,\mathcal{L})$ nonché su $H^0(X,\mathcal{L}^2)$ si ha che è sufficiente mostrare che dati $(x,\alpha) \in H(\mathcal{L})$, $s,r \in H^0(X,\mathcal{L})$ si ha che

$$\mathcal{K}P\ ((x,\alpha)s\otimes r) \ = \ (x,\alpha)(\mathcal{K}Ps\otimes r)\ .$$

Questa uguaglianza è una conseguenza della osservazione precedente (per dare senso a quanto stiamo per scrivere estendiamo la definizione di $\mathcal{K}P$ a tutte le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}P((x,\alpha)s\otimes r) &= \mathcal{K}P\big(e^{a+zc}\cdot s(z+x)\otimes e^{a+zc}\cdot r(z+x)\big)\\
&= e^{2(az+c)}\cdot \mathcal{K}P(s(z+x)\otimes r(z+x))\\
&= e^{2(az+c)}\cdot (\mathcal{K}Ps\otimes r)(z+x)\\
&= (x,\alpha)(\mathcal{K}P(s\otimes r)) \quad ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che se $\mathcal{E}$ è un operatore differenziale che opera come nell'osservazione 5.16 ed $h,\ g$ sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$, allora

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(e^{a+zc}\cdot h,\ e^{a+zc}\cdot g) \ := \\
&\frac{1}{2}\mathcal{E}\left(e^{a+(z+\xi)c}h(z+\xi)\cdot e^{a+(z-\xi)c}g(z-\xi) \ + \ e^{a+(z-\xi)c}h(z-\xi)\cdot e^{a+(z+\xi)c}g(z+\xi)\right)_{|0}\\
&= \ \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(e^{2(a+zc)}\cdot(h(z+\xi)\cdot g(z-\xi) \ + \ h(z-\xi)\cdot g(z+\xi))\right)_{|0} \ = \\
&= \ e^{2(a+zc)}\cdot\mathcal{E}(h,g)\ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

§4 Generalizzazione del Teorema di Shiota

In questo paragrafo proponiamo una generalizzazione del Teorema di Shiota al caso di polarizzazioni non principali, riduciamo la generalizzazione ad un problema puramente algebrico e la dimostriamo a patto di assumere che "lo spazio delle sezioni della polarizzazione" abbia, al più, dimensione 5.

Teorema 5.22. *Sia* $(X,\mathcal{L})$ *una varietà abeliana polarizzata. Assumiamo che* $dim H^0(X,\mathcal{L}) \leq 5$. *Se* $\vartheta \in H^0(X,\mathcal{L})$, $\vartheta \neq 0$, $K.P.(D_1,D_2,D_3;d)\vartheta = 0$, *dove* $D_1 \neq 0$, *esiste un sottogruppo isotropico massimale* $G \lhd K(\mathcal{L})$ *tale che la corrispondente polarizzazione principale su* X/G , *che indichiamo con* $\mathcal{M}$, *soddisfa l'equazione* $K.P.$, *quindi se* X_1, ..., X_l *sono sottovarietà in cui* $(X/G,\mathcal{M})$ *si decompone come prodotto di v.a.p.p.i., si ha che:*

$$(X_i, \mathcal{M}|_{X_i}) \quad \text{è una Jacobiana} ,$$

per ogni i *tale che* $D_1|_{X_i} \neq 0$ *(e questo deve accadere per almeno uno degli* i *) .*

Congettura 5.23. *Il precedente Teorema vale anche nel caso in cui non si assumono ipotesi restrittive sulla dimensione dello spazio* $H^0(X,\mathcal{L})$.

Congettura 5.24. *Sia* $\Delta = diag(d_1, \dots d_n)$, *dove* $d_i \in \mathbb{N}$, $d_1|\dots|d_n$. *Sia* $\{H(\Delta),\ K(\Delta),\ e_\Delta,\ \Gamma_\Delta,\ \Upsilon_\Delta\}$ *il modello astratto associato a* Δ *(definizione 5.10). Indichiamo con* Q *l'immagine di* Γ_Δ *in* $\Gamma_\Delta \otimes_s \Gamma_\Delta$ *tramite l'applicazione diagonale. Sia* N *un sottospazio lineare di* $\Gamma_\Delta \otimes_s \Gamma_\Delta$ *invariante per l'azione di* $\Upsilon_\Delta \otimes_s \Upsilon_\Delta$. *Se* N *contiene un punto di* $Q - \{0\}$ *allora si ha che* $\mathbb{P}N$ *contiene almeno un punto di* $\mathbb{P}Q \cong \mathbb{P}\Gamma_\Delta$ *fissato dall'azione di un sottogruppo isotropico massimale di* $K(\Delta)$.

Proposizione 5.25. *La congettura 5.23 si riduce ad un problema puramente algebrico, più precisamente essa è implicata dalla precedente congettura 5.24.*

Dim.: Per la proposizione 5.14 possiamo assumere che ϑ è una funzione theta standard. Il nucleo N dell'operatore lineare $\mathcal{KP}$ (definizione 5.18) è un sottospazio di $H^0(X,\mathcal{L}) \otimes_s H^0(X,\mathcal{L})$, inoltre N contiene il punto ϑ della varietà Q , dove Q è l'immagine di $H^0(X,\mathcal{L})$ in $H^0(X,\mathcal{L}) \otimes_s H^0(X,\mathcal{L})$, tramite l'applicazione $s \mapsto s \otimes s$. Poichè l'azione di $H(\mathcal{L})$ commuta con l'operatore $\mathcal{KP}$ (proposizione 5.21) abbiamo che N è $H(\mathcal{L})$-invariante. Per ipotesi la congettura 5.24 è verificata, pertanto esiste $\theta \in Q \cap N$, $\theta \neq 0$, tale che $[\theta] \in \mathbb{P}Q \cong \mathbb{P}\Gamma_\Delta$, è fissato dall'azione di un sottogruppo isotropico massimale K , di $K(\mathcal{L})$. Per la proposizione 5.5 abbiamo che K è l'immagine (isomorfa) di un sottogruppo di livello $\tilde{K}$ di $H(\mathcal{L})$. Per la proposizione 5.2 esistono un sottogruppo discreto G di X ed un fibrato $\mathcal{M}$ su X/G tali che $\pi^*\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$, $\tilde{K} = \{(x,\alpha) \in H(\mathcal{L})|\ x \in G,\ \alpha = t_x^*\phi \circ \phi^{-1}\}$, dove $\pi : X \to X/G$ è la proiezione naturale e dove $\phi : \pi^*\mathcal{M} \to \mathcal{L}$ è un isomorfismo $\pi^*\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$. Poiché K è massimale si ha che $\mathcal{M}$ è una polarizzazione principale. Poiché θ è $\tilde{K}$ -invariante si ha che $\theta \in H^0(X/G,\mathcal{M})$. Abbiamo $K.P.\theta = \mathcal{KP}(\theta \otimes \theta) = 0$. Se $(X/G,\mathcal{M})$ è indecomponibile allora, per il teorema di Shiota, è una Jacobiana.

Altrimenti procediamo nella maniera che segue. Sia $(X/G, \mathcal{M}) \cong (Y_1, \mathcal{M}_1) \times ... \times (Y_h, \mathcal{M}_h)$, $\theta = \theta_1 \cdot ... \cdot \theta_h$, dove θ_i è un generatore di $H^0(Y_i, \mathcal{M}_i)$. I campi vettoriali invarianti definiti su X si decompongono in modo unico in campi vettoriali invarianti definiti sugli Y_i . Per ipotesi $D_1 \neq 0$, consideriamo un i tale che $D_1|_{Y_i} \neq 0$. Poniamo $Y = Y_i$, $f = \theta_i$, $Z = \prod_{j \neq i} Y_j$, $g = \prod_{j \neq i} \theta_j$. Sia $D_i = F_i + G_i$ la decomposizione di D_i in $T_0(Y) \times T_0(Z) = T_0(X)$. Possiamo assumere che $g(0) \neq 0$. Si ha $0 = K.P.(D_1, D_2, D_3; d)\theta|_{Y \times 0} = K.P.(D_1, D_2, D_3; d)(f \cdot g)|_{Y \times 0} = \alpha \cdot K.P.(F_1, F_2, F_3; d)f + \beta \cdot f^2 + \gamma \cdot (F_1^2 f \cdot f - F_1 f \cdot F_1 f)$, dove $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ sono delle costanti, più precisamente $\alpha = g(0) \neq 0, \beta = K.P.(G_1, G_2, G_3; 0)(g)(0), \gamma = -8(G_1^2 g \cdot g - G_1 g \cdot G_1 g)(0)$. Per il teorema di Shiota, del quale ne abbiamo fornito una dimostrazione geometrica nel capitolo 3, e per l'osservazione 5.13, abbiamo che $(Y_i, \mathcal{M}_i)$ è una Jacobiana.

q.e.d.

Dim. (del teorema 5.22, equivalentemente, della congettura 5.24 per $d \leq 5$) : Prima di procedere ricordiamo che $K(\Delta) \cong H(\Delta)/\mathbb{C}^*$ nonché $\mathbb{C}^*$ agisce in modo naturale su Γ_Δ , questo ci permette di passare con disinvoltura da $K(\Delta)$ e quello che accade in Γ_Δ , ad $H(\Delta)$ e quello che accade in $\mathbb{P}\Gamma_\Delta$. Inoltre, per comodità, identifichiamo $\Delta^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^n/\Delta\mathbb{Z}^n$. Ricordiamo che Γ_Δ è marcato dalla base $\{\theta_\sigma\}_{\sigma \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$. Ovviamente possiamo assumere $d_1 \neq 1$, pertanto i casi che dobbiamo considerare sono $\Delta = (2)$, $\Delta = (3)$, $\Delta = diag(2,2)$, $\Delta = (4)$ e $\Delta = (5)$. Per ipotesi c'è un punto $p \in N \cap Q - \{0\}$. Cominciamo con il caso $\Delta = (2)$. Si ha $K(\Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, i sottogruppi isotropici (non zero) di $K(\Delta)$ sono $G_1 = <(1,0)>$, $G_2 = <(0,1)>$, $G_3 = <(1,1)>$ e sono tutti massimali. Sia $[a,b]$ la coordinata di $[p] \in \mathbb{P}\Gamma_\Delta$. Se $[a,b] = [1,0]$ (oppure $[0,1]$), allora p è G_1-invariante, se $[a,b] = [1,1]$ (oppure $[1,-1]$), allora p è G_2-invariante, se $[a,b] = [1,\iota]$, dove $\iota = (-1)^{\frac{1}{2}}$ (oppure $[1,-\iota]$), allora p è G_3-invariante. Ora mostriamo che se $[p]$ non è uno dei 6 punti considerati allora $N = \Gamma_\Delta \otimes_s \Gamma_\Delta$. Agendo con $H(\Delta)$ otteniamo che $(a,b)\otimes^2$, $(b,a)\otimes^2$, $(a,-b)\otimes^2 \in N \cap Q$. Questi sono 3 punti indipendenti di $\mathbb{C}^3 \cong \Gamma_\Delta \otimes_s \Gamma_\Delta$ esattamente quando $\frac{b}{a} \notin \{1, -1, 0, \infty, \iota, -\iota\}$ (dove è chiaro il senso delle notazioni adottate), cioè sempre, eccetto che nei 6 casi considerati. I casi $\Delta = diag(2,2)$ oppure $\Delta = (4)$ sono analoghi.
Se $\Delta = (q)$, dove q è un numero primo, $q \geq 3$, allora possiamo assumere (a meno di agire con $H(\Delta)$), che $p = (c_0 \neq 0, \dots, c_{q-1})$, dove indichiamo con lo stesso simbolo p un sollevamento in Γ_Δ di p (si noti che $\Gamma_\Delta/\pm \cong Q$) . I sottogruppi isotropici massimali di $K(\Delta) \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$, sono quelli generati da (x,y) , con $(x,y) \neq (0,0)$. Se esistono $\epsilon \in 1^{1/q}$, $\beta \in \mathbb{Z}_q$ tali che

$$(\star) \qquad c_i = c_0 \cdot \epsilon^{\frac{i \cdot (i-1)}{2} + i \cdot \beta} ,$$

si verifica immediatamente che $[p] \in \mathbb{P}\Gamma_\Delta \cong \mathbb{P}Q$ è invariante per un sottogruppo isotropico massimale di $K(\Delta)$. Per $q = 3$ (oppure $q = 5$) è facile verificare che se p non soddisfa $(\star)$ allora l'orbita di $p \otimes_s p$ contiene una base di $\Gamma_\Delta \otimes_s \Gamma_\Delta$.

q.e.d.

B I B L I O G R A F I A

[A] E. Arbarello, *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobian Varieties*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **46** (1987).

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffith, J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, vol. I, Springer (267), 1985.

[AD1] E. Arbarello, C. De Concini, *On a set of equations characterizing Riemann matrices*, Ann. of Math. **120** (1984), 119-140.

[AD2] E. Arbarello, C. DeConcini, *Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces*, Duke Math. J. **54** (1987), 163-178.

[AD3] E. Arbarello, C. De Concini, *Geometrical aspects of the Kadomtsev-Petviashvili equation*, L.N.M. **1451** (1990), 95-137.

[BL] C. Birkenhake, H. Lange, *Complex Abelian Varieties*, Springer (302), 1992.

[De] O. Debarre, *Trisecant lines and Jacobians*, Journal of Algebraic Geometry **1** (1992), 5-14.

[Do] R. Donagi, *The Schottky problem*, L.N.M. **1337** (1989), 84-137.

[Du] Dubrovin, *Theta function and non-linear equation*, Russian Math. Surveys **36, 2** (1981), 11-92.

[F] J. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, L.N.M. **352** (1973).

[GG] B. Van Geemen, Van der Geer, *Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties*, Amer. J. of Math. **108** (1986), 615-642.

[Ke] G.R. Kempf, *Complex abelian varieties and theta functions*, Springer-Verlag, 1991.

[Ko] J. Kollár, *Shafarevich Maps and Automorphic Forms*, Princeton Univ. Press, 1995.

[Kr] I.M. Krichever, *Methods of Algebraic Geometry in the theory of nonlinear equations*, Russian Math. Surveys **32** (1977), 185-213.

[Ma] G. Marini, *A characterization of hyperelliptic Jacobians*, Manuscripta Mathematica **79** (1993), 335-341.

[Mu1] D. Mumford, *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equation*, Proc. Intern. Sympos. Alg. Geometry, Kyoto (1977).

[Mu2] D. Mumford, *On the Equations defining Abelian Varieties*, Invent. Math. **1** (1966), 287-354.

[P] J.M.M. Porras, *Geometric characterizations of Jacobi varieties.*

[S] T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Inventh. Math. **83** (1986), 333-382.

[W] G. Welters, *A criterion for Jacobi varieties*, Ann. Math. **120** (1984), 497-504.