(vers. 9 maggio 2023)

Geometria Proiettiva

Queste note sono rivolte agli studenti del II modulo del corso di Geometria per Scienze dei Media. Affiancano i testi proposti nella pagina web del corso (cfr. Bibliografia) e sono divise in 5 brevi paragrafi:

Come prerequisiti, si assume un minimo di confidenza con l'insiemistica di base, col concetto di funzione, la nozione di relazione d'equivalenza, l'algebra lineare insegnata nel I modulo di un corso di geometria (48 ore frontali).

1 Richiami sugli spazi proiettivi

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale reale[1]. Il *proiettivizzato* di V è lo spazio

$$\mathbb{P}(V) \quad = \quad V \smallsetminus \{\vec{0}\} \Big/ \sim$$

dove "$\sim$" è la relazione d'equivalenza che identifica vettori proporzionali.

- Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ si chiamano *punti*;
- dato un vettore $\vec{v} \in V \smallsetminus \{\vec{0}\}$, si denota con $[\vec{v}]$ la sua classe d'equivalenza in $\mathbb{P}(V)$;
- se $p = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V)$, si dice che è *rappresentato* dal vettore $\vec{v}$.

Si considera uno spazio vettoriale V, lo si priva del vettore nullo, quindi si identificano tra loro vettori proporzionali. Ciò conduce a un nuovo insieme, un insieme i cui elementi sono essi stessi insiemi:

sono le classi di proporzionalità dei vettori non nulli.

Questo significa che un elemento $p \in \mathbb{P}(V)$ è un insieme, precisamente l'insieme di tutti i vettori non nulli proporzionali a un certo vettore $\vec{v}$ non nullo fissato. In questo caso scriveremo $p = [\vec{v}]$, le parantesi quadre denotano la classe di proporzionalità di quanto indicato al loro interno, consentono di distinguere $\vec{v}$ come elemento dello spazio vettoriale V dalla corrispondente classe di proporzionalità in $\mathbb{P}(V)$. Il vettore $\vec{v}$ ed un qualsiasi suo multiplo non nullo $\vec{v}\,'$ individuano lo stesso elemento in $\mathbb{P}(V)$, in formule: $[\vec{v}] = [\vec{v}\,']$. Giusto per ribadire il concetto, detto in termini meno formali, questo significa che un vettore $\vec{v}$ (non nullo) ed un suo qualsiasi multiplo (sempre non nullo), come elementi di $\mathbb{P}(V)$, sono lo stesso elemento.

Definizione 1.2. Uno *spazio proiettivo* è il proiettivizzato di uno spazio vettoriale.

Non si esclude la possibilità che V sia costituito solo dal vettore nullo, in questo caso $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme vuoto. Se $\dim V = 1$, ad esempio $V = \mathbb{R}$, allora $\mathbb{P}(V) = \{\,p\,\}$ è costituito da un solo punto.

Nota. In queste pagine consideriamo esclusivamente spazi vettoriali di dimensione finita, ovvero spazi proiettivi ottenuti proiettivizzando spazi vettoriali di dimensione finita (che sono detti spazi proiettivi di *dimensione finita*). Ad ogni modo, tutto ciò che non coinvolge esplicitamente la dimensione (in particolare gran parte delle definizioni), vale più in generale anche in dimensione non necessariamente finita.

Definizione 1.3. Si definisce la *dimensione* dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ ponendo

$$\dim \mathbb{P}(V) \quad = \quad \dim V - 1\,.$$

- Gli spazi proiettivi di dimensione 1 si chiamano *rette*;
- gli spazi proiettivi di dimensione 2 si chiamano *piani*.

[1] Sebbene consideriamo spazi vettoriali sul campo dei reali $\mathbb{R}$, tutto quello che diremo vale per spazi vettoriali su un campo arbitrario $\mathbb{K}$.

Osservazione 1.4. Se V è uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ è un suo sottospazio vettoriale, allora c'è l'inclusione naturale

$$\mathbb{P}(W) \quad \subseteq \quad \mathbb{P}(V)\,, \qquad [\vec{w}] \;\mapsto\; [\vec{w}] \tag{$\clubsuit$}$$

che alla classe d'equivalenza $[\vec{w}] \in \mathbb{P}(W)$, che è la classe del vettore $\vec{w}$ considerato come vettore in W, associa la classe d'equivalenza $[\vec{w}] \in \mathbb{P}(V)$, che questa volta è la classe di $\vec{w}$ considerato come vettore in V.

Nota. L'osservazione 1.4 ci sta semplicemente dicendo che se W è un sottospazio vettoriale di V, allora $\mathbb{P}(W)$ è in modo naturale un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$:

la funzione descritta in ($\clubsuit$) risulta ben posta nonché iniettiva

(convincersene). È importante comprendere che, a priori, scrivendo $[\vec{w}] \mapsto ...$, si corre il rischio di scrivere qualcosa che possa dipendere dal rappresentante $\vec{w}$ scelto per indicare la corrispondente classe $[\vec{w}]$, dire che "la definizione è ben posta" significa dire che ciò non accade (si veda anche l'avvertenza 1.6 più avanti).

Definizione 1.5. Un *sottospazio proiettivo* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ dove W è un sottospazio vettoriale di V.

- Se $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione n e $\mathbb{P}(W)$ è un suo sottospazio proiettivo di dimensione $n-1$, diciamo che $\mathbb{P}(W)$ è un *iperpiano*.

Nota. Naturalmente, il termine iperpiano non viene usato se la dimensione n dell'ambiente è nota ed è minore o uguale a 3: i punti di una retta proiettiva si continua a chiamarli punti, le rette in un piano proiettivo si continua a chiamarle rette, i piani in uno spazio proiettivo tridimensionale si continua a chiamarli piani!

Avvertenza 1.6. Per indicare i punti di uno spazio proiettivo si usano i vettori che li rappresentano, quando si scrive una definizione o anche una qualsiasi formula che li coinvolge si deve sempre controllare che quello che si sta scrivendo abbia senso, cioè che non dipenda dai rappresentanti utilizzati. Ad esempio, dati due punti $p = [\vec{v}]$ e $q = [\vec{w}]$ di uno spazio spazio proiettivo,

$$\textit{scrivere} \quad p+q \;=\; [\vec{v}]+[\vec{w}] \;:=\; [\vec{v}+\vec{w}] \quad \textit{è semplicemente privo di senso.}$$

Questo perché cambiando il rappresentate usato per indicare il punto p, ad esempio usando il vettore $2\vec{v}$ (essendo $\vec{v}$ e $2\vec{v}$ proporzionali, le corrispondenti classi $[\vec{v}]$ e $[2\vec{v}]$ coincidono, <u>sono</u> entrambe il punto p, lo ribadiamo, sono lo stesso identico punto), la formula in corsivo darebbe $p+q = [2\vec{v}]+[\vec{w}] = [2\vec{v}+\vec{w}]$ che, in generale, non è il punto $[\vec{v}+\vec{w}]$ ottenuto usando i rappresentati considerati inizialmente. Infatti, per l'esercizio 1.8 proposto sotto, se $p \neq q$ i vettori $2\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{v}+\vec{w}$ <u>non</u> sono proporzionali, quindi rappresentano punti differenti del nostro spazio proiettivo, detto in formule risulta

$$[2\vec{v}+\vec{w}] \quad \neq \quad [\vec{v}+\vec{w}]$$

(nonostante $[\vec{v}] = [2\vec{v}]$).

Nota 1.7. Gli spazi proiettivi <u>non</u> sono dotati di una operazione di somma.

Esercizio 1.8. Sia V uno spazio vettoriale, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori non nulli. Provare che se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono proporzionali, allora $2\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{v}+\vec{w}$ non sono proporzionali.

Definizione 1.9. Dato uno spazio proiettivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ e dei punti $p_1, ..., p_k$ diremo che

i) $p_1, ..., p_k$ sono *allineati* se esiste una retta $r \subseteq \mathbb{P}$ che li contiene;

ii) $p_1, ..., p_k$ sono *complanari* se esiste un piano $H \subseteq \mathbb{P}$ che li contiene.

Proposizione 1.10. *Sia* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *uno spazio proiettivo. Si ha che*

$i)$ *dati due punti distinti c'è un'unica retta che li contiene;*

$ii)$ *dati tre punti non allineati c'è un unico piano che li contiene.*

Dimostrazione. Siano $p = [\vec{v}]$, $q = [\vec{u}] \in \mathbb{P}(V)$ due punti. Vista la Definizione 1.1, dire che p e q sono distinti equivale a dire che i due vettori che li rappresentano $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono indipendenti. Dire che c'è un'unica retta contenente p e q è come dire che c'è un unico sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che

$$\dim W = 2 \quad \text{e} \quad \vec{v},\, \vec{u} \in W .$$

Ciò riduce la $i)$ alla seguente affermazione concernente gli spazi vettoriali:

dato uno spazio vettoriale e due suoi vettori indipendenti, c'è un unico sottospazio vettoriale di dimensione 2 che li contiene

(affermazione che assumiamo ben nota a chi ha studiato gli spazi vettoriali).

L'affermazione $ii)$ si dimostra in modo simile: dire che tre punti $p = [\vec{v}]$, $q = [\vec{u}]$, $m = [\vec{z}]$ non sono allineati vuol dire che non c'è una retta che li contiene e, considerato che le rette proiettive sono i proiettificati dei sottospazi vettoriali di dimensione 2 (cfr. Def. 1.5), equivale a dire che i loro rappresentanti $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{z}$ sono indipendenti; d'altro canto, dire che c'è un unico piano contenente p, q, m è come dire che c'è unico sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che

$$\dim W = 3 \quad \text{e} \quad \vec{v},\, \vec{u},\, \vec{z} \in W .$$

Di nuovo, ciò riduce la nostra affermazione ad una affermazione sugli spazi vettoriali:

dato uno spazio vettoriale e tre vettori indipendenti, c'è un unico sottospazio vettoriale di dimensione 3 che li contiene

(affermazione, di nuovo, ben nota). □

Come si può immaginare il risultato si generalizza.

Proposizione 1.11. *Sia* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *uno spazio proiettivo. Dati* $k+1$ *punti non contenuti in alcun sottospazio proiettivo di dimensione* $k-1$, *si ha che c'è un unico sottospazio proiettivo di dimensione* k *che li contiene.*

Dimostrazione. Dire che i punti $p_1 = [\vec{v}_1]$, ..., $p_{k+1} = [\vec{v}_{k+1}]$ non sono contenuti in alcun sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione $k-1$ equivale a dire che i vettori $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_{k+1}$ non sono contenuti in alcun sottospazio vettoriale di V di dimensione k, ovvero che sono indipendenti. Da ciò che abbiamo imparato studiando gli spazi vettoriali, il sottospazio $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}\}$ è l'unico sottospazio vettoriale di V, di dimensione $k+1$, contenente i nostri vettori. Di conseguenza, lo spazio proiettivo

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}\}\big)$$

è l'unico sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ contenente i nostri punti. □

Ogni spazio vettoriale di dimensione $n+1$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^{n+1}$, ciò ci porta a studiare lo spazio proiettivo

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \quad := \quad \mathbb{P}\big(\mathbb{R}^{n+1}\big) .$$

Notazione 1.12. Il punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ rappresentato dal vettore ${}^t(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ viene denotato

$$\big[X_0, \dots, X_n\big] .$$

Inoltre, $X_0, \dots, X_n$ vengono chiamate *coordinate proiettive*.

Nota 1.13. Vista la Definizione 1.1, le coordinate proiettive sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, infatti

$$[X_0, \dots, X_n] \quad = \quad \big[\lambda X_0', \dots, \lambda X_n'\big] \qquad (\lambda \neq 0).$$

Osservazione 1.14. Le coordinate proiettive, essendo definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, "prese singolarmente" non hanno senso. D'altro canto,

- l'annullarsi o meno di una coordinata ha senso;
- i vari quozienti X_i/X_j (se $X_j \neq 0$), hanno perfettamente senso.

Infatti, una coordinata X_i è nulla se e solo se uno (ogni) suo multiplo λX_i (con $\lambda \neq 0$) è nullo. Inoltre, se $(X_0, ..., X_n)$ e $(X_0', ..., X_n')$ rappresentano lo stesso punto, ovvero risulta $(X_0, ..., X_n) = \lambda \cdot (X_0', ..., X_n')$, allora risulta $X_i/X_j = X_i'/X_j'$.

Esempio. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, risulta

$$[3, 1, 0, 4] \quad = \quad [5, \tfrac{5}{3}, 0, \tfrac{20}{3}]$$

(quelli indicati sono due modi differenti, tra gli infiniti modi possibili, di dare lo stesso identico punto). Sottolineiamo che qualsiasi vettore del tipo ${}^t(3\lambda, 1\lambda, 0\lambda, 4\lambda)$, con $\lambda \neq 0$, rappresenta il punto dato. Si osservi che un tale rappresentante avrà necessariamente la terza coordinata nulla.

Esercizio. Rispondere alle domande che seguono (relative agli spazi proiettivi di volta in volta indicati):

- $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, $P = [2, -1, 3]$ e $Q = [-4, 2, -6]$ coincidono?
- $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, $P = [2, -1, 1]$, $Q = [1, 5, -1]$, $R = [3, 4, 0]$ sono allineati?
- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, $P = [2, -1]$, $Q = [1, 5]$, $R = [4, 3]$ sono allineati?
- $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, $P = [2, 1, 1, 1]$, $Q = [1, 2, 3, 4]$, $R = [3, 4, 0, 6]$ sono complanari?

Suggerimento. Tenendo presente la Definizione 1.5 ci si riconduca alle corrispondenti affermazioni concernenti spazi vettoriali.

(Per chi non se ne fosse accorto, gli ultimi due punti di domanda sono provocatori. Si sta chiedendo se tre punti appartenenti ad una retta sono allineati e se tre punti sono complanari, la risposta è certamente si, e non c'è bisogno di fare alcun calcolo!)

Carte Affini

Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. L'uso delle coordinate proiettive consente una visione "globale" del nostro spazio proiettivo, dicendo ciò intendiamo sottolineare il fatto che ogni punto ha le sue brave coordinate proiettive. D'altro canto il fatto che le coordinate proiettive siano definite a meno di un fattore di proporzionalità le rende meno comode e intuitive. Per questa ragione, ma non solo, si introducono le carte affini (dette anche locali). Queste hanno il vantaggio di identificarsi con $\mathbb{R}^n$, oggetto a noi familiare. Il prezzo da pagare è lo svantaggio di non essere definite globalmente ma solo su un aperto del nostro spazio proiettivo (così come, per fare un'analogia, una carta geografica rappresenta solo una porzione della nostra terra), precisamente ogni carta affine è definita sul complementare di un iperpiano (l'iperpiano di equazione $X_i = 0$, cfr. sotto).

Proposizione 1.15. *Consideriamo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, fissiamo un indice $0 \leq i \leq n$. Sia*

$$\mathcal{A}_i \quad := \quad \{ [X_0, ..., X_n] \mid X_i \neq 0 \} \quad \subseteq \quad \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} .$$

La funzione

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathcal{A}_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [X_0, ..., X_n] & \mapsto & \underbrace{\left(\frac{X_0}{X_i}, ..., \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, ..., \frac{X_n}{X_i}\right)}_{(n.b.\text{: saltiamo l'indice } i)} \end{array} \qquad (\clubsuit)$$

è biunivoca. La sua inversa è la funzione $(y_1, ..., y_n) \mapsto [y_1, ..., y_i, 1, y_{i+1}, , y_n]$.

Attenzione! L'argomento della nostra φ_i è il punto $P = [X_0, ..., X_n] \in \mathcal{A}_i$, nella descrizione dell'immagine $\varphi_i(P)$ data nell'enunciato compaiono le varie coordinate proiettive $X_0, ..., X_n$. Come già osservato, le coordinate proiettive non hanno senso se prese singolarmente, ma i quozienti indicati in $(\clubsuit)$ hanno perfettamente senso (cfr. Oss. 1.14). Per riassumere, nonostante abbiamo usato la $n+1$-pla $X_0, ..., X_n$ per definire $\varphi_i(P)$, abbiamo che l'enunciato formulato ha perfettamente senso.

Dimostrazione. Per ragioni tipografiche, e di chiarezza, concentriamoci sulla carta $\mathcal{A}_0$. Il generico punto di $\mathcal{A}_0$, il punto $p = [X_0, ..., X_n]$, con $X_0 \neq 0$, ha un unico rappresentante con $X_0 = 1$ (ottenuto dividendo per X_0 il rappresentante $[X_0, ..., X_n]$), chiamiamolo $[1, y_1, ..., y_n]$. Ciò premesso possiamo scrivere φ_0 nella forma

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_0 : & \mathcal{A}_0 := & \{ [1, y_1, ..., y_n] \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & p = [1, y_1, ..., y_n] & \mapsto & (y_1, ..., y_n) \end{array}$$

che, per l'unicità del rappresentante del tipo $[1, y_1, ..., y_n]$, è una funzione biunivoca con inversa $(y_1, ..., y_n) \mapsto [1, y_1, ..., y_n]$. Ciò conclude la dimostrazione.

(Naturalmente, il caso delle altre carte locali è assolutamente identico, cambia solo la posizione dove compare "1"). □

Definizione 1.16. Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

- Le varie funzioni

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathcal{A}_i := \{ [X_0, ..., X_n] \mid X_i \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [X_0, ..., X_n] & \mapsto & \left(\frac{X_0}{X_i}, ..., \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, ..., \frac{X_n}{X_i}\right) \end{array}$$

vengono chiamate *carte affini* (sono dette anche *carte locali*);

- per abuso di linguaggio, il termine carta affine può riferirsi anche all'insieme $\mathcal{A}_i$;
- le coordinate $y_1, ..., y_n$ di $\mathbb{R}^n$ vengono chiamate *coordinate affini* della carta $\mathcal{A}_i$;
- i punti $[X_0, ..., X_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con $X_i = 0$ vengono chiamati *punti all'infinito* di $\mathcal{A}_i$ ($n.b.$: sono esattamente i punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ che non appartengono ad $\mathcal{A}_i$).

Nota. Visto com'è definita φ_i si ha

$$(y_1, ..., y_n) \quad = \quad \left(\tfrac{X_0}{X_i}, ..., \tfrac{X_{i-1}}{X_i}, \tfrac{X_{i+1}}{X_i}, ..., \tfrac{X_n}{X_i} \right).$$

Esempio 1.17. Nel caso della retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ abbiamo due carte affini:

$$\begin{array}{llll} \varphi_0 : & \mathcal{A}_0 := \{ [X_0, X_1] \mid X_0 \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \qquad [X_0, X_1] & \mapsto & \frac{X_1}{X_0} =: z \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 : & \mathcal{A}_1 := \{ [X_0, X_1] \mid X_1 \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \qquad [X_0, X_1] & \mapsto & \frac{X_0}{X_1} =: w \end{array}$$

Osserviamo che risulta $z = 1/w$. Osserviamo peraltro quanto segue:

- il punto $[0, 1]$ è l'origine per la carta $\mathcal{A}_1$ ed il punto all'infinito per la carta $\mathcal{A}_0$;
- il punto $[1, 0]$ è l'origine per la carta $\mathcal{A}_0$ ed il punto all'infinito per la carta $\mathcal{A}_1$.

Infine osserviamo che avremmo potuto (e possiamo) scrivere

$$\mathcal{A}_0 = \{ [1, z] \mid z \in \mathbb{R} \}, \qquad \varphi_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [1, z] \mapsto z ;$$

e

$$\mathcal{A}_1 = \{ [w, 1] \mid w \in \mathbb{R} \}, \qquad \varphi_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [w, 1] \mapsto w .$$

Esempio 1.18. Nel caso del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ abbiamo tre carte affini:

$$\begin{array}{llll} \varphi_0 : & \mathcal{A}_0 := \{ [X_0, X_1, X_2] \mid X_0 \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \qquad [X_0, X_1, X_2] & \mapsto & \left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0} \right) =: (x, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 : & \mathcal{A}_1 := \{ [X_0, X_1, X_2] \mid X_1 \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \qquad [X_0, X_1, X_2] & \mapsto & \left(\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1} \right) =: (h, k) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \varphi_2 : & \mathcal{A}_2 := \{ [X_0, X_1, X_2] \mid X_2 \neq 0 \} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \qquad [X_0, X_1, X_2] & \mapsto & \left(\frac{X_0}{X_2}, \frac{X_1}{X_2} \right) =: (z, w) \end{array}$$

Di nuovo, possiamo scrivere

$$\mathcal{A}_0 = \{ [1, x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \}, \qquad \varphi_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [1, x, y] \mapsto (x, y) ;$$

$$\mathcal{A}_1 = \{ [h, 1, k] \mid h, k \in \mathbb{R}^2 \}, \qquad \varphi_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [h, 1, k] \mapsto (h, k) ;$$

$$\mathcal{A}_2 = \{ [z, w, 1] \mid z, w \in \mathbb{R}^2 \}, \qquad \varphi_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [z, w, 1] \mapsto (z, w) .$$

L'ampliamento proiettivo di $\mathbb{R}^n$

Come abbiamo visto, la nozione di spazio proiettivo è una nozione astratta (in verità, come qualsiasi altra nozione in matematica, anche la più familiare). Così com'è stato definito uno spazio proiettivo sembra uno strano oggetto, un oggetto i cui elementi sono classi di proporzionalità di vettori, ci si può chiedere perché lo si introduca. Una risposta a questa domanda che fosse soddisfacente sarebbe molto articolata e arriverebbe lontano, noi ci accontentiamo di illustrare il fatto che il concetto di spazio proiettivo è ciò cui si arriva partendo da uno spazio affine e volendo esprimere in senso formale l'idea intuitiva di "andare all'infinito" (qualsiasi cosa ciò possa significare)! In questa sezione ci occupiamo di questo aspetto.

Per cominciare abbiamo bisogno di fare un passo indietro, tornare a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ ed alle carte affini. Dunque, consideriamo lo spazio proiettivo

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \quad := \quad \mathbb{P}\big(\mathbb{R}^{n+1}\big)$$

e le relative coordinate proiettive $X_0, ..., X_n$ (cfr. Notazione 1.12). Una qualunque carta affine

$$\mathcal{A}_i \;:=\; \big\{\, [X_0, ..., X_n] \;\big|\; X_i \neq 0 \,\big\}$$

ha tre peculiarità sulle quali ci vogliamo concentrare:

- esaurisce quasi tutto il nostro $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, le mancano solo i punti $[X_0, ..., X_n]$ con $X_i = 0$;
- ogni punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è limite di punti in $\mathcal{A}_i$ (questo aspetto lo approfondiremo);
- $\mathcal{A}_i$ si identifica con il più familiare $\mathbb{R}^n$ (cfr. Proposizione 1.15).

Tutto ciò suggerisce di ribaltare il punto di vista: vedere lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ come *ampliamento* di $\mathbb{R}^n$, cioè come spazio ottenuto partendo da $\mathbb{R}^n$ e aggiungendo ad esso dei punti, che verranno detti punti all'infinito (cosa che a posteriori risulterà coerente con la terminologia introdotta all'ultimo punto della Definizione 1.16).

Definizione 1.19. L'*ampliamento proiettivo* $\mathbb{P}$ di $\mathbb{R}^n$ è, come insieme,

l'unione insiemistica dello spazio affine $\mathbb{R}^n$ e delle "direzioni" nello stesso $\mathbb{R}^n$

I punti aggiunti a $\mathbb{R}^n$, ossia le direzioni, vengono chiamate *punti all'infinito* (mentre i punti di $\mathbb{R}^n$ li chiamiamo punti al finito di $\mathbb{P}$).

Nota. Molti autori chiamano i punti al finito *punti propri* ed i punti all'infinito *punti impropri* (a me non piace questa terminologia).

Inciso. Mettiamoci in uno spazio affine. Una direzione è ciò che si intende per "direzione" nel linguaggio comune come pure in Fisica. Tecnicamente, in termini matematici, una *direzione* è una classe di parallelismo di rette: due rette del nostro spazio affine si dichiarano equivalenti se sono parallele, in questo modo si introduce una relazione di equivalenza sull'insieme di tutte le rette; il quoziente di quest'insieme per la relazione appena introdotta è, per definizione, l'insieme delle direzioni. Equivalentemente, una direzione è un fascio di rette parallele. Naturalmente, per ribadire il concetto, una retta determina una direzione, due rette rappresentano la stessa direzione se e solo se sono parallele.

Secondo la Definizione 1.19, l'ampliamento proiettivo $\mathbb{P}$ è una unione astratta di due cose che sembra c'entrino poco o nulla l'una con l'altra, infatti si mettono nello stesso calderone (il nostro $\mathbb{P}$) sia punti che direzioni! Di seguito daremo un senso a tutto ciò:

> vedremo che questo strano insieme è in naturale corrispondenza biunivoca con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ così come introdotto nella Definizione 1.1 (con $V = \mathbb{R}^{n+1}$) e attraverso questa corrispondenza capiremo che i punti in più, cioè le direzioni, in un certo senso non sono altro che ciò che si ottiene prendendo un punto e portandolo "lontano", all'infinito (qui da intendersi nel senso intuitivo del termine).

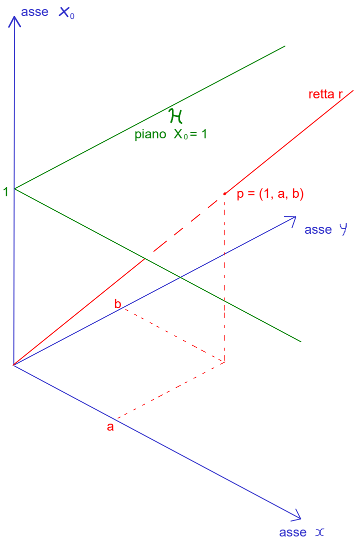
Per illustrare la cosa, ci concentriamo sul caso del piano proiettivo $(n = 2)$.

caso $n = 2$

Premessa. Le rette in $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine, in quanto univocamente individuate dalla loro direzione, corrispondono alle classi di proporzionalità di vettori non nulli, ossia ai punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ introdotto con la Definizione 1.1. In sintesi:

$$\text{“rette in } \mathbb{R}^3 \text{ per l'origine”} \quad \xleftrightarrow{1:1} \quad \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \qquad (\spadesuit)$$

Ora passiamo a identificare l'ampliamento proiettivo $\mathbb{P}$ (Def. 1.19) col piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.



Consideriamo $\mathbb{R}^3$, con coordinate X_0, x, y.

Il piano $\mathbb{R}^2$ lo identifichiamo col piano $X_0 = 1$ (il nostro ampliamento proiettivo $\mathbb{P}$ sarà l'ampliamento di questo piano, che chiameremo $\mathcal{H}$).

Ad ogni retta di $\mathbb{R}^3$ (passante per l'origine) vogliamo associare un punto di $\mathbb{P}$, distinguiamo due possibilità:

$i)$ alla retta r generata dal vettore ${}^t(1, a, b)$ associamo la sua intersezione con il piano $X_0 = 1$ (il punto p della figura);

$ii)$ alla retta generata dal vettore ${}^t(0, \alpha, \beta)$ (con α, β non entrambi nulli), che è una retta parallela al piano $X_0 = 1$ (non lo interseca), associamo la sua "direzione", cioè la classe di proporzionalità $[\alpha, \beta]$ (che è un elemento di $\mathbb{P}$, cfr. Inciso sopra).

Abbiamo messo in corrispondenza biunivoca le rette in $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine (ovvero, vista la premessa, il piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$) col nostro strano insieme $\mathbb{P}$ della Definizione 1.19 (specificatamente con l'ampliamento proiettivo del piano $\mathcal{H} : X_0 = 1$).

In formule (tenendo conto del fatto che il piano $X_0 = 1$ si identifica con $\mathbb{R}^2$), abbiamo

$$\begin{array}{ccccl} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = & \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P} = & \text{“ampliamento proiettivo di } \mathbb{R}^2\text{”} \\ & [1, a, b] & \mapsto & & (a, b) \\ & [0, \alpha, \beta] & \mapsto & & \text{“direzione } (\alpha, \beta)\text{”} \end{array} \qquad (\clubsuit)$$

La retta r è la retta passante per l'origine o di $\mathbb{R}^3$ ed il punto $p = (1, a, b) \in \mathbb{R}^3$. Ora, facciamo variare la retta r, consideriamo la famiglia di rette $\{r_\lambda\}$ dipendente dal parametro λ, con r_λ di equazioni parametriche

$$r_\lambda : \quad (X_0, x, y) = \big(t, \ t \cdot (a + \lambda\alpha), \ t \cdot (b + \lambda\beta)\big)$$

(essendo α e β non entrambi nulli, nonché fissati) e facciamo alcune osservazioni:

$i)$ ogni retta r_λ passa per l'origine (quella data è una famiglia di rette per l'origine);

$ii)$ $r_0 = r$ (per $\lambda = 0$ si ottiene la retta r);

$iii)$ r_λ interseca il piano $X_0 = 1$ nel punto
$$p_\lambda := (1, \ a + \lambda\alpha, \ b + \lambda\beta) \in \mathbb{R}^3$$

$iv)$ per λ molto grande, la retta r_λ è quasi orizzontale e, per λ che va all'infinito, converge alla retta passante per o ed il punto $(0, \alpha, \beta)$, retta che chiameremo r_∞.

Tutto ciò, in particolare il punto $iv)$, dà un senso geometrico alle scelte fatte, ovvero alla corrispondenza $(\clubsuit)$. Infatti, volendo schematizzare

$$r_\lambda \longleftrightarrow p_\lambda \,, \qquad r_\infty \longleftrightarrow \text{“ciò a cui tende } p_\lambda\text{”}$$

ma $p_\lambda \in \mathcal{H}$ si muove (al variare di λ) orizzontalmente lungo la direzione (α, β) allontanandosi sempre di più, in questo senso "va all'infinito"!

Inciso. Per giustificare l'affermazione *iv*), secondo cui la nostra famiglia di rette $\{r_\lambda\}$ converge, per λ che va all'infinito, alla retta r_∞ ivi definita, osserviamo quanto segue:

- si tratta di rette passanti tutte per uno stesso punto (l'origine di $\mathbb{R}^3$);
- pensando lo spazio $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica canonica, la misura dell'angolo tra la retta r_λ e la retta r_∞ converge a 0 (sempre per λ che va all'infinito).

Infatti, essendo r_λ e r_∞ rispettivamente generate dai vettori ${}^t(1,\, a+\lambda\alpha,\, b+\lambda\beta)$ e ${}^t(0,\, \alpha,\, \beta)$ l'angolo tra esse misura

$$\frac{{}^t(1,\, a+\lambda\,\alpha,\, b+\lambda\,\beta)\cdot{}^t(0,\, \alpha,\, \beta)}{\|{}^t(1,\, a+\lambda\,\alpha,\, b+\lambda\,\beta)\|\cdot\|{}^t(0,\, \alpha,\, \beta)\|} \quad = \quad \frac{a\,\alpha+b\,\beta+\lambda\,(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{\cdots}\cdot\sqrt{\cdots}}$$

(lasciamo che si termini il conto ed il calcolo del facile limite per esercizio).

Attenzione! Qui siamo in $\mathbb{R}^3$ e non c'è nulla che ci vieta di dotarlo della metrica canonica e misurare gli angoli. Ciò premesso, a scanso di equivoci dico subito che in ambito proiettivo non ha senso fare considerazioni di metrica Euclidea.

Dico ciò perché in effetti, come visto in (♠), pag. precedente, l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^3$ per l'origine si identifica col piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e, di conseguenza, la *iv*) si traduce in una convergenza in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \underbrace{\big[1,\ a+\lambda\alpha,\ b+\lambda\beta\big]}_{=\,P_\lambda} \quad = \quad \underbrace{\big[0,\ \alpha,\ \beta\big]}_{=\,P_\infty}$$

(limite che calcoliamo nella nota che segue). A questo punto è d'obbligo fare una considerazione:

> Gli spazi proiettivi (Definizione 1.1) sono spazi topologici, in essi il concetto di continuità e la nozione di limite hanno perfettamente senso. Chi non avesse visto almeno un minimo di rudimenti di topologia, avrà comunque visto questi concetti "fatti con gli ϵ e i δ" in un primo corso di Analisi I, ad egli basti sapere quanto segue. Per dare un senso alla nozione di limite tutto quello che serve è la nozione di intorno, nozione che viene ereditata dai rappresentanti nel senso che un intorno di $[\vec{v}]$ è l'insieme di quei punti rappresentati da $\vec{w}$ in un qualche intorno fissato di $\vec{v}$ (essendo un intorno di $\vec{v}\in V$, per definizione, un sottoinsieme di V contenente, rispetto ad una qualsiasi identificazione $V\cong\mathbb{R}^{n+1}$, una sfera di centro $\vec{v}$ e raggio un qualche ϵ). Ciò premesso, diremo che
>
> $$\lim_{\lambda\to\infty} P_\lambda = Q \quad \text{se } \forall\, I \text{ intorno di } Q \text{ si ha che } \exists\, M \text{ tale che } P_\lambda\in I,\ \forall\,\lambda>M\,.$$
>
> Naturalmente mi rendo conto del fatto che liquidare in poche parole gli aspetti topologici concernenti gli spazi proiettivi possa apparire eccessivo!
>
> Mettiamola così, accontentiamoci di accettare, senza approfondirne troppo gli aspetti formali, considerazioni di carattere topologico (nello specifico, concernenti il limite del quale stiamo trattando).

Nella nota che segue proviamo a riassumere.

Nota 1.20. In termini di coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, abbiamo la seguente chiave di lettura (e direi anche semplificazione) di quanto visto. Il punto

$$P_\lambda \ := \ \big[1,\ a+\lambda\alpha,\ b+\lambda\beta\big] \ \in \ \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\,,$$

che nel piano $\mathcal{A}_0\cong\mathbb{R}^2$ ha coordinate $(a+\lambda\alpha,\ b+\lambda\beta)$, per $\lambda\neq 0$ coincide con il punto

$$P_\lambda \ = \ \big[\tfrac{1}{\lambda},\ \tfrac{a}{\lambda}+\alpha,\ \tfrac{b}{\lambda}+\beta\big] \ \in \ \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

e, per λ che va all'infinito, converge al punto

$$P_\infty \ = \ \big[0,\ \alpha,\ \beta\big] \ \in \ \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

(mandando λ all'infinito, le frazioni aventi λ al denominatore spariscono). Fare un limite usando dei rappresentanti di una classe di proporzionalità richiede cautela, ma in questo caso risulta corretto.

Si osservi che, al variare di λ, il punto $p_\lambda = (a+\lambda\alpha,\ b+\lambda\beta)\in\mathcal{A}_0$ descrive una retta, la retta passante per $(a,\,b)$ di direzione $(\alpha,\,\beta)$. Il risultato in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ottenuto portando λ all'infinito[2] non dipende da $(a,\,b)$ ma solo da $(\alpha,\,\beta)$, infatti è $P_\infty = \big[0,\ \alpha,\ \beta\big]$, punto che per questa ragione viene chiamato punto all'infinito (della retta in questione). Da sottolineare che cambiando la coppia $(a,\,b)$ si ottiene una retta parallela alla retta che avevamo, ma come già osservato P_∞ non cambia:

rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito.

[2] Qui intendiamo esattamente quanto descritto nella prima parte di questa nota:

accanto a $p_\lambda\in\mathcal{A}_0$ si considera $P_\lambda\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, quindi si fa il limite $\lim_{\lambda\to\infty} P_\lambda$

Finora abbiamo cercato di giustificare il fatto che lo spazio proiettivo è ciò cui si giunge cercando di "chiudere" lo spazio affine $\mathbb{R}^n$, ovvero cercando di dare un senso all'idea intuitiva di "andare all'infinito". Tutto ciò è sicuramente istruttivo, ma da un punto di vista tecnico, in un certo senso, può essere ignorato! Concludiamo questa sezione con una nozione di ampliamento proiettivo che ha il carattere operativo col quale è più comodo fare, e faremo, i conti e che ha il vantaggio di essere molto più diretta e semplice rispetto a quanto visto.

Definizione (1.19 bis). L'*ampliamento proiettivo* di $\mathbb{R}^n$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dotato dell'inclusione

$$\begin{array}{cccc} \eta_0 : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \\ & (y_1, \dots, y_n) & \mapsto & [1, y_1, \dots, y_n] \end{array}$$

In pratica, secondo la definizione appena introdotta, l'ampliamento proiettivo di $\mathbb{R}^n$ viene visto come lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dove s'è scelto di fissare una carta locale, nello specifico la carta $\mathcal{A}_0$, e s'è scelto di considerare l'identificazione canonica di tale carta con $\mathbb{R}^n$.

Nota. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ può essere considerato come spazio affine ma può essere dotato di ulteriore struttura, ad esempio quella di spazio Euclideo e/o quella di spazio vettoriale. Naturalmente il suo ampliamento proiettivo sarà comunque solamente uno spazio proiettivo, in questo senso perde, come oggetto globale, l'eventuale ulteriore struttura di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, coerentemente con la Definizione 1.19 bis,

> *l'ampliamento proiettivo dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dotato di un sottoinsieme $\mathcal{E}$ che ha della struttura in più: quella di spazio Euclideo.*

Naturalmente, il fatto che non ci sia nulla che vieti al nostro spazio proiettivo di avere un sottoinsieme con della struttura in più non significa che questa struttura possa essere estesa:

la metrica Euclidea di $\mathbb{R}^n$ non si estende a tutto $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$

(la ragione, forse, è evidente: un punto all'infinito dovrebbe avere distanza infinita da un qualsiasi punto al finito).

L'approccio all'ampliamento proiettivo di cui sopra si generalizza al caso dell'ampliamento proiettivo di uno spazio vettoriale astratto V, nello specifico si può dare una definizione che segue:

Definizione (1.19 ter). Sia $\mathcal{X}$ uno spazio affine e/o Euclideo di dimensione n. L'*ampliamento proiettivo* di $\mathcal{X}$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V)$, dotato dell'inclusione data dalla composizione

$$\begin{array}{cccccc} \widetilde{\eta_0} : & \mathcal{X} & \xrightarrow{\mu} & V & \xrightarrow{\eta_0} & \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V) \\ & p & \mapsto & \vec{v} = \overline{p_0 p} & \mapsto & [(1, \vec{v})] \end{array}$$

dove V è lo spazio vettoriale soggiacente lo spazio affine $\mathcal{X}$ e $p_0 \in \mathcal{X}$ è un punto fissato (arbitrario).

Qualche richiamo, precisazione e osservazione:

- Lo spazio vettoriale soggiacente uno spazio affine è lo spazio di cui in [1], Cap. 1, Def. 16.22 ed inoltre, nella notazione ivi adottata, abbiamo $\overline{p_0 p} = \Psi(p_0, p)$. In alternativa, per chi predilige un approccio più "fisico" i vettori di V sono le classi di equipollenza di segmenti orientati $\overline{q\,p}$;
- lo spazio $\mathbb{R} \oplus V$, detto *somma diretta* di $\mathbb{R}$ con V, è il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times V$ dei due insiemi $\mathbb{R}$ e V (che è l'insieme delle coppie $(r, \vec{v})$ con $r \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V$, cfr. [1], Cap. 0, Def. 1.4), dotato della struttura di spazio vettoriale definita da
$$(r_1, \vec{v}_1) + (r_2, \vec{v}_2) \;=\; (r_1 + r_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) \quad , \quad \lambda(r_1, \vec{v}_1) \;=\; (\lambda r_1, \lambda \vec{v}_1)$$
- la funzione μ è biunivoca (ricordiamo che uno spazio affine sul quale si sia scelta un'origine è uno spazio vettoriale, cfr. [1], Cap. 1, Oss. 16.24), di fatto la scelta del punto $p_0 \in \mathcal{X}$ è la scelta che rende $\mathcal{X}$ uno spazio vettoriale;
- la funzione η_0 è iniettiva ma non è suriettiva (idem per la composizione $\widetilde{\eta_0}$), infatti la sua immagine non contiene le classi del tipo $[(0, \vec{v})]$, $\vec{v} \in V \smallsetminus \{\vec{0}\}$.

(naturalmente, dotando $\mathcal{X}$ di un sistema di coordinate che lo identifichi con $\mathbb{R}^n$, questa versione astratta della definizione di ampliamento proiettivo si riduce alla Definizione 1.19 bis).

Nota. Nel caso in cui $\mathcal{X}$ sia uno spazio Euclideo, lo spazio vettoriale V si intende dotato della metrica indotta da μ (che, lo ribadiamo, è biunivoca), cosa che rende la stessa μ metrica (conserva le distanze). Naturalmente, in questo caso, il nostro spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V)$ possiede un sottoinsieme con della struttura in più (l'immagine di $\widetilde{\eta_0}$ è uno spazio Euclideo).

Sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$

Secondo la Definizione 1.5, i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ sono i proiettificati $\mathbb{P}(W)$ dei sottospazi vettoriali di $W \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Questi ultimi possono essere descritti da equazioni cartesiane o parametriche:

$$\begin{cases} a_{0,0}X_0 & + & ... & + & a_{0,n}X_n & = & 0 \\ \vdots \\ a_{m,0}X_0 & + & ... & + & a_{m,n}X_n & = & 0 \end{cases} \qquad \text{(equazioni cartesiane)}$$

$$\begin{cases} X_0 & = & c_{0,0}t_0 & + & ... & + & c_{0,k}t_k \\ \vdots \\ X_n & = & c_{n,0}t_0 & + & ... & + & c_{n,k}t_k \end{cases} \qquad \text{(equazioni parametriche)}$$

Interpretando le coordinate $X_0, ..., X_n$ di $\mathbb{R}^{n+1}$ come coordinate omogenee di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, abbiamo quanto segue:

equazioni del tipo indicato, descrivendo un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^{n+1}$, descrivono il corrispondente proiettificato $\mathbb{P}(W)$.

Ai fini dell'affermazione appena fatta è fondamentale sottolineare che un vettore non nullo $\vec{X} = {}^t(X_0, ..., X_n)$ soddisfa le equazioni cartesiane, ovvero quelle parametriche (per opportuni valori dei parametri), se e solo se le soddisfa ogni suo multiplo. Ciò segue dal fatto che le equazioni sono omogenee. Detto in termini equivalenti, ciò segue dal fatto che un vettore non nullo $\vec{X}$ appartiene a W se e solo se ogni suo multiplo vi appartiene.

Esempio 1.21. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, l'equazione

$$2X_0 - 3X_1 + 5X_2 = 0$$

definisce una retta r (il proiettificato di un piano in $\mathbb{R}^3$). Naturalmente, per ottenere equazioni parametriche è sufficiente risolvere il sistema che definisce r (sistema costituito da una sola equazione):

$$\begin{cases} X_0 = t_0 \\ X_1 = t_1 \\ X_2 = -\frac{2}{5}t_0 + \frac{3}{5}t_1 \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

Intersecando r con la carta $\mathcal{A}_0$ otteniamo

$$\begin{aligned} r \cap \mathcal{A}_0 &= \left\{ [X_0, X_1, X_2] \;\middle|\; X_0 \neq 0,\ 2X_0 - 3X_1 + 5X_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ [1, x, y] \;\middle|\; 2 - 3x + 5y = 0 \right\} \end{aligned}$$

che è una comunissima retta nel piano affine $\mathcal{A}_0$ (identificato con $\mathbb{R}^2$, con coordinate x, y). Naturalmente, se ci fosse stata data la retta $r_0 \subseteq \mathcal{A}_0 \cong \mathbb{R}^2$ di equazione $2 - 3x + 5y = 0$ avremmo potuto considerare la retta r in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di cui sopra ed osservare che $r \cap \mathcal{A}_0 = r_0$. Osserviamo che r ha esattamente un punto in più di r_0, infatti

$$r = r_0 \cup \{[0, 5, 3]\}$$

dove $p = [0, 5, 3]$ è stato ricavato dal sistema

$$\begin{cases} p \notin \mathcal{A}_0 \\ p \in r \end{cases}, \quad \text{cioè dal sistema} \quad \begin{cases} X_0 = 0 \\ 2X_0 - 3X_1 + 5X_2 = 0 \end{cases}$$

(si noti che p è il punto all'infinito di r_0).

Nota. Avremmo potuto anche lavorare con le equazioni parametriche ($\clubsuit$), ottenendo per $r \cap \mathcal{A}_0$ il sistema

$$r \cap \mathcal{A}_0 = \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}t \end{cases}$$

(dato $p \in r$, poiché $p \in \mathcal{A}_0 \iff X_0 \neq 0 \iff t_0 \neq 0$, abbiamo potuto dividere per t_0).

L'esempio della retta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ non ha nulla di speciale, potremmo considerare un sottospazio proiettivo arbitrario di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Giusto per dare un altro esempio, il piano in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni

$$\begin{cases} 2X_0 - 3X_1 + 5X_2 - 4X_3 + X_4 &= 0 \\ X_0 - 7X_1 - 2X_2 + 3X_3 - X_4 &= 0 \end{cases}$$

interseca la carta $\mathcal{A}_0$ (identificato con $\mathbb{R}^4$ con coordinate y_1, y_2, y_3, y_4) nel piano dato dal sistema

$$\begin{cases} 2 - 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 + y_4 &= 0 \\ 1 - 7y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 &= 0 \end{cases}$$

e valgono considerazioni analoghe a quelle viste nel caso della retta.

Di seguito, discutiamo il caso generale (più che altro per fissare degli enunciati precisi).

Sia $\mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Assumiamo che sia definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a_{0,0}X_0 + \ldots + a_{0,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,0}X_0 + \ldots + a_{m,n}X_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Vogliamo vederlo in una carta locale $\mathcal{A}_i$, ovvero intersecarlo con $\mathcal{A}_i$ (che, lo ricordiamo, è un oggetto a noi familiare: si identifica con $\mathbb{R}^n$), ciò significa imporre la condizione $X_i \neq 0$. Per comodità di notazione trattiamo il caso $i = 0$ (la nostra carta affine è la carta $\mathcal{A}_0$). Vista la definizione di $\mathcal{A}_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) \cap \mathcal{A}_0 &= \left\{ [X_0, X_1, \ldots, X_n] \;\middle|\; X_0 \neq 0, \text{ “valgono le equazioni (1)”} \right\} \\ &= \left\{ [1, y_1, \ldots, y_n] \;\middle|\; \text{“}(1, y_1, \ldots, y_n) \text{ soddisfa le equazioni (1)”} \right\} \end{aligned}$$

D'altro canto sostituendo $(1, y_1, \ldots, y_n)$ nelle equazioni (1) si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} a_{0,0} + a_{1,n}y_1 + \ldots + a_{0,n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,0} + a_{1,n}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

che sono le equazioni del generico sottospazio affine di $\mathcal{A}_0$ (ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}_0$ è descritto da equazioni di tale tipo e viceversa). Questo dimostra quanto segue.

Lemma 1.22. *Le intersezioni dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con una carta affine fissata sono (tutti e soli) i sottospazi affini di quella carta affine.*

Tornando al sistema (2), osserviamo che la sua matrice completa ha lo stesso rango della matrice del sistema (1), di conseguenza, se esso è compatibile, si deve avere[3]

$$\dim \left(\mathbb{P}(W) \cap \mathcal{A}_0 \right) = \dim \mathbb{P}(W) \tag{3}$$

Può anche accadere che non sia compatibile, dire ciò equivale a dire che il sistema (1) non ha soluzioni del tipo “$(1, y_1, \ldots, y_n)$”, ovvero non ha soluzioni in $\mathcal{A}_0$, ovvero che $\mathbb{P}(W) \cap \mathcal{A}_0$ è l'insieme vuoto (il che, vista la Definizione 1.16, accade esattamente quando il nostro sottospazio proiettivo è contenuto nell'iperpiano all'infinito per la nostra carta locale, in questo caso la carta $\mathcal{A}_0$).

[3] Nella (3) “dim” ha due significati differenti: a sinistra indica la dimensione di un sottospazio affine di $\mathcal{A}_0 \cong \mathbb{R}^n$, a destra indica la dimensione di un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (cfr. Definizione 1.3).

Nel Lemma che segue enunciamo quanto appena stabilito:

Lemma 1.23. *Se* $\mathcal{A}_i$ *è una carta affine fissata di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *e* $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *è un sottospazio proiettivo, abbiamo la seguente dicotomia:*

i) $\mathbb{P}(W) \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$ *(l'insieme vuoto);*

ii) $\mathbb{P}(W) \cap \mathcal{A}_i$ *è un sottospazio affine di* $\mathcal{A}_i$ *della stessa dimensione di* $\mathbb{P}(W)$.

Il caso i) si verifica se $\mathbb{P}(W)$ *è contenuto nell'iperpiano all'infinito per la carta* $\mathcal{A}_i$, *cioè nell'iperpiano* $\{X_i = 0\}$.

Gli esempi dati finora rientrano nel caso *ii*). Di seguito diamo un esempio che rientra nel caso *i*):

Esempio. Consideriamo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ con coordinate X_0, X_1, X_2, X_3 e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 2X_0 + 2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 0 \\ 5X_0 + 4X_1 - 6X_2 + 8X_3 = 0 \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

Intersecando con la carta $\mathcal{A}_0$ e passando a coordinate affini su $\mathcal{A}_0$

$$x = \tfrac{X_1}{X_0},\ y = \tfrac{X_2}{X_0},\ z = \tfrac{X_2}{X_0}$$

(i.e. per intenderci, procedendo come fatto negli esempi precedenti) si ottiene il sistema incompatibile

$$\begin{cases} 2 + 2x - 3y + 4z = 0 \\ 5 + 4x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

La ragione di ciò sta nel fatto che la retta r è interamente contenuta nell'iperpiano all'infinito della carta $\mathcal{A}_0$, i.e. l'intersezione di r con la carta $\mathcal{A}_0$ è l'insieme vuoto! Di ciò avremmo potuto accorgersene da subito: la combinazione lineare di coefficienti -2 e 1 delle equazioni proiettive $(\clubsuit)$ è proprio l'equazione $X_0 = 0$.

Corollario 1.24. *Dato un sottospazio affine non vuoto* L *di* $\mathcal{A}_i$, *esiste un unico sottospazio proiettivo* $\overline{L} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *tale che*

$$\overline{L} \cap \mathcal{A}_i = L .$$

Dimostrazione. Poter passare dal sistema (2) al sistema (1) garantisce l'esistenza di un sottospazio proiettivo $\overline{L} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ che interseca $\mathcal{A}_0$ esattamente in L. Due sottospazi proiettivi $\overline{L}, \overline{L}' \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ che incontrano $\mathcal{A}_0$ in L hanno la stessa dimensione di L (per il Lemma 1.22), d'altro canto l'intersezione $\overline{L} \cap \overline{L}'$ incontra anch'essa $\mathcal{A}_0$ in L e, anch'essa, deve avere la stessa dimensione di L. Ciò consente di concludere:

$$\dim \overline{L} = \dim \overline{L}' = \dim \overline{L} \cap \overline{L}' \implies \overline{L} = \overline{L}' .$$

□

Definizione 1.25. Dato $L \subseteq \mathcal{A}_i$ (sottospazio affine), il sottospazio proiettivo $\overline{L} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ indicato nel Corollario 1.24 si chiama

chiusura proiettiva di L.

Inciso 1.26. Ci sono varie caratterizzazioni della chiusura proiettiva di $L \subseteq \mathcal{A}_i$. Sebbene queste esulino dagli obiettivi di queste note e richiedano un minimo di rudimenti di topologia (nello specifico, la nozione di continuità e di chiuso), mi sembra d'obbligo menzionarle:

- $\overline{L}$ è l'unione di L e dei suoi punti all'infinito per la carta $\mathcal{A}_i$ (nel senso della sezione precedente);
- $\overline{L}$ è l'unione di L e dei punti che sono limite di punti di L;
- $\overline{L}$ è la chiusura di L (in senso topologico).

Ad ogni modo, non utilizzeremo mai queste caratterizzazioni, per noi $\overline{L}$ **è** e continuerà ad essere l'insieme della Definizione 1.25.

2 Sui sottospazi di uno spazio proiettivo.

In questa sezione vogliamo esportare in ambito proiettivo alcuni risultati di algebra lineare.

Fissiamo una volta per tutte uno spazio proiettivo di dimensione n

$$\mathbb{P} \quad = \quad \mathbb{P}(V)$$

(quindi $\dim V = n+1$).

Lemma 2.1. *Se* $\{S_i = \mathbb{P}(W_i)\}$ *è una famiglia di sottospazi proiettivi di* $\mathbb{P}$ (*questo significa che i* W_i *sono sottospazi vettoriali di* V), *allora*

$$\bigcap S_i \quad = \quad \mathbb{P}\big(\bigcap W_i\big) \tag{$\clubsuit$}$$

Inoltre, questo insieme è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$.

Dimostrazione. Iniziamo con una premessa. L'intersezione di sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale, nel nostro caso l'intersezione $\cap W_i$ è un sottospazio vettoriale di V. Di conseguenza, ha senso considerare il corrispondente proiettivizzato $\mathbb{P}\big(\bigcap W_i\big)$ (che è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$).
Ora proviamo l'uguaglianza ($\clubsuit$). Se A è un punto che appartiene all'insieme a sinistra, cioè a tutti gli S_i, allora un qualsiasi vettore $\vec{v}$ che lo rappresenti appartiene a tutti i W_i, quindi $A \in \mathbb{P}(\cap W_i)$. Viceversa, se $[\vec{v}] \in \mathbb{P}(\cap W_i)$ si ha che $\vec{v} \in \cap W_i$, ovvero $\vec{v}$ appartiene ad ogni W_i, ovvero $[\vec{v}]$ appartiene ad ogni $\mathbb{P}(W_i)$, cioè appartiene ad ogni S_i. □

Sottolineiamo che il Lemma 2.1 ci dice, in particolare, che

"*l'intersezione di sottospazi proiettivi è un sottospazio proiettivo*".

Sintetizzando: sappiamo che l'intersezione di sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale, cioè che la prerogativa di essere un sottospazio vettoriale è "stabile rispetto all'intersezione", se si cava l'origine e si quozienta con la relazione di proporzionalità ciò continua a valere (quindi vale in ambito proiettivo).

Nota. Naturalmente può accadere che l'intersezione degli S_i sia vuota, equivalentemente che l'intersezione dei W_i sia il sottospazio costituito esclusivamente dal vettore nullo.

Definizione 2.2. Dato un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{P}$, poniamo

$$\langle\,\Omega\,\rangle \quad = \bigcap_{S \,\in\, \{\text{sottospazi di } \mathbb{P} \text{ contenenti } \Omega\}} S$$

(i.e. $\langle\,\Omega\,\rangle$ è l'intersezione di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}$ contenenti Ω).

Osservazione. Per il Lemma 2.1 si ha che $\langle\,\Omega\,\rangle$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$. Inoltre, poiché $\langle\,\Omega\,\rangle$ è definito intersecando tutti i sottospazi di $\mathbb{P}$ contenenti Ω, è il "più piccolo" sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ contenente Ω nel senso che segue:

$\langle\,\Omega\,\rangle$ *è contenuto in ogni sottospazio proiettivo contenente* Ω.

Il lemma che segue ci dà una descrizione esplicita di $\langle\,\Omega\,\rangle$.

Lemma 2.3. *Dato un sottoinsieme* $\Omega \subseteq \mathbb{P}$, *posto*

$$\widetilde{\Omega} \;:=\; \big\{\vec{v} \in V \;\big|\; \vec{v} \text{ rappresenta un qualche punto } A \in \Omega\,\big\}$$

si ha che

$$\langle\,\Omega\,\rangle \quad = \quad \mathbb{P}\big(\mathrm{Span}\{\widetilde{\Omega}\}\big)$$

è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ *contenente* Ω (*ed è contenuto in ogni altro sottospazio proiettivo di* $\mathbb{P}$ *contenente* Ω).

Dimostrazione. Posto $\mathcal{J} = \{\text{sottospazi vettoriali di } V \text{ contenenti } \widetilde{\Omega}\}$ abbiamo

$$\operatorname{Span}\{\widetilde{\Omega}\} \quad = \quad \bigcap_{W \in \mathcal{J}} W$$

(risultato noto di algebra lineare). Proiettivizzando si ottiene

$$\mathbb{P}\Big(\operatorname{Span}\{\widetilde{\Omega}\}\Big) \quad = \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{W \in \mathcal{J}} W\Big) \quad \underset{(\text{Lemma 2.1})}{=} \quad \bigcap_{W \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(W) \quad = \quad \langle\, \Omega \,\rangle$$

dove, essendo i vari W i sottospazi vettoriali di V contenenti $\widetilde{\Omega}$, ovvero i vari $\mathbb{P}(W)$ i sottospazi di $\mathbb{P}$ contenenti Ω, l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di $\langle\, \Omega \,\rangle$. $\square$

Definizione 2.4. Il sottospazio $\langle\, \Omega \,\rangle$ si chiama *sottospazio proiettivo generato da* Ω.

Esercizio 2.5. Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}$. Provare che

$$\langle\, S_1 \cup S_2 \,\rangle \quad = \quad \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Suggerimento. Si verifichi che $W_1 + W_2 = \operatorname{Span}\{W_1 \cup W_2\}$, quindi si utilizzi il Lemma 2.3.

Esercizio 2.6. Si provi che dati un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ ed un punto $A \in \mathbb{P}$ si ha la seguente dicotomia:

- $A \in \langle\, \Omega \,\rangle$, in questo caso $\langle\, \{A\} \cup \Omega \,\rangle = \langle\, \Omega \,\rangle$;
- $A \notin \langle\, \Omega \,\rangle$, in questo caso $\dim\langle\, \{A\} \cup \Omega \,\rangle = \dim\langle\, \Omega \,\rangle + 1$.

Suggerimento. Si passi ai rappresentanti e si osservi che risolvere l'esercizio equivale a provare quanto segue. In uno spazio vettoriale, dati un insieme di vettori M ed un vettore $\vec{v}$, si ha la seguente dicotomia:

- $\vec{v} \in \operatorname{Span}\{\, M \,\}$, in questo caso $\operatorname{Span}\{\, M \cup \{\, \vec{v} \,\} \,\} = \operatorname{Span}\{\, M \,\}$;
- $\vec{v} \notin \operatorname{Span}\{\, M \,\}$, in questo caso $\dim\operatorname{Span}\{\, M \cup \{\, \vec{v} \,\}\} = \dim\operatorname{Span}\{\, M \,\} + 1$.

Un altro risultato che possiamo mutuare immediatamente dai risultati di algebra lineare è la formula di Grassmann:

Proposizione 2.7 (formula di Grassmann proiettiva)**.** *Dati S_1 ed S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}$ si ha*

$$\dim\langle\, S_1 \cup S_2 \,\rangle \quad = \quad \dim S_1 \;+\; \dim S_2 \;-\; \dim(S_1 \cap S_2)\;.$$

Dimostrazione. Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, per i risultati precedenti abbiamo

$$S_1 \cup S_2 \;=\; \mathbb{P}(W_1 + W_2) \quad \text{e} \quad S_1 \cap S_2 \;=\; \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

D'altro canto, per la formula di Grassmann in ambito vettoriale abbiamo

$$\dim\,(W_1 + W_2) \quad = \quad \dim W_1 \;+\; \dim W_2 \;-\; \dim\,(W_1 \cap W_2)\;,$$

quindi

$$\Big[\dim\,(W_1 + W_2) - 1\Big] \quad = \quad \Big[\dim W_1 - 1\Big] \;+\; \Big[\dim W_2 - 1\Big] \;-\; \Big[\dim\,(W_1 \cap W_2) - 1\Big]\;.$$

Poiché, in generale, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1$ (cfr. Definizione 1.3), i quattro valori tra parentesi quadre sono le dimensioni che compaiono nella formula di Grassmann proiettiva. $\square$

Praticamente, la formula di Grassmann in ambito proiettivo segue da quella nota nel caso degli spazi vettoriali e dalla Definizione 1.3. Se W ha dimensione 0 (cioè W è costituito solamente dal vettore nullo), allora $\mathbb{P}(W)$ è l'insieme vuoto. Vista la centralità della Definizione 1.3 nella dimostrazione precedente, se si vuole che la Proposizione 2.7 valga anche quando S_1 ed S_2 sono sghembi, cioè non hanno punti in comune, si deve assumere (e si assume, cfr. Definizione 1.3) la seguente convenzione:

Convenzione 2.8. L'insieme vuoto ha dimensione -1.

Nota 2.9. Come sappiamo, l'unione di due sottospazi vettoriali di V è un sottospazio vettoriale di V se e solo se uno dei due sottospazi contiene l'altro. Lo stesso risultato vale in ambito proiettivo: l'unione di due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ se e solo se uno dei due sottospazi contiene l'altro. (Giusto per ribadire il concetto, sia in ambito vettoriale che proiettivo abbiamo che l'unione di sottospazi non è mai un sottospazio, eccetto che nel caso particolare dove "uno dei due contiene l'altro").

Dato un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{P}$, di fatto abbiamo introdotto lo spazio da esso generato $\langle \Omega \rangle$ come il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}$ contenente Ω (Lemma 2.1 e Lemma 2.3). Naturalmente vale ciò che ci si aspetta:

- $\langle \{A, B\} \rangle$ è la retta per A e B (essendo A e B due punti distinti);
- $\langle \{A, B, C\} \rangle$ è il piano per A, B e C (essendo A, B, C tre punti non allineati);
- $\langle \{A\} \cup r \rangle$ è il piano contenente r passante per A (essendo r una retta ed A un punto non appartenente ad r);
- $\langle r \cup s \rangle$ è $\begin{cases} \text{un piano, se } r \text{ ed } s \text{ sono incidenti} \\ \text{un sottospazio di dimensione } 3, \text{ se } r \text{ ed } s \text{ sono sghembe} \end{cases}$ (essendo r ed s due rette distinte).

(Nulla di nuovo sotto il sole! Due punti distinti generano una retta, che è l'unica retta che li contiene; tre punti non allineati generano un piano, eccetera).

Esercizio 2.10. Si determinino dimensioni e equazioni sia parametriche che cartesiane dei sottospazi proiettivi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}$, generati dall'insieme Ω nei seguenti casi:

a) $\mathbb{P} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \{[3, 0, 2, 1], [0, 0, 0, 1]\}$;

b) $\mathbb{P} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \{[1, 0, 1, 0], [2, 0, 2, 1], [1, 0, 1, 1]\}$;

c) $\mathbb{P} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \{[1, 1, 0, 1]\} \cup r$, dove r è la retta $x_0 + x_2 = x_0 + x_1 - x_3 = 0$;

d) $\mathbb{P} = \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \{r \cup s\}$,
dove r è la retta $x_0 = x_1 = x_2 = x_4$ ed s è la retta $x_0 = x_2 = x_0 + x_1 = x_3$.

e) $\mathbb{P} = \mathbb{P}^9_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \{\{p\} \cup H\}$,
dove p è un punto della carta locale $\mathcal{A}_0$, H è l'iperpiano all'infinito di $\mathcal{A}_0$.

Osservazione 2.11. Supponiamo di avere, in uno spazio proiettivo, due sottospazi proiettivi di dimensioni note. La formula di Grassmann dà una relazione che lega le dimensioni della loro intersezione e dello spazio da essi generato. Un'utile chiave di lettura è che

in geometria proiettiva non esiste il fenomeno del parallelismo

(nota la dimensione dello spazio generato da due sottospazi, è nota anche quella della loro intersezione). In particolare, ad esempio,

- in $\mathbb{P}^2$, due rette distinte si incontrano sempre in un punto;
- in $\mathbb{P}^3$, una retta ed un piano che non la contiene, si incontrano sempre in un punto.

Infatti, in entrambi i casi, viste le ipotesi (le rette sono distinte, il piano non contiene la retta), i due sottospazi generano tutto lo spazio ambiente e, per la formula di Grassmann, la loro intersezione ha dimensione 0 (rispettivamente $1+1-2$ e $1+2-3$), quindi è un punto.

Si noti, ad esempio, che in $\mathbb{R}^2$ le cose vanno diversamente: due rette distinte possono incontrarsi in un punto ma possono anche non incontrarsi affatto (cioè possono essere parallele).

Inciso 2.12. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Poiché $\dim \emptyset = -1$, per la formula di Grassmann 2.7, dati due sottospazi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ risulta

$$\dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle + 1 \quad \leq \quad \dim S_1 + 1 + \dim S_2 + 1 \qquad (\clubsuit)$$

(e varrà l'uguaglianza se e solo risulta $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, i.e. i due sottospazi hanno intersezione vuota, nel qual caso diremo che sono *sghembi*). Considerando un terzo sottospazio, chiamiamolo S_3, applicando di nuovo per la formula di Grassmann troviamo

$$\begin{aligned} \dim \langle S_1 \cup S_2 \cup S_3 \rangle + 1 \quad &\leq \quad \dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle + 1 + \dim S_3 + 1 \\ &\leq \quad \dim S_1 + 1 + \dim S_2 + 1 + \dim S_3 + 1 \end{aligned}$$

Iterando questo processo, o se preferite per ragioni induttive, dati k sottospazi $S_1, \ldots, S_k$ abbiamo

$$\dim \langle\, S_1, \ldots, S_k \,\rangle + 1 \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{k} \big(\dim S_i + 1\big) \qquad (\spadesuit)$$

Il Lemma seguente caratterizza il caso estremo in cui in $(\spadesuit)$ abbiamo l'uguaglianza.

Lemma 2.13. *Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $S_1, \ldots, S_k$ dei sottospazi. Sia*

$$m \quad = \quad \big(\dim S_1 + \ldots + \dim S_k\big) + k - 1$$

Si ha che

$$\begin{aligned} &\dim \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle \;=\; m \quad \text{(è la massima possibile)} \\ \Longleftrightarrow \quad &\text{ciascuno degli } S_i \text{ ha intersezione vuota con lo spazio generato dagli altri} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il fatto che m sia la dimensione massima possibile dello spazio generato dagli S_i segue dall'Inciso 2.12, $(\spadesuit)$.

Il "$\Longleftrightarrow$" segue da come abbiamo dedotto la formula $(\spadesuit)$, infatti immaginando di aggiungere i sottospazi uno alla volta, al passo i abbiamo che lo spazio generato dei primi i sottospazi è massima (cioè vale $\dim S_1 + \ldots + \dim S_i + i - 1$) se e solo se S_i ha intersezione vuota con lo spazio generato dai precedenti. All'ultimo passo (per $i = m$) abbiamo che

$$\begin{aligned} &\dim \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle \;=\; m \\ \Longleftrightarrow \quad &\text{ciascuno degli } S_i \text{ ha intersezione vuota con lo spazio generato dai precedenti} \end{aligned}$$

D'altro canto, essendo in $(\spadesuit)$ l'ordine dei sottospazi irrilevante, se vale l'uguaglianza in $(\spadesuit)$, l'ultimo sottospazio, che possiamo assumere essere uno quasiasi degli S_i, ha intersezione vuota con lo spazio generato dagli altri. $\square$

3 Proiettività.

Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, ricordiamo che un punto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è una classe di equivalenza

$$A = \left[X_0, \ldots, X_n \right]$$

di vettori non nulli

$${}^t\!\left(X_0, \ldots, X_n \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{\vec{0}\},$$

dove due tali vettori ${}^t(X_0, \ldots, X_n)$ e ${}^t(X'_0, \ldots, X'_n)$ sono equivalenti se sono proporzionali, cioè se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$${}^t\!\left(X_0, \ldots, X_n \right) = \lambda \cdot {}^t\!\left(X'_0, \ldots, X'_n \right)$$

(essendo i due vettori non nulli, la costante λ sarà anch'essa necessariamente non nulla).

Avvertenza. In algebra lineare i vettori di $\mathbb{R}^k$ vengono sempre indicati per colonna, noi rispettiamo questa regola (la piccola t a sinistra di una matrice riga indica la trasposizione, cosa che la rende una matrice colonna). D'altro canto, così come abbiamo sempre fatto e com'è consuetudine, i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ li indichiamo per riga (e tra parentesi quadre). Va da sé che, per convenzione, "le parentesi quadre di un vettore in $\mathbb{R}^k$" includono questo passaggio, per intenderci

$$[2,\ 3] = \left[\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\right] = \text{"classe di equivalenza del vettore } \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\text{"}.$$

Lemma 3.1. *Data una matrice invertibile $M \in M_{n+1,\,n+1}(\mathbb{R})$, la funzione*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \\ & A = [\vec{v}] & \mapsto & B = \left[M \cdot \vec{v} \right] \end{array}$$

è ben definita (essendo $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$).

Dimostrazione. Ci sono due cose da verificare: la prima è che il prodotto $M \cdot \vec{v}$ non dà mai il vettore nullo, per cui rappresenta un punto $B \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$; la seconda è che cambiando il rappresentante $\vec{v}$ del punto A il risultato non cambia, ciò segue dall'identità

$$M \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (M \vec{v}), \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$$

(che essendo $\left[M \cdot \vec{v} \right] = \left[\lambda (M \cdot \vec{v}) \right]$, di fatto ci dice che sostituendo $\vec{v}$ con un suo multiplo non nullo $\lambda \vec{v}$ il risultato B non cambia). $\square$

Definizione 3.2. Una funzione f come nel Lemma 3.1 si chiama *proiettività*.

In altri termini, una funzione $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è una proiettività se esiste una matrice M per la quale risulti

$$f([\vec{v}]) = [M \vec{v}], \quad \forall\ [\vec{v}] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$$

(ribadiamo che una tale M è invertibile, se non lo fosse f non sarebbe definita ovunque).

Lemma 3.3. *Due matrici invertibili M e M' definiscono la stessa proiettività se e solo se sono proporzionali, i.e. esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $M' = \lambda M$.*

Il Lemma ci sta dicendo due cose. La prima è che, data una matrice M invertibile, le matrici M e λM (con $\lambda \neq 0$) definiscono la stessa proiettività f. La seconda è che, viceversa, se due matrici invertibili M e M' definiscono la stessa proiettività, allora si deve avere $M' = \lambda M$, per un qualche valore λ (che sarà automaticamente non nullo).

Dimostrazione. Iniziamo con la parte più facile: se le due matrici M e M' sono proporzionali, e.g. $M' = \lambda M$, allora $M'\vec{v} = \lambda M \vec{v}$. Questi due vettori rappresentano lo stesso punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, in formule $[M'\vec{v}] = [\lambda M \vec{v}]$ e, di conseguenza, le due matrici M e M' definiscono la stessa proiettività.

Il viceversa richiede un po' di lavoro in più. L'ipotesi che M e M' definiscano la stessa proiettività si traduce nell'uguaglianza

$$[M\,\vec{v}] \;=\; [M'\,\vec{v}]\,, \quad \forall\,\vec{v}\,\in\,\mathbb{R}^{n+1}$$

ovvero nella proporzionalità di $M\,\vec{v}$ e $M'\,\vec{v}$. In formule, si traduce nell'uguaglianza

$$M'\,\vec{v} \;=\; \lambda M\,\vec{v} \;\text{ per un qualche } \lambda \;\text{ (che a priori dipende da } \vec{v}\text{).} \qquad (\clubsuit)$$

Per poter affermare che in effetti risulta $M' = \lambda M$ si deve (ed è sufficiente) provare che il coefficiente di proporzionalità λ <u>non</u> dipende dal vettore $\vec{v}$. A tal fine, scriviamo

$$M'\,\vec{v}_1 \;=\; \lambda_1 M\,\vec{v}_1\,, \quad M'\,\vec{v}_2 \;=\; \lambda_2 M\vec{v}_2 \qquad (\spadesuit)$$

e proviamo che $\lambda_1 = \lambda_2$. Il caso dove $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono proporzionali segue dalla linearità. Trattiamo il caso dove $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ siano indipendenti. Sottraiamo all'equazione

$$M'(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \;=\; \lambda_3 M(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$$

le due equazioni in ($\spadesuit$). Così facendo otteniamo l'equazione

$$M'(\vec{v}_1+\vec{v}_2) - M'\,\vec{v}_1 - M'\,\vec{v}_2 \;=\; \lambda_3 M(\vec{v}_1+\vec{v}_2) - \lambda_1 M\,\vec{v}_1 - \lambda_2 M\,\vec{v}_2$$

Per la linearità di M', a sinistra del segno d'uguaglianza abbiamo il vettore nullo, quindi abbiamo l'equazione

$$\vec{0} \;=\; \lambda_3 M(\vec{v}_1+\vec{v}_2) - \lambda_1 M\,\vec{v}_1 - \lambda_2 M\,\vec{v}_2$$

che, per la linearità di M, possiamo riscrivere come

$$\begin{aligned}\vec{0} \;&=\; \lambda_3 M\,\vec{v}_1 + \lambda_3 M\,\vec{v}_2 - \lambda_1 M\,\vec{v}_1 - \lambda_2 M\,\vec{v}_2 \\ &=\; (\lambda_3-\lambda_1) M\,\vec{v}_1 + (\lambda_3-\lambda_2) M\,\vec{v}_2 \qquad .\end{aligned}$$

Essendo $M\,\vec{v}_1$ e $M\,\vec{v}_2$ anch'essi indipendenti (ricordiamo che M è invertibile e che stiamo trattando il caso dove $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono indipendenti), si deve avere $\lambda_3-\lambda_1 = \lambda_3-\lambda_2 = 0$, in particolare $\lambda_1 = \lambda_2$ come voluto. $\square$

Di seguito, proponiamo una variante della dimostrazione precedente che ci sembra istruttiva. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione ($\clubsuit$) per M^{-1} troviamo

$$M^{-1}M'\vec{v} \;=\; \lambda\,\vec{v} \qquad \text{(per un qualche } \lambda \text{ che a priori dipende da } \vec{v}\text{).} \qquad (\bigstar)$$

Provare che il valore λ non dipende da $\vec{v}$ equivale a provare che λI (dove I denota la matrice identica) è l'unica matrice che manda ogni vettore in un suo multiplo (infatti, l'equazione ($\bigstar$) ci dice che $M^{-1}M$ manda ogni vettore in un suo multiplo, provare che λI è <u>l'unica</u> matrice con questa proprietà significa provare l'uguaglianza $M^{-1}M = \lambda I$). Una tale matrice, mandando in particolare i vettori della base canonica in loro multipli, deve essere necessariamente diagonale. D'altro canto una matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}\{\lambda_0, ..., \lambda_n\}$ <u>non</u> manda ogni vettore in un suo multiplo a meno che i λ_i siano tutti uguali (per esercizio, convincersene calcolando l'immagine del vettore $e_i + e_j$, avente 1 nei posti i e j e 0 altrove).

Il Lemma 3.3 suggerisce la definizione che segue.

Definizione 3.4. Due matrici M e M' le dichiariamo equivalenti se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $M' = \lambda M$, la classe di equivalenza di una matrice M la denotiamo con $[M]$.

Sottolineiamo che per il Lemma 3.3 due matrici sono nella stessa classe di proporzionalità, i.e. sono equivalenti secondo la definizione appena data, se e solo se definiscono la stessa proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Inciso 3.5. Le trasformazioni lineari invertibili di $\mathbb{R}^{n+1}$, ovvero le matrici invertibili di ordine $n+1$, formano un gruppo, che si denota con $GL_{n+1}(\mathbb{R})$, quozientando con la relazione che identifica matrici proporzionali tra loro si ottiene il cosiddetto *gruppo lineare proiettivo*

$$PGL_{n+1}(\mathbb{R}) \;:=\; \big\{\,[M] \;\big|\; M \in GL_{n+1}(\mathbb{R})\,\big\}$$

essendo $[M]$ la classe di proporzionalità della matrice M, cfr. Definizione 3.4.

(Chi non avesse studiato algebra astratta non si spaventi, non utilizzeremo nulla di teoria dei gruppi, neanche la definizione di gruppo! ...vi basti sapere che si tratta di un insieme i cui elementi possono essere moltiplicati tra loro e, per i nostri scopi, ciò che conoscete sul prodotto tra matrici è più che sufficiente).

Le proprietà più importante concernente le proiettività è che queste conservano i sottospazi proiettivi:

mandano rette in rette, piani in piani, eccetera.

Di seguito, diamo un enunciato generale.

Proposizione 3.6. *Sia* $f : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $[\vec{v}] \mapsto [M\vec{v}]$ *una proiettività e sia* $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *il sottospazio di equazioni parametriche*

$$[X] \quad = \quad [\, t_0\vec{v}_0 + \ldots + t_k\vec{v}_k \,] .$$

Allora $f(\mathbb{P}')$ *è il sottospazio di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *di equazioni parametriche*

$$[X] \quad = \quad [\, t_0\vec{w}_0 + \ldots + t_k\vec{w}_k \,] \,, \qquad \text{dove } \vec{w}_i \; = \; M\,\vec{v}_i \qquad (\clubsuit)$$

(*si noti che questo, come* $\mathbb{P}'$, *è un sottospazio di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *di dimensione* k).

Dimostrazione. Vista com'è definita f, il punto $A = [\, t_0\vec{v}_0 + \ldots + t_k\vec{v}_k \,]$ viene mandato nel punto $B = [\, M \cdot (t_0\vec{v}_0 + \ldots + t_k\vec{v}_k \,) \,]$, essendo l'espressione all'interno delle parentesi quadre esattamente l'espressione in ($\clubsuit$), ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Inciso. A prescindere da come viene dato il sottospazio $\mathbb{P}'$, il fatto che questo venga mandato da f in un sottospazio della stessa dimensione si deduce anche dal principio generale secondo il quale "i risultati di algebra lineare si traducono in analoghi risultati di geometria proiettiva", nello specifico:

> *essendo* M *invertibile, la moltiplicazione per* M *manda sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *in sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *della stessa dimensione; ne segue che, proiettivizzando, i sottospazi proiettivi di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *vengono mandati in sottospazi proiettivi della stessa dimensione.*

(Questo punto di vista si presta bene ad una generalizzazione che vedremo più avanti, cfr. Def. 3.7 e Oss. 3.9).

Esempio. Consideriamo $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $[\vec{v}] \mapsto [M\vec{v}]$ e la retta $r \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} X_0 & = & 4t_0 + 3t_1 \\ X_1 & = & 2t_0 - 7t_1 \\ X_2 & = & -5t_0 + t_1 \end{cases} \quad , \qquad \text{cioè } \left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right] \; = \; \left[\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \right]$$

La retta r, visto che f manda il generico punto $A = [\vec{v}]$ nel punto $B = [M \cdot \vec{v}]$, viene mandata nella retta di equazioni parametriche

$$\left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right] \quad = \quad \left[M \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \right] \quad = \quad \left[\begin{pmatrix} | & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \right]$$

essendo $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ le due colonne del prodotto $M \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, cioè $\vec{w}_1 = M \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\vec{w}_2 = M \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si confronti con l'enunciato della Proposizione).

Voglio insistere su questa proprietà da un punto di vista leggermente differente (ma nella sostanza equivalente), quello delle equazioni cartesiane:

> *se abbiamo dei punti in* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *tra i quali c'è una qualche relazione, tale relazione viene mantenuta tramite* f, *ad esempio, se abbiamo tre o più punti allineati, anche le loro immagini tramite* f *sono punti allineati.*

Esempio: i punti $[\vec{u}] = [1, 0, 5, 2]$, $[\vec{v}] = [2, 1, 0, 1]$, $[\vec{w}] = [3, 1, 5, 3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ sono allineati (a livello di rappresentanti il terzo è la somma dei primi due), applicando f otteniamo i punti $[M\vec{u}]$, $[M\vec{v}]$, $[M\vec{w}]$, che sono anch'essi allineati (a livello di rappresentanti il terzo continua ad essere la somma dei primi due, infatti $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \implies M\vec{w} = M\vec{u} + M\vec{v}$).

Esercizio. Si consideri $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con coordinate omogenee X_0, X_1, X_2. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$\begin{array}{rccc} f \, = \, [M] \; : & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \\ & A = [\vec{v}] & \mapsto & B = [M(\vec{v})] \end{array}$$

la proiettività ad essa associata.

a) Verificare che M è invertibile (quindi definisce effettivamente una proiettività);
b) calcolare le immagini $f(A)$ e $f(B)$ dei punti $A = [1, -1, 2]$, $B = [2, 0, 1]$;
c) verificare che la retta r di equazione $X_0 - 3X_1 - 2X_2 = 0$ è la retta passante per A e B;
d) determinare equazioni cartesiane e parametriche per l'immagine $f(r)$ della retta r.

Tornando alla definizione di proiettività (cfr. Def. 3.2), la definizione si può dare per spazi proiettivi astratti e la si può dare più in generale: non serve che dominio e codominio coincidano né che abbiano la stessa dimensione. Enunciamola:

Definizione 3.7. Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ due spazi proiettivi, una *applicazione proiettiva* è una funzione

$$\begin{array}{cccc} [L]: & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(W) \\ & A = [\vec{v}] & \mapsto & B = \big[L(\vec{v})\big] \end{array}$$

indotta da un'applicazione lineare iniettiva $L: V \longrightarrow W$. Inoltre, nel caso particolare dove dominio e codominio coincidono, i.e. $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$, l'applicazione proiettiva $[L]$ la chiameremo *proiettività* (o anche *trasformazione proiettiva*).

Come nel caso concreto dove dominio e codominio e sono $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (cfr. Lemma 3.1 e Definizione 3.2), anche nel caso astratto nonché più generale la definizione risulta ben posta.

Osservazione 3.8. Se $\dim V = \dim W$, l'iniettività di L implica la suriettività, quindi la biunivocità. Naturalmente, in questo caso la nostra $[L]$ sarà essa stessa biunivoca.

Nota. A riguardo dell'osservazione appena fatta, visto che proiettivizzando si passa dai vettori alle loro classi di proporzionalità, c'è una cosa da capire: un'applicazione lineare iniettiva porta vettori non proporzionali (che quindi rappresentano punti distinti) in vettori anch'essi non proporzionali.

Avvertenza. Nella Definizione 3.7 si richiede che L sia iniettiva. Se non lo fosse, per $\vec{v} \in \ker L$ avremmo $[L(\vec{v})]$ privo di senso (essendoci, tra le parentesi quadre, il vettore nullo). Di conseguenza, almeno così come l'abbiamo scritta, la stessa $[L]$ sarebbe priva di senso. In effetti, per ottenere una funzione che abbia senso, è sufficiente escludere dal dominio il proiettificato del nucleo di L. Questo significa che per un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$ arbitraria (non necessariamente iniettiva), abbiamo una funzione ben definita

$$\begin{array}{cccc} [L]: & \mathbb{P}(V) \smallsetminus K & \longrightarrow & \mathbb{P}(W) \\ & [\vec{v}] & \mapsto & [L(\vec{v})] \end{array}$$

dove $K = \mathbb{P}(\ker L)$, insieme che sappiamo essere un sottospazio proiettivo del nostro $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 3.9. Quanto visto per le proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ si generalizza al caso delle applicazioni proiettive:

le applicazioni proiettive conservano i sottospazi proiettivi.

Infatti, tenendo presente che i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ sono i proiettivizzati dei sottospazi vettoriali, stessa cosa per i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(W)$, quanto affermato segue dal fatto che se $L: V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare iniettiva (come richiesto dalla Definizione 3.7), allora manda sottospazi vettoriali di V in sottospazi vettoriali di W della stessa dimensione.

A questo punto si potrebbe pensare che la strada sia in discesa, che la risoluzione di problemi concernenti le proiettività sia una mera applicazione di ciò che si conosce sulle applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Ad esempio si potrebbe erroneamente credere che, essendo un'applicazione lineare determinata dalle immagini dei vettori di una base del dominio, per dare una proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ basti dare le immagini di $n+1$ punti "indipendenti". Purtroppo non è così. Per illustrare il problema diamo un esempio.

Esempio 3.10. Consideriamo la retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ed i punti

$$A = [1,\, 3]\,, \quad B = [2,\, -1]\,, \quad C = [1,\, 1]\,, \quad D = [-1,\, 2]\,.$$

Le funzioni

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ & [X_0,\, X_1] & \mapsto & \left[\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} g: & \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ & [X_0,\, X_1] & \mapsto & \left[\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}\right] \end{array}$$

mandano entrambe A e B rispettivamente in C e D, cioè

$$f(A) = g(A) = C\,, \quad f(B) = g(B) = D$$

nonostante f e g siano funzioni diverse, ad esempio $f(E) \neq g(E)$ per $E = [1,\, 0]$ (giusto per ribadire quanto osservato, si noti che le due matrici che abbiamo scritto sono palesemente <u>non</u> proporzionali).

Naturalmente, come sappiamo, esiste un'<u>unica</u> applicazione lineare $L:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che, posto

$$\vec{a} = \binom{1}{3}, \quad \vec{b} = \binom{2}{-1}, \quad \vec{c} = \binom{1}{1}, \quad \vec{d} = \binom{-1}{2}$$

soddisfa le condizioni

$$L(\vec{a}) = \vec{c} \quad \text{e} \quad L(\vec{b}) = \vec{d}$$

$\big($che ci dà anch'essa una proiettività $l:\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ soddisfacente $l(A) = C$, $l(B) = D\big)$.
Il problema che abbiamo nel caso proiettivo è che dare una condizione sui rappresentanti è più forte che darla sui punti dello spazio proiettivo, pertanto viene a mancare l'unicità: di proiettività che mandano A in C e B in D ce ne sono molte (infinite)!

Fortunatamente, il Teorema Fondamentale sulle Proiettività 3.15 enunciato poco più avanti ci dice quand'è che una proiettività che mandi certi punti in certi altri punti è univocamente determinata, come vedremo questo Teorema presenta anche il vantaggio di aprire la strada a un piccolo trucco per determinare la proiettività in questione. Per procedere abbiamo bisogno della nozione che segue.

Definizione 3.11. Consideriamo uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ di dimensione n. Diremo che i punti

$$A_1,\ \dots,\ A_k$$

sono in *posizione generale* se comunque si prende un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \{A_1,\ \dots,\ A_k\}$, si ha che $\mathcal{S}$ <u>non</u> è contenuto in alcun sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ di dimensione

$$d \quad = \quad \min\{n-1,\ s-2\}, \tag{$\clubsuit$}$$

dove s denota il numero di punti di $\mathcal{S}$. Detto in altri termini, la dimensione del più piccolo sottospazio contenente $\mathcal{S}$ deve essere la massima possibile, cioè $\min\{n,\ s-1\}$.

Osservazione 3.12. Così come due punti stanno sempre su una retta, tre punti in un piano, si ha che s punti stanno sempre in uno spazio di dimensione $s-1$ e, se lo spazio ambiente ha dimensione n, sono sicuramente contenuti in uno spazio di dimensione $\delta = \min\{n,\ s-1\}$. Ciò premesso, un insieme di punti viene qualificato come insieme di punti in posizione generale se ogni suo sottoinsieme di s punti <u>non</u> è contenuto in uno spazio "più piccolo di quanto debba essere", cioè di dimensione strettamente minore di δ (si confronti con $\clubsuit$). Detto in termini più vaghi, l'idea di fondo è che dei punti presi a caso siano in posizione generale ovvero, ribaltando il punto di vista, l'idea è che un insieme di punti per il quale accade qualcosa di particolare, qualcosa che generalmente non accade (come contenere una terna di punti allineati in un ambiente di dimensione maggiore o uguale a 2), non siano in posizione generale. Questa è la motivazione che sta dietro la scelta dell'uso della locuzione "posizione generale". Vediamo nel dettaglio cosa accade in alcuni casi (di seguito, a sinistra indichiamo lo spazio ambiente):

$\underline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}}$ due o più punti sono in posizione generale se e solo se sono distinti;

$\underline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$ due punti sono in posizione generale se e solo se sono distinti,
tre o più punti sono in posizione generale se e solo se, tra essi, non ci sono terne di punti allineati;

$\underline{\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}}$ due punti sono in posizione generale se e solo se sono distinti,
tre punti sono in posizione generale se e solo se non sono allineati,
quattro o più punti sono in posizione generale se e solo se, tra essi,
non ci sono quaterne di punti contenute in un piano;

$\underline{\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}}$ due punti sono in posizione generale se e solo se sono distinti,
tre punti sono in posizione generale se e solo se non sono allineati,
quattro punti sono in posizione generale se e solo se non sono contenuti in un piano,
cinque o più punti sono in posizione generale se e solo se, tra essi,
non ci sono cinquine di punti contenute in un sottospazio di dimensione 3.

Si osservi che l'essere in posizione generale dipende dall'ambiente. Ad esempio, considerando tre punti, mentre se l'ambiente è una retta questi sono in posizione generale purché distinti, in uno spazio proiettivo di dimensione maggiore si richiede che non siano allineati.

Esercizio 3.13. Si provino le affermazioni scritte nella lista.

Suggerimento. Si provi che aggiungendo un punto ad un insieme, il più piccolo spazio proiettivo che lo contiene cresce, al più, di una dimensione.

Esercizio 3.14. Si provi che, nello spazio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, i punti $[\vec{v}_1]$, ..., $[\vec{v}_k]$ sono in posizione generale se e solo se qualsiasi sottoinsieme σ dell'insieme dei vettori $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_k$ che li rappresentano genera un sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$ la cui dimensione è la massima possibile (che è il minimo tra la dimensione dell'ambiente, cioè $n+1$, ed il numero $s :=$ "numero dei vettori di σ").

Noi siamo interessati al caso dove si hanno $n+2$ punti in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$: i punti $[\vec{v}_1]$, ..., $[\vec{v}_{n+2}]$ sono in posizione generale se e solo se comunque si scelgono $n+1$ punti (cioè se ne scarta uno), questi non sono contenuti in un iperpiano (cioè in un sottospazio proiettivo di dimensione $n-1$). A livello di rappresentanti la condizione data si traduce nella richiesta seguente:

comunque si scelgono $n+1$ vettori tra i vettori $\vec{v}_i$ dati, questi sono indipendenti

(cioè non sono contenuti in un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$ di dimensione n).

Teorema 3.15 (Fondamentale sulle Proiettività)**.** *Si considerino nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ due insiemi ordinati*

$$\{A_1, \ldots, A_{n+2}\} \qquad \text{e} \qquad \{B_1, \ldots, B_{n+2}\}$$

ciascuno costituito da $n+2$ punti in posizione generale. Si ha che

esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *tale che* $f(A_i) = B_i$, $\forall\, i$.

Esempio 3.16. Il Teorema Fondamentale sulle Proiettività ci sta dicendo, in particolare, che esiste un'unica proiettività f del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che manda ordinatamente i punti

$$\mathcal{A} = \{[0,3,0], [2,4,0], [1,3,1], [2,6,1]\}$$

nei punti

$$\mathcal{B} = \{[3,0,3], [1,1,0], [0,2,2], [2,2,2]\}$$

(I due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi di 4 punti in posizione generale, per verificarlo si deve mostrare che in ciascuno di essi non ci sono terne di punti allineati, questa verifica la lasciamo per esercizio).

Più avanti, riprendendo quest'esempio, calcoleremo f (cfr. Esempio 3.19).

Il teorema, che abbiamo voluto enunciare per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, naturalmente vale anche nel caso astratto, ed in effetti non è nemmeno necessario che dominio e codominio coincidano (per quanto l'enunciato si complichi un po' nel caso il codominio abbia dimensione strettamente maggiore di quella del dominio):

Teorema 3.17. *Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ due spazi proiettivi di dimensione n. Dati due insiemi ordinati di punti*

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_{n+2}\} \subseteq \mathbb{P} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{n+2}\} \subseteq \mathbb{P}'$$

ciascuno costituito da $n+2$ punti in posizione generale. Si ha che

esiste un'unica applicazione proiettiva $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ *tale che* $f(A_i) = B_i$, $\forall\, i$.

Inoltre, lo stesso risultato continua a valere nel caso dove $\dim \mathbb{P}' = n' > n$ *a patto di sostituire l'ipotesi su $\mathcal{B}$ con la condizione che segue*:

$$\dim\langle \mathcal{B} \rangle = n, \quad \mathcal{B} \text{ è in posizione generale nell'ambiente } \langle \mathcal{B} \rangle$$

essendo $\langle \mathcal{B} \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{P}'$ generato dall'insieme $\mathcal{B}$ (cfr. Def. 2.2 e Def. 2.4).

Nota. Il fatto che nel caso dove $\dim \mathbb{P}' = n' > n$ si debba modificare l'ipotesi su $\mathcal{B}$ si chiarisce con un esempio: se $\mathcal{P}$ è un piano e $\mathcal{P}'$ è uno spazio di dimensione maggiore di 2, l'insieme $\mathcal{A}$ dovrà essere una quaterna di punti in posizione generale nell'ambiente $\mathbb{P}$, ovvero dovrà essere

una quaterna di punti -contenuta in un piano- ma non contenente terne di punti allineati;

il nostro piano $\mathbb{P}$ dovrà avere come immagine un piano e l'insieme $\mathcal{B}$ dovrà soddisfare anch'esso la condizione evidenziata in corsivo, cioè dovrà essere una quaterna di punti, che generano un piano, non contenente terne di punti allineati (nell'ambiente $\mathbb{P}'$, essendo questo di dimensione maggiore di 2, la locuzione "quaterna in posizione generale" assumerebbe un significato diverso).

Dimostreremo il Teorema Fondamentale sulle Proiettività in due passi distinti:

- daremo un algoritmo costruttivo per la proiettività desiderata (cfr. Algoritmo 3.18);
- proveremo l'unicità della proiettività in questione.

Algoritmo 3.18. Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Siano dati due insiemi di $n+2$ punti in posizione generale

$$\{A_1, \ldots, A_{n+2}\} \qquad \text{e} \qquad \{B_1, \ldots, B_{n+2}\}$$

Le istruzioni che seguono forniscono una matrice M la cui classe $[M] \in PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ definisce una proiettività che manda ordinatamente gli A_i nei B_i.

Passo 1. fissiamo dei vettori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+1}$ che rappresentano gli A_i;

Passo 2. scriviamo $\vec{a}_{n+2}$ come combinazione lineare dei precedenti $\sum_{i=1}^{n+1} c_i\vec{a}_i$ (osserviamo che essendo gli A_i in posizione generale, i vettori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^{n+1}$ ed inoltre i coefficienti c_i sono tutti diversi da zero);

Passo 3. sostituiamo $\vec{a}_i$ con $c_i\vec{a}_i$ (per $i = 1, \ldots, n+1$);

Passo 4. ripetiamo i passi precedenti per l'insieme dei punti B_i.

- Osserviamo che a questo punto abbiamo dei rappresentanti $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+2}$ e $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{n+2}$ per i quali risulta

$$\vec{a}_{n+2} = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{n+1} \qquad \text{e} \qquad \vec{b}_{n+2} = \vec{b}_1 + \ldots + \vec{b}_{n+1}$$

Passo 5. Troviamo una matrice M di ordine $n+1$ che manda i vettori $\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{n+1}$ nei vettori $\vec{b}_1 + \ldots + \vec{b}_{n+1}$. A tal fine osserviamo che dovendo risultare

$$M \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \ldots & \vec{a}_{n+1} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_{n+1} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

si ha

$$M = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_{n+1} \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \ldots & \vec{a}_{n+1} \\ | & & | \end{pmatrix}^{-1}$$

(la notazione è quella solita: le due matrici che abbiamo introdotto hanno per colonne i vettori indicati al loro interno. Ricordiamo che sono matrici invertibili, essendo i vettori $\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_{n+1}$, come pure i vettori $\vec{b}_1 + \ldots + \vec{b}_{n+1}$, indipendenti).

Esempio 3.19. Consideriamo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e le due quaterne di punti

$$\mathcal{A} = \{[0, 3, 0], [2, 4, 0], [1, 3, 1], [2, 6, 1]\}, \quad \mathcal{B} = \{[3, 0, 3], [1, 1, 0], [0, 2, 2], [2, 2, 2]\}.$$

Dopo aver verificato che si tratta di quaterne di punti in posizione generale (ciascuna delle due non contiene terne di punti allineati), con i passi 1 e 2 dell'algoritmo le scriviamo nella forma

$$\mathcal{A} = \{[0, 1, 0], [1, 2, 0], [1, 3, 1], [2, 6, 1]\}, \quad \mathcal{B} = \{[1, 0, 1], [1, 1, 0], [0, 1, 1], [2, 2, 2]\}. \qquad (\clubsuit)$$

Si tratta degli stessi identici punti, solo che questa volta il vettore che rappresenta l'ultimo punto è la somma dei precedenti. A questo punto determiniamo la matrice M come nel *Passo* 5:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove le due matrici A e B sono rispettivamente la matrice dei nuovi rappresentanti dei primi tre punti di $\mathcal{A}$ e quella dei nuovi rappresentanti dei primi tre punti di $\mathcal{B}$, per intenderci, quelli in ($\clubsuit$) (attenzione, come sempre i vettori li scriviamo per colonna).

Lasciamo per esercizio la verifica della correttezza del risultato (i quattro punti di $\mathcal{A}$ vengono mandati ordinatamente nei quattro punti di $\mathcal{B}$).

Dimostrazione (del fatto che l'algoritmo 3.18 funziona: $[M]$ manda gli A_i nei B_i).
Per costruzione risulta $M\vec{a}_i = \vec{b}_i$ per $i = 1, ..., n+1$. D'altro canto

$$M\vec{a}_{n+2} \quad = \quad M\big(\textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\vec{a}_i\big) \quad = \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} M\vec{a}_i \quad = \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\vec{b}_i \quad = \quad \vec{b}_{n+2}\,.$$

Di conseguenza la proiettività

$$f:\ \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\,, \quad f(\vec{v}) \;=\; [M\vec{v}]$$

soddisfa la condizione richiesta $f(A_i) = B_i\,,\ i = 1, ..., n+2$. □

Prima di concludere (dimostrare l'unicità della proiettività f di cui al Teorema Fondamentale sulle Proiettività), facciamo una breve parentisi con la quale introduciamo i *riferimenti proiettivi*, oggetti che come vedremo sono sistemi di riferimento che consentono di identificare una spazio proiettivo astratto $\mathbb{P}$ di dimensione n col familiare spazio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (torneremo su questo aspetto più avanti, cfr. Inciso 3.22).

Definizione 3.20. Dato uno spazio proiettivo astratto $\mathbb{P}$ di dimensione n,

- un sottoinsieme costituito da $n+2$ punti[4] in posizione generale
$$\{E_0, \ ..., \ E_n\,,\ U\}$$
si chiama *riferimento proiettivo*;
- i punti E_i vengono detti *punti fondamentali* ed il punto U viene detto *punto unità*.

Inoltre, l'insieme $\{E_0\,,\ ...,\ E_n\,,\ U\} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, dove

$$E_i \;=\; [0,\ ...,\ \underset{(\text{posto } i)}{1}\ ,\ ...,\ 0]\,, \qquad U \;=\; \underset{(\text{tutti } 1)}{[1\,,\ ...\,,\ 1]}$$

viene chiamato *riferimento proiettivo canonico* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Nota. Visto l'esercizio 3.13 e le definizioni appena date, abbiamo che

- un sistema di riferimento su una **retta** proiettiva è dato da 3 punti distinti, il riferimento canonico di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ è
$$\mathcal{R}_{Can}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \quad = \quad \big\{[1,0]\,,\ [0,1]\,,\ [1,1]\big\}\,;$$
- un sistema di riferimento su un **piano** proiettivo è dato da 4 punti tra i quali non ci sono terne di punti allineati, il riferimento canonico di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è
$$\mathcal{R}_{Can}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \quad = \quad \big\{[1,0,0]\,,\ [0,1,0]\,,\ [0,0,1]\,,\ [1,1,1]\big\}\,;$$
- un sistema di riferimento su uno **spazio proiettivo tridimensionale** è dato da 5 punti senza quaterne di punti su uno stesso piano, il riferimento canonico di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è
$$\mathcal{R}_{Can}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}) \quad = \quad \big\{[1,0,0,0]\,,\ [0,1,0,0]\,,\ [0,0,1,0]\,,[0,0,0,1]\,,\ [1,1,1,1]\big\}\,.$$

Esercizio 3.21. Disegnare:
- la retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ come completamento proiettivo della retta affine $\mathbb{R}$ e individuare i punti del riferimento canonico;
- il piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ come completamento proiettivo del piano affine $\mathbb{R}^2$ e individuare i punti del riferimento canonico.

(In entrambi i casi ci saranno sia dei punti al finito che dei punti all'infinito).

Con l'Algoritmo 3.18 abbiamo provato l'esistenza di una proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ che mandi gli A_i nei B_i, ora siamo pronti per provare l'unicità di una tale proiettività (cosa che conclude la dimostrazione del Teorema 3.15).

[4] Numeriamo i primi $n+1$ punti da 0 a n per ragioni di coerenza con la Notazione 1.12.

Dimostrazione (del Teorema 3.15). Ricordiamo quanto già dimostrato:

esiste una proiettività f che manda gli A_i nei B_i, $i = 1, ..., n+2$.

Per provare l'unicità di una tale proiettività, come spesso accade in questo tipo di situazioni, possiamo ridurci al caso dove sia gli A_i che i B_i sono i punti del riferimento canonico (in particolare coincidono), ovvero a provare che l'identità $\mathcal{I}_d$ è l'unica proiettività che manda i punti del riferimento canonico di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ in se stessi. Infatti, indicando con α la proiettività che manda i punti del riferimento canonico negli A_i, se g è un'altra proiettività che manda gli A_i nei B_i, la composizione

$$h: \quad \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},$$

manda i punti del riferimento canonico in se stessi e, naturalmente,

$$\underset{\text{(da provare)}}{h \quad = \quad \mathcal{I}_d} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha \circ g}_{(=\ f)} \quad = \quad \underbrace{\alpha^{-1} \circ \mathcal{I}_d \circ \alpha \circ g}_{(=\ g)} .$$

Dunque, proviamo che l'identità $\mathcal{I}_d$ è l'unica proiettività che manda i punti del riferimento canonico in se stessi. Una matrice che rappresenti una tale proiettività h, essendo $h(E_i) = E_i$, deve mandare i vari vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$ in loro multipli, quindi deve essere una matrice diagonale non degenere, cioè deve essere una matrice del tipo $\Delta = \operatorname{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ con i λ_i non nulli. D'altro canto posto $\vec{u} = {}^t(1, ..., 1)$, vettore che rappresenta il punto unità U del riferimento canonico, si deve avere $h(U) = U$, ovvero $\Delta\,\vec{u} = \lambda\vec{u}$ per un qualche $\lambda \neq 0$. Da questa relazione segue che i vari λ_i sono tutti uguali a λ, in particolare sono uguali tra loro. Di conseguenza $h = [\Delta] = \mathcal{I}_d$. □

Il passaggio dal Teorema 3.15 al Teorema 3.17 è una questione formale:

Dimostrazione (del Teorema 3.17). Se $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ sono due spazi proiettivi di dimensione n, due isomorfismi $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $\alpha' : V' \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ inducono due proiettività

$$[\alpha]: \ \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \qquad \text{e} \qquad [\alpha']: \ \mathbb{P}' \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$$

(cfr. Def. 3.7). A questo punto, dati due insiemi di punti come nel Teorema 3.17, la composizione

$$\mathbb{P} \xrightarrow{[\alpha]} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow{[\alpha']^{-1}} \mathbb{P}'$$

essendo f la proiettività di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ che manda gli $[\alpha](A_i)$ negli $[\alpha'](B_i)$, sarà una applicazione proiettiva $\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ che manda gli A_i nei B_i (e sarà l'unica applicazione proiettiva soddisfacente tale condizione).

Infine, se $\dim\mathbb{P}' > n$, essendo per ipotesi $\dim\langle\,\mathcal{B}\,\rangle = n$, quanto appena visto ci dice che

c'è un'unica applicazione proiettiva $f: \mathbb{P} \longrightarrow \langle\,\mathcal{B}\,\rangle$ che manda gli A_i nei B_i.

Ciò premesso basterà comporre f con l'inclusione $\langle\,\mathcal{B}\,\rangle \subseteq \mathbb{P}'$. □

Inciso 3.22. Un riferimento proiettivo su uno spazio $\mathbb{P}$ di dimensione n consente di identificare $\mathbb{P}$ col familiare spazio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, l'identificazione sarà data dalla trasformazione proiettiva

$$f: \quad \mathbb{P} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},$$

la cui esistenza e unicità sono garantite dal Teorema 3.17, che manda i punti del nostro riferimento nei punti del riferimento canonico di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Tornando ai riferimenti proiettivi, osserviamo che li incontriamo quando diamo un sottospazio di uno spazio proiettivo in forma parametrica. Ad esempio, nell'ambiente $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ con coordinate standard $X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3$, la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad = \quad t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è la retta in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ data dal riferimento

$$\mathcal{R}(r) \quad = \quad \big\{ \underset{(=E_0)}{[1, 5, -1, 3]},\ \underset{(=E_1)}{[1, 0, 1, 1]},\ \underset{(=U)}{[2, 5, 0, 4]} \big\}$$

infatti: E_0 si ottiene per $[t_0, t_1] = [1, 0]$,
E_1 si ottiene per $[t_0, t_1] = [0, 1]$,
U si ottiene per $[t_0, t_1] = [1, 1]$.

Vale la pena sottolineare che il punto unità ha un suo ruolo, ad esempio la stessa retta r parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad = \quad t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

è la retta in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ data dal riferimento

$$\mathcal{R}(r) \quad = \quad \big\{ \underset{(=E_0)}{[1, 5, -1, 3]},\ \underset{(=E_1)}{[1, 0, 1, 1]},\ \underset{(=U')}{[3, 5, 1, 5]} \big\}$$

(*n.b.*: $[2, 0, 2, 2] = [1, 0, 1, 1]$) ...è cambiato solamente il punto unità! (In un qualche senso, fissati i punti fondamentali $E_0, \dots, E_n$ di un riferimento, scegliere il punto unità è un po' come scegliere "quanto basta" vettori che rappresentano gli E_i).

__**Trasformazioni proiettive e Punti fissi**__

Definizione 3.23. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, consideriamo una trasformazione proiettiva

$$F := [L] \ : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ [\vec{v}] & \mapsto & [L(\vec{v})] \end{array}$$

(essendo $L : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare invertibile). Diciamo che

- $A \in \mathbb{P}$ è un *punto fisso* di F se risulta $F(A) = A$;
- $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ è un insieme *invariante* per F se risulta $F(\Omega) = \Omega$

(ricordiamo che le nostre L ed F sono biunivoche, cfr. Osservazione 3.8).

Avvertenza. Un sottoinsieme di punti fissi è ovviamente invariante, il viceversa in generale non è vero: possiamo avere una retta r che viene mandata in se stessa, quindi invariante, ma i cui punti vengono spostati da F (pur rimanendo sempre in r).

Osservazione 3.24. Nelle ipotesi della Definizione appena data, abbiamo quanto segue:

- se $S = \mathbb{P}(W)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$, allora S è invariante se e solo se W è invariante per L, cioè risulta $L(W) = W$;
- $A = [\vec{v}]$ è un punto fisso se e solo se $[L(\vec{v})] = [\vec{v}]$, cioè se e solo se i vettori $L(\vec{v})$ e $\vec{v}$ sono proporzionali. Detto in altri termini,

$$A = [\vec{v}] \text{ è un punto fisso di } F \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\text{(di autovalore automaticamente non nullo)}}{\vec{v} \text{ è un autovettore per } L}$$

Esercizio 3.25. Nelle ipotesi della Definizione 3.23, provare che se S è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$, allora

$$F(S) = S \quad \text{se e solo se} \quad F(S) \subseteq S$$

(ovviamente il risultato <u>non</u> vale per sottoinsiemi arbitrari, ad esempio se F è la proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ data dalla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ed $\Omega = \{[t, 1] \mid t < 1\}$ si ha $F(\Omega) \subseteq \Omega$, ma non vale l'uguaglianza).

Lemma 3.26. *Sia* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *uno spazio proiettivo,*

$$F : \ \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \quad \textit{una trasformazione proiettiva}$$

Allora, l'insieme

$$\Delta \ := \ \text{“insieme dei punti fissi di } F\text{”}$$

è un'unione finita di sottospazi proiettivi sghembi. Più precisamente:

i) $\quad \Delta = S_1 \cup \ldots \cup S_k \quad$ (*essendo gli* S_i *sottospazi proiettivi di* $\mathbb{P}$, *sghembi tra loro*);

ii) $\quad \dim\langle \Delta \rangle + 1 \ = \ \sum_{i=1}^{k} \big(\dim S_i + 1\big)$

dove $\langle \Delta \rangle$ *denota lo spazio generato dall'insieme* Δ (cfr. Definizioni 2.2 e 2.4).

Nota. La *ii)* ci sta dicendo che i vari S_i sono sghembi in senso forte, cioè ciascuno degli S_i è in posizione sghemba con lo spazio generato da <u>tutti</u> gli altri sottospazi (equivalentemente, gli S_i generano un sottospazio la cui dimensione è la massima possibile, cfr. Inciso 2.12 e Lemma 2.13). Per ribadire quale sia il punto di seguito discutiamo un esempio.

Esempio. Due rette sono sghembe, cioè hanno intersezione vuota, se e solo se generano uno spazio di dimensione 3. Assumiamo di avere due rette sghembe e denotiamo con S lo spazio tridimensionale generato da esse. Una terza retta, può essere sghemba con ciascuna delle prime due presa singolarmente, pur essendo addirittura contenuta in S (in questo caso avremo che le tre rette sono solamente “a due a due sghembe”). D'altro estremo, la terza retta può avere intersezione vuota con lo spazio generato dalle prime due, ed in questo caso le tre rette generano uno spazio di dimensione 5 (la massima possibile): è in questo caso che diciamo che le tre rette sono sghembe in senso forte.

Dimostrazione (del Lemma 3.26). Denotiamo con $L : V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare che rappresenta F.

I punti fissi di F sono i punti rappresentati dagli autovettori di L, di conseguenza l'insieme dei punti fissi è l'unione dei proiettivizzati degli autospazi. Precisamente, se $W_1, \ldots, W_k$ sono gli autospazi di L abbiamo

$$\Delta \quad = \quad \mathbb{P}(W_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}(W_k)$$

(i $\mathbb{P}(W_i)$ sono i nostri S_i). D'altro canto un risultato di algebra lineare ci dice che

autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti,

ovvero che i vari W_i generano un sottospazio di V di dimensione massima, che è la somma delle dimensioni dei W_i (cfr. [1], Cap. I, Teorema 13.9 e Esercizio 16.9). $\square$

Esercizio 3.27. Provare che se S_1 ed S_2 sono sottospazi di punti fissi per F aventi intersezione non vuota, allora anche $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ è un sottospazio di punti fissi.

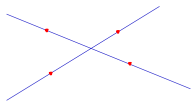
Risolviamo l'esercizio usando due metodi differenti:

Soluzione #1. Per il Lemma 3.26, *i*), l'insieme dei punti fissi per F è un'unione finita di sottospazi sghembi, ciò obbliga S_1 ed S_2 a essere contenuti in uno stesso sottospazio di punti fissi. $\square$

Si noti che non serve usare la parte più difficile del Lemma, cioè la *ii*), ma basta usare la *i*).

Soluzione #2. Per illustrare l'idea, iniziamo col trattare dei casi particolari.

Nel caso dove S_1 e S_2 sono due rette che si intersecano in un punto (quindi che generano un piano H), possiamo trovare 4 punti che, come punti di H sono in posizione generale



Poiché esiste un'unica proiettività che manda i quattro punti in loro stessi, la restrizione di F al piano H deve essere l'identità, ovvero ogni punto di H deve essere fissato da F.

Nel caso di una retta e un piano che si incontrano in un punto (quindi che generano uno spazio S di dimensione 3), possiamo trovare 5 punti in S che, come punti di S, sono in posizione generale (tre nel piano e due nella retta). Quindi concludere in modo analogo al caso delle due rette.

Il caso di due sottospazi S_1 ed S_2 di dimensioni arbitrarie si tratta in modo analogo: posto $S = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$, possiamo scegliere $(\dim S)+2$ punti di S in posizione generale, quindi concludere come nei casi di cui sopra (esistendo un'unica proiettività che fissa i punti scelti, la restrizione di $F|_S$ deve essere l'identità). $\square$

Si noti che l'argomento appena visto sfrutta le ipotesi: se $S_1 \cap S_2$ è vuoto, allora lo spazio S è troppo grande (si ha $\dim S = \dim S_1 + \dim S_2 + 1$). Per intenderci, tornando all'esempio dove S_1 ed S_2 sono due rette, se queste sono sghembe generano uno spazio S di dimensione 3, per poter concludere che la restrizione $F|_S$ è l'identità avremmo bisogno di trovare 5 punti in posizione generale appartenenti alle due rette, ma questo non è possibile (da ciascuna delle due rette ne possiamo scegliere al più 2).

Esercizio 3.28. Sempre nelle ipotesi della Definizione 3.23, provare che

i) se A e B sono due punti fissi (distinti), allora la retta passante per essi è invariante;

ii) se A, B, C sono tre punti fissi allineati (distinti), la retta passante per essi è costituita da punti fissi;

iii) se r ed s sono due rette invarianti (distinte), il loro eventuale punto di intersezione è un punto fisso.

Suggerimenti: ci si ricordi del fatto basilare che una proiettività porta rette in rette;
per la domanda *ii*), si consideri la restrizione di F alla retta in questione, diciamo $r = \mathbb{P}(H)$ quindi ci si interroghi su cosa significa avere tre autovettori per una trasformazione lineare del piano H in se.

In alternativa, sempre per provare la *ii*), si usi il Teorema Fondamentale 3.15 (ricordandosi che, se lo spazio ambiente è una retta, tre punti distinti sono in posizione generale).

Esempio 3.29. La trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha due rette (sghembe) di punti fissi, le rette

$$r_1 = \{ X_2 = X_3 = 0 \} \quad \text{e} \quad r_2 = \{ X_0 = X_1 = 0 \} .$$

La prima è l'asse "x", la seconda è la retta all'infinito del piano "y, z"(la notazione è quella solita: consideriamo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ come completamento proiettivo di $\mathbb{R}^3$ via $[1, x, y, z] \leftrightarrow (x, y, z)$).

Infatti, gli autospazi della matrice M sono i due piani vettoriali rispettivamente di equazioni cartesiane $X_2 = X_3 = 0$ e $X_0 = X_1 = 0$ (attenzione: qui vediamo M come trasformazione lineare dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, questo con coordinate X_0, X_1, X_2, X_3). Proiettivizzando questi due piani si ottengono le rette r_1 ed r_2 che, come dicevamo, sono pertanto costituite da punti fissi.

Esempio 3.30. Abbiamo introdotto le trasformazioni affini di $\mathbb{R}^n$ come composizione di trasformazioni lineari (invertibili) e traslazioni, ovvero come funzioni del tipo

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dove la matrice $(a_{i,j})$ è invertibile. Queste si estendono, in modo unico, a trasformazioni proiettive di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (che vediamo come completamento proiettivo standard di $\mathbb{R}^n$). Quanto all'esistenza di una tale estensione, è sufficiente scriverla esplicitamente:

$$F : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} , \qquad \left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right]$$

dove, al solito, consideriamo $\mathbb{R}^n$ incluso in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ via $(x_1, ..., x_n) \mapsto [1, x_1, ..., x_n]$ e $X_0, \dots, X_n$ denotano le coordinate omogenee standard su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (come al solito $x_i = X_i/X_0$, $X_0 \neq 0$).

L'unicità della nostra estensione è immediata: poiché F estende f e porta rette in rette, il punto all'infinito di una retta $r \subseteq \mathbb{R}^n$ deve andare nel punto all'infinito dell'immagine di r, ciò dà l'unicità di F (ogni punto all'infinito è il punto all'infinito di una qualche retta in $\mathbb{R}^n$).

Nota. Per il Teorema 3.15, ai fini dell'unicità di F basterebbe conoscere veramente molto meno, infatti basterebbe conoscere le immagini di $n+2$ punti in posizione generale, mentre noi conosciamo le immagini di tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ (sono date da f).

Per come è stata costruita F si ha che l'aperto $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, come pure il suo complementare (l'iperpiano all'infinito), è invariante per F. In effetti ciò si evince anche dall'espressione esplicita di F. Si osservi peraltro che una trasformazione proiettiva che fissa l'iperpiano $X_0 = 0$ deve essere necessariamente del tipo indicato, ovvero le (estensioni delle) trasformazioni affini sono le uniche trasformazioni proiettive per le quali l'iperpiano all'infinito è invariante.

Proposizione 3.31. *Sia $F : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ una trasformazione proiettiva, siano inoltre*

$$S_1 = \mathbb{P}(W_1) \quad \textit{ed} \quad S_2 = \mathbb{P}(W_2) \quad \textit{due sottospazi invarianti per } F .$$

Allora,

$$S_1 \cap S_2 \qquad \textit{e} \qquad \langle S_1 \cup S_2 \rangle$$

sono anch'essi sottospazi invarianti.

Naturalmente anche $S_1 \cup S_2$ è invariante (ma non è un sottospazio, è solamente un sottoinsieme invariante, cosa che lo rende meno interessante).

Dimostrazione. L'invarianza di $S_1 \cap S_2$ è un fatto insiemistico (e la geometria proiettiva non c'entra nulla): essendo F biunivoca, l'immagine dell'intersezione è uguale all'intersezione delle immagini, pertanto si deve avere $F(S_1 \cap S_2) = F(S_1) \cap F(S_2) = S_1 \cap S_2$ dove l'ultima uguaglianza segue dal fatti che S_1 ed S_2 sono invarianti per ipotesi.

L'invarianza di $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ segue dall'analoga invarianza di $\operatorname{Span}\{W_1 \cup W_2\}$ per L (si osservi che nella notazione del Lemma 2.3, posto $\Omega = S_1 \cup S_2$, si ha che il corrispondente insieme dei rappresentanti è l'insieme $\widetilde{\Omega} = W_1 \cup W_2 \smallsetminus \{\vec{0}\}$). $\square$

Come abbiamo visto, i punti fissi di una proiettività sono rappresentati da autovettori, per cui il problema di determinarli è un problema di calcolo di autospazi. Quanto ai sottospazi invarianti, nella maggior parte dei casi possono essere determinati da considerazioni concernenti i punti fissi. Vediamo qualche esempio.

Esempio 3.32. Sia f è una proiettività del piano $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con 3 punti fissi isolati A, B, C. Le rette invarianti per f sono le tre rette $r_{A,B}$, $r_{A,C}$, $r_{B,C}$ (ognuna passante per due dei nostri punti).

Dimostrazione. Tre punti fissi isolati non sono allineati, infatti una retta che li contenesse sarebbe una retta di punti fissi (cfr. Eser. 3.28, *ii*); le tre rette indicate sono rette invarianti (cfr. Eser. 3.28, *i*); non possono esserci altri punti fissi perché una matrice 3×3 non può avere più di 3 autospazi; non possono esserci altre rette invarianti perché un'eventuale altra retta invariante s incontrerebbe $r_{A,B}$ in un quarto punto fisso. $\square$

Naturalmente il risultato visto si generalizza:

Esempio 3.33. Se f è una proiettività dello spazio $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ con 4 punti fissi isolati, allora i punti fissi sono in posizione generale ed f ha esattamente 4 piani invarianti (i piani per le 4 terne di punti fissi) e 6 rette invarianti (le rette per le 6 coppie di punti fissi).

Esempio 3.34. Una proiettività f del piano $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ha sicuramente almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Una matrice 3×3 ha almeno un autovalore, ovvero ha almeno un autovettore. $\square$

Esempio 3.35. Sia f è una proiettività (diversa dall'identità) del piano $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con una retta r di punti fissi ed un punto fisso $p \notin r$. Le rette invarianti sono r e tutte le rette passanti per p.

Dimostrazione. Di nuovo per l'esercizio 3.28, *i*), le rette per p ed un punto di r sono invarianti (cioè tutte le rette passanti per p). D'altro canto per ragioni di autospazi non ci possono essere altri punti fissi e, di conseguenza, non ci possono essere altre rette invarianti (un'eventuale retta invariante s non passante per p incontrerebbe una generica[5] retta m passante per p in un punto $q \notin r$ distinto da p, ma un tale punto sarebbe un punto fisso). $\square$

Esempio 3.36. Una rotazione di $\mathbb{R}^2$ di angolo $\theta \neq 0, \pi$ definisce su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ una proiettività senza punti fissi.

[5] Il termine "generica" significa "qualsiasi, ma con qualche eccezione", nello specifico ci basta prendere come retta m una qualsiasi retta che non incontri r proprio nel punto $r \cap s$.

4 Una conica nel piano proiettivo.

Le coniche nel piano affine sono sostanzialmente 3: l'ellisse la parabola e l'iperbole.

Nota. Dico sostanzialmente perché le coniche non sono solo 3. Ci sono quelle degeneri, le coppie di rette distinte o coincidenti, rispettivamente come nel caso dell'equazione $xy = 0$ e dell'equazione $x^2 = 0$, le coppie di rette con un unico punto reale, comune, come nel caso dell'equazione $x^2 + y^2 = 0$, quelle che pur non essendo riducibili, lavorando sul campo dei reali $\mathbb{R}$ (l'alternativa è quella di lavorare sul campo dei complessi $\mathbb{C}$) si riducono all'insieme vuoto, come nel caso dell'equazione $x^2 + y^2 = -1$.

In questa sezione vedremo che ellisse, parabola e iperbole, in ambito proiettivo sono una sola cosa: il contesto proiettivo, più generale, porta a una semplificazione della casistica!

Consideriamo il piano proiettivo

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \quad := \quad \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$$

e, seguendo la Notazione 1.12, denotiamo con X_0, X_1, X_2 le coordinate proiettive. Consideriamo altresì le tre carte affini introdotte nell'esempio 1.18. Mantenendo le stesse notazioni ivi utilizzate consideriamo le tre carte affini

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{[1, x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}, & \varphi_0 : \mathcal{A}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [1, x, y] \mapsto (x, y) ;\\
\mathcal{A}_1 &= \{[h, 1, k] \mid h, k \in \mathbb{R}^2\}, & \varphi_1 : \mathcal{A}_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [h, 1, k] \mapsto (h, k) ;\\
\mathcal{A}_2 &= \{[z, w, 1] \mid z, w \in \mathbb{R}^2\}, & \varphi_2 : \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad [z, w, 1] \mapsto (z, w) .
\end{aligned}$$

Esempio 4.1. Consideriamo, nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, la conica

$$\mathcal{C} \quad := \quad \left\{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \big(X_1\big)^2 - 2X_0X_1 + \big(X_2\big)^2 = 0 \right\}$$

questo significa che $\mathcal{C}$ è il luogo dei punti $p = [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ per i quali la terna (X_0, X_1, X_2) soddisfa l'equazione indicata.

Va osservato che per l'omogeneità dell'equazione che definisce $\mathcal{C}$, che di seguito denotiamo con f, se due terne (X_0, X_1, X_2) e (X_0', X_1', X_2') rappresentano lo stesso punto p, ovvero $(X_0, X_1, X_2) = \lambda \cdot (X_0', X_1', X_2')$, si ha $f(X_0, X_1, X_2) = \lambda^2 \cdot f(X_0', X_1', X_2')$ (si verifichi quanto appena affermato). Di conseguenza, essendo $\lambda \neq 0$, risulta

$$f(X_0, X_1, X_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(X_0', X_1', X_2') = 0 ,$$

sebbene <u>non</u> abbia senso scrivere "$f(p)$" (perché <u>dipende</u> dalla terna scelta per rappresentare il punto p), l'annullarsi o meno di f nel punto p ha perfettamente senso.

Intersecando $\mathcal{C}$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ otteniamo

$$\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{C} \quad = \quad \left\{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \;\middle|\; X_0 \neq 0, \quad \frac{(X_1)^2 - 2X_0X_1 + (X_2)^2}{(X_0)^2} = 0 \right\}$$

(l'aver diviso tutta l'equazione per $\big(X_0\big)^2$ è una scelta arbitraria, avremmo potuto dividere per 75318 o per qualsiasi espressione mai nulla, dividiamo per $\big(X_0\big)^2$ per ragioni di convenienza: al fine di ottenere un'equazione in $\frac{X_1}{X_0}$ e $\frac{X_2}{X_0}$, che sono le coordinate della nostra carta locale $\mathcal{A}_0$).

L'equazione indicata la possiamo riscrivere nella forma

$$\Big(\tfrac{X_1}{X_0} - 1\Big)^2 + \Big(\tfrac{X_2}{X_0}\Big)^2 \quad = \quad 1$$

di conseguenza ricordando la definizione della carta affine φ_0 otteniamo

$$\varphi_0\big(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{C}\big) \quad = \quad \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \}$$

equivalentemente

$$\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{C} \;=\; \{ [1, x, y] \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, \; x, y \in \mathbb{R}^2 \} .$$

Analogamente otteniamo

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \;\middle|\; X_1 \neq 0, \;\; \frac{(X_1)^2 - 2X_0X_1 + (X_2)^2}{(X_0)^2} = 0 \right\}$$

e, di conseguenza,

$$\varphi_1(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}) \;=\; \left\{ (h, k) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - 2h + k^2 = 0 \right\},$$

equivalentemente

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{ [h, 1, k] \;\middle|\; 1 - 2h + k^2 = 0, \; h, k \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Infine

$$\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \;\middle|\; X_2 \neq 0, \;\; \frac{(X_1)^2 - 2X_0X_1 + (X_2)^2}{(X_0)^2} = 0 \right\}$$

e, di conseguenza,

$$\varphi_2(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}) \;=\; \left\{ (z, w) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; w^2 - 2zw + 1 = 0 \right\}.$$

equivalentemente

$$\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{ [z, w, 1] \;\middle|\; w^2 - 2zw + 1 = 0, \; z, w \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

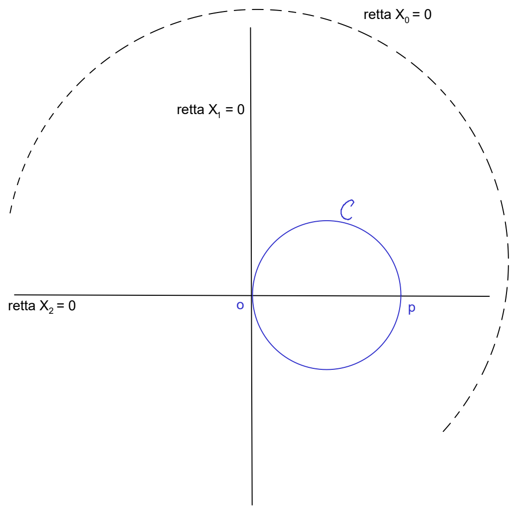
Osserviamo che le equazioni che rappresentano $\mathcal{C}$ nelle tre carte affini sono rispettivamente

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ che è l'equazione di una ellisse,

$1 - 2h + k^2 = 0$ che è l'equazione di una parabola,

$w^2 - 2zw + 1 = 0$ che è l'equazione di una iperbole

(ciò non deve sorprendere troppo, in fin dei conti si tratta di tre oggetti diversi, le tre intersezioni $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}$ e $\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}$, ognuna delle quali peraltro espressa nelle coordinate della carta locale che la riguarda). La ragione di quanto accade si può spiegare con una figura, disegnando $\mathcal{C}$ nella carta affine $\mathcal{A}_0$, e disegnando i punti dove $X_0 = 0$ come punti all'infinito di questa carta affine (retta tratteggiata), abbiamo la seguente figura



(conica $\mathcal{C}$ nella carta $\mathcal{A}_0$)

Nella carta $\mathcal{A}_1$ il punto o <u>non</u> c'è (la retta $X_1 = 0$ è la retta all'infinito per la carta $\mathcal{A}_1$), per questa ragione nella carta $\mathcal{A}_1$ vediamo tutta la conica $\mathcal{C}$ tranne un punto, questa ci appare come una parabola. Nel caso in esame si tratta della parabola di equazione

$$h = \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}$$

(oggetto che "si richiude" in o, il punto all'infinito dell'asse $k = 0$).

Nella carta $\mathcal{A}_2$ i punti o e p <u>non</u> ci sono (la retta $X_2 = 0$ è la retta all'infinito per la carta $\mathcal{A}_2$), nella carta $\mathcal{A}_2$ vediamo tutta la conica $\mathcal{C}$ tranne due punti, questa ci appare come una iperbole (i cui due rami sono, nella figura, le due semicirconferenze sopra e sotto la retta $X_2 = 0$).

Torniamo a ciò che vediamo nella carta $\mathcal{A}_1$, cioè all'espressione

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{\, [h,\, 1,\, k] \;\middle|\; 1 - 2h + k^2 \;=\; 0\,,\ h,\ k \,\in\, \mathbb{R}^2 \,\right\},$$

che riscriviamo nella forma

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{\, \left[\, \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}\,,\ 1\,,\ k \,\right] \;\middle|\; k \,\in\, \mathbb{R} \right\}.$$

Per $k \neq 0$ abbiamo

$$\left[\, \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}\,,\ 1\,,\ k \,\right] \;=\; \left[\, \tfrac{k^2+1}{2\,k^2}\,,\ \tfrac{1}{k^2}\,,\ \tfrac{1}{k} \,\right]$$

che per k che va all'infinito ci restituisce il punto $\left[\, \tfrac{1}{2},\, 0,\, 0 \,\right] \;=\; [\,1,\, 0,\, 0\,]$, che è il punto o.

Questo dovrebbe convincervi, al di là dei conti formali, quelli fatti sopra nelle varie carte locali per intenderci, che la parabola che vediamo nella carta $\mathcal{A}_1$ si richiude all'infinito nel punto o (si riguardi la figura tenendo presente che l'asse verticale, cioè la retta $X_1 \;=\; 0$, è la retta all'infinito per la carta $\mathcal{A}_1$).

Analogamente

$$\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C} \;=\; \left\{\, [z,\, w,\, 1] \;\middle|\; w^2 - 2zw + 1 \;=\; 0\,,\ z,\ w \,\in\, \mathbb{R}^2 \,\right\},$$

da questa ricaviamo[6] $w \;=\; z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, ovvero abbiamo i punti del tipo

$$\left[\, z\,,\ z \pm \sqrt{z^2-1}\,,\ 1 \,\right]\,,\ z \,\in\, \mathbb{R},$$

questi sono i punti del tipo (dividiamo per z)

$$\left[\, 1\,,\ \tfrac{z \pm \sqrt{z^2-1}}{z}\,,\ \tfrac{1}{z} \,\right]\,,\ z \,\in\, \mathbb{R}.$$

Per z che va all'infinito quanto scritto ci restituisce (si calcolino i due limiti) i punti che già conoscevamo:

$$p \;=\; [1,\, 2,\, 0] \qquad \text{e} \qquad o \;=\; [1,\, 0,\, 0]\;.$$

Terminiamo con un'ultima osservazione che ci sembra interessante. Nella carta $\mathcal{A}_0$, le rette tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti o e p sono rispettivamente le rette r ed s di equazioni

$$r\,:\ \{\, x \;=\; 0 \,\} \qquad \text{e} \qquad s\,:\ \{\, x \;=\; 2 \,\}$$

(nella figura, sono le due rette verticali passanti per o e p). In coordinate omogenee, queste due rette hanno equazioni

$$r\,:\ \left\{\, \tfrac{X_1}{X_0} \;=\; 0 \,\right\} \qquad \text{e} \qquad s\,:\ \left\{\, \tfrac{X_1}{X_0} \;=\; 2 \,\right\}$$

pertanto corrispondono alle rette in $\mathbb{P}^2$ di equazioni

$$r\,:\ \{\, X_1 \;=\; 0 \,\} \qquad \text{e} \qquad s\,:\ \{\, X_1 \;=\; 2\,X_0 \,\}\;.$$

Queste, nella carta $\mathcal{A}_2$ hanno equazioni

$$r\,:\ \left\{\, \tfrac{X_1}{X_2} \;=\; 0 \,\right\} \qquad \text{e} \qquad s\,:\ \left\{\, \tfrac{X_1}{X_2} \;=\; 2\,\tfrac{X_0}{X_2} \,\right\}\;.$$

ovvero equazioni

$$r\,:\ \{\, w \;=\; 0 \,\} \qquad \text{e} \qquad s\,:\ \{\, w \,-\, 2z \;=\; 0 \,\}\;.$$

Questi sono esattamente gli asintoti dell'iperbole di equazione

$$w^2 - 2\,z\,w \,+\, 1 \;=\; 0\;,$$

infatti $w^2 - 2\,z\,w \;=\; w \cdot (w - 2z)$. I punti o e p (che non appartengono ad $\mathcal{A}_2$) sono i punti all'infinito dell'iperbole ed i due asintoti sono le tangenti all'iperbole nei suoi due punti all'infinito.

[6] Potremmo ricavare $z \;=\; \frac{w^2+1}{2\,w}$, ma ciò ci costringerebbe ad assumere $w \neq 0$, cosa che non vogliamo fare per "non perderci per strada" il punto o!

5 Matematica della prospettiva

In questo paragrafo,

- introduciamo i concetti di base della matematica della prospettiva.

L'oggetto del nostro studio sono lo spazio $\mathbb{R}^3$, all'occorrenza dotato della metrica Euclidea, ed il suo ampliamento proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ (che, diciamolo subito a scanso di equivoci, non ha né può avere una struttura che estende la struttura Euclidea di $\mathbb{R}^3$). Quest'ultimo, cioè l'ampliamento proiettivo di $\mathbb{R}^3$, è lo strumento giusto con cui affrontare e semplificare la matematica della prospettiva.

Prospettiva

Di seguito studiamo cosa accade "quando si riprende una scena" o "si scatta una fotografia", ovvero studiamo la proiezione dello spazio $\mathbb{R}^3$ su un piano. Fissiamo una volta per tutte le notazioni, che manterremo per l'intero paragrafo.

Notazione 5.1. Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ con coordinate affini x, y, z ed il suo ampliamento proiettivo

$$\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \text{ con coordinate proiettive } X, Y, Z, W, \text{ dove } x = \tfrac{X}{W}, \ y = \tfrac{Y}{W}, \ x = \tfrac{Z}{W}$$

La carta locale $\mathbb{R}^3$, che è la carta di equazione $W \neq 0$, sarà la carta locale cui ci riferiremo. In particolare, coerentemente con la Definizione 1.16, chiameremo

- punti al finito i punti di $\mathbb{R}^3$;
- punti all'infinito i punti appartenenti al piano di equazione $W = 0$ (l'iperpiano all'infinito per la nostra carta locale).

Naturalmente, l'inclusione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è data da

$$\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \quad (x, y, z) \mapsto [x, y, z, 1]$$

Nota. Lavorando in dimensione 3, preferiamo denominare le varie coordinate di $\mathbb{R}^3$ con i classici x, y, z, naturalmente per ragioni di coerenza denotiamo le corrispondenti coordinate proiettive di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ passando alle corrispondenti lettere maiuscole (e introducendo la coordinata W, il cui annullarsi dà i punti all'infinito). Fatte queste scelte, abbiamo altresì scelto di mettere la coordinata W in fondo per ragioni di coerenza con le notazioni standard usate in computer graphics, notazioni che peraltro vengono usate anche nel nostro testo di riferimento [8]).

Proposizione 5.2. *Sia $C \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ un punto ed H un piano, assumiamo $C \notin H$. Consideriamo la proiezione*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{C\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \\ & P & \mapsto & H \cap r_{C,P} \end{array}$$

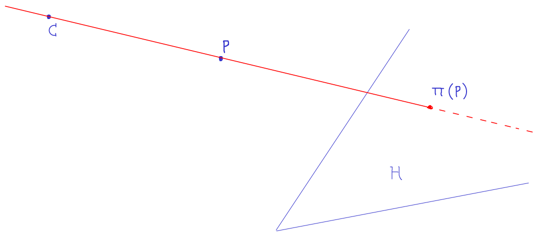
dove $r_{C,P}$ denota la retta passante per C e P. Si ha che π è una proiettività degenere, più precisamente esiste una matrice $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, di rango 3, soddisfacente

$$\pi\Big(P = [X, Y, Z, W]\Big) \quad = \quad \left[\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \right] \qquad (\clubsuit)$$

Nota. Geometricamente, la funzione π prende un punto P (distinto da C) e lo proietta sul piano H:

manda P nel punto in cui la retta r passante per C e P interseca il piano H

(poiché $C \notin H$ per ipotesi, la retta r non è contenuta nel piano H e, di conseguenza, lo incontra esattamente in un punto). Si veda la figura.



Tra poco vedremo come calcolare esplicitamente la matrice M soddisfacente (♣). Ciò naturalmente dimostrerà la Proposizione.

Essendo il nostro spazio proiettivo tridimensionale $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ l'ampliamento proiettivo di $\mathbb{R}^3$ (cfr. Notazione 5.1 all'inizio del paragrafo), la proiezione π, detta anche

prospettiva,

prende nomi differenti a seconda di dove si trovi C e del verificarsi di altre condizioni. Di seguito fissiamo la terminologia adottata.

Definizione 5.3. Sia $C \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ un punto ed H un piano, con $C \notin H$. Assumendo che H non sia il piano all'infinito di $\mathbb{R}^3$, la proiezione π si chiama

i) *proiezione centrale* di centro C e piano di proiezione H, se $C \in \mathbb{R}^3$;

ii) *proiezione parallela*, se C è un punto all'infinito per la carta $\mathbb{R}^3$
(e diremo *di direzione* r, se C è il punto all'infinito della retta r);

iii) *proiezione ortogonale*, se π è la proiezione parallela alla direzione ortogonale ad H
(cioè C è il punto all'infinito delle rette ortogonali ad H).

Naturalmente, nel caso *iii*) stiamo implicitamente assumendo che $\mathbb{R}^3$ abbia la struttura di spazio Euclideo (altrimenti non possiamo parlare di ortogonalità).

Nota. Il caso *i*) è il modello matematico che descrive il caso realistico della ripresa di una scena: il punto C è il punto in cui si trova l'obiettivo della macchina fotografica ed il piano H è il piano della pellicola o del sensore (ortogonale alla direzione dell'obiettivo). Il caso *ii*) ed il sottocaso *iii*) rappresentano situazioni limite dove si porta l'obiettivo all'infinito o comunque sufficientemente lontano dalla scena da riprendere da potersi considerare all'infinito. La nomenclatura ha una chiara giustificazione: in questi ultimi due casi, essendo C all'infinito, le rette $r_{C,\,P}$ (in rosso nella figura mostrata sopra), utilizzate per proiettare i vari punti $P \in \mathbb{R}^3$, per questa ragione dette anche *raggi di proiezione*, sono parallele. Per ulteriori descrizioni e considerazioni rimandiamo a [8], Cap. 16.

Lemma 5.4. *Nelle notazioni della Proposizione 5.2 abbiamo che*

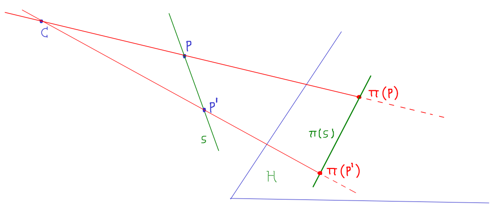
π *manda rette non passanti per il punto* C *in rette*

più precisamente, fissata una retta s *non passante per* C *si ha*

$$\pi(s) \quad = \quad K_{s,\,C} \cap H$$

dove $K_{s,\,C} = \langle\, s \cup \{C\} \rangle$ *denota il piano contenente* r *passante per* C.

Dimostrazione. Segue immediatamente da come è definita π (si veda la figura):



Le rette passanti per C ed un punto di s (in rosso) ricoprono ("spazzano") il piano $K_{s,\,C}$. Di conseguenza, vista la definizione di π si ha

$$\pi(s) \;=\; K_{s,\,C} \cap H.$$

Volendo essere più formali ed evitare il ricorso a un disegno, abbiamo le due inclusioni

$$\text{“}\,\pi(s) \subseteq K_{s,C} \cap H\,\text{”} \quad \text{e} \quad \text{“}\,\pi(s) \supseteq K_{s,C} \cap H\,\text{”}$$

Infatti, essendo $\pi(P) = H \cap r_{C,P}$ per definizione,

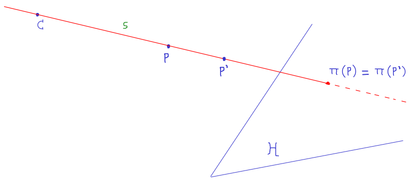
- $P \in s \implies r_{C,P} \subseteq K_{s,C} \implies \pi(P) \in K_{s,C}$ (quindi $\pi(P) \in K_{s,C} \cap H$);
- $Q \in K_{s,C} \cap H \implies Q = \pi(P) \in \pi(s)$, essendo $P := r_{C,Q} \cap s$

dove $r_{C,Q}$ denota la retta per C e Q. □

Nota. Fissata una retta s passante per C. Si ha che

i punti di $s \smallsetminus \{C\}$ *hanno la stessa immagine*

(escludiamo C perché π non è ivi definita).



Infatti, le rette per C e P e per C e P' coincidono (essendo entrambe la retta s).

Proposizione 5.5. *Nelle notazioni della Proposizione 5.2 abbiamo che*

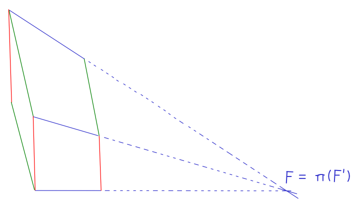
π *manda rette parallele (non passanti per* C*) in rette passanti per uno stesso punto* F

Inoltre, il punto F *sarà un punto al finito (cioè nella carta* $\mathbb{R}^3$*) se e solo se si verificano le due condizioni seguenti:*

- C *è al finito,*
- *le rette in questione non sono parallele ad* H.

Nota. Questa Proposizione ci sta dicendo che, in una foto, tre segmenti paralleli di una qualche scena (ad esempio, i tre spigoli di un palazzo), potranno non essere paralleli ma i loro prolungamenti passeranno comunque per uno stesso punto.

Nell'immagine di un parallelepipedo, i prolungamenti delle immagini di tre spigoli paralleli passano per uno stesso punto. Da notare che ciò non è affatto ovvio a priori!



Dimostrazione (della Proposizione 5.5). La prima affermazione è immediata: rette in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, parallele nella carta $\mathbb{R}^3$, passano per uno stesso punto di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, chiamiamolo F'. Le loro immagini contengono tutte il punto $F = \pi(F')$.

La seconda affermazione segue dalla prima: visto com'è definita la proiezione π, il punto $F = \pi(F')$ è il punto in cui la retta r per C e F' incontra il piano di proiezione H. Ciò premesso, dobbiamo solo capire dove si trova il nostro $F = \pi(F')$, cioè dove la retta r incontra H. Se anche C è all'infinito, la retta r è una retta all'infinito (in quanto retta passante per due punti all'infinito, i punti C e F'), pertanto incontrerà H in un punto anch'esso all'infinito, ovvero F sarà un punto all'infinito (le immagini delle rette saranno parallele). Assumendo che C sia al finito, abbiamo la dicotomia

$$r \cap H = F' \quad \text{oppure} \quad r \cap H \neq F'.$$

Nel primo caso F è all'infinito (coincide con F', che è all'infinito), nel secondo è al finito (essendo un punto di r distinto da F'). D'altro canto il primo caso si verifica se e solo se $F' \in H$, cioè se e solo se le rette che stiamo proiettando sono parallele al piano H. □

Definizione 5.6. Nelle notazioni della Proposizione 5.2, fissata una direzione $\vec{v}$, il punto comune alle immagini delle rette di direzione $\vec{v}$ si chiama

Punto di Fuga

(della direzione $\vec{v}$, relativo alla prospettiva π).

Nota. C'è un piccolo abuso di linguaggio nel parlare di "direzione $\vec{v}$": un vettore dà una direzione, ma vettori e direzioni non sono esattamente la stessa cosa.

Vediamo ora come calcolare l'immagine del generico punto P tramite la prospettiva

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \setminus \{C\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \\ & P & \mapsto & H \cap r_{C,\,P} \end{array}$$

(ricordiamo che $r_{C,\,P}$ denota la retta passante per C e P).

Algoritmo 5.7. Mantenendo le Notazioni 5.1, assumiamo che π sia una prospettiva centrale, cioè che C appartenga ad $\mathbb{R}^3$, e che H non sia il piano all'infinito. Poniamo

- $C = (c_x,\, c_y,\, c_z) \in \mathbb{R}^3$, quindi $C = [c_x,\, c_y,\, c_z,\, 1] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$;
- $H = \{ aX + bY + cZ = dW \}$, così da avere, in $\mathbb{R}^3$, equazione $ax + by + cz = d$;
- $\vec{n} = (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ (assumiamo che H non sia il piano all'infinito, quindi $\vec{n} \neq 0$)

Facciamo i conti in $\mathbb{R}^3$, che dotiamo della struttura di spazio Euclideo (sebbene ciò non sia strettamente necessario), così da avere

$$\vec{n} \perp H \qquad \text{(il vettore } \vec{n} \text{ è ortogonale al piano } H\text{)}$$

Consideriamo il generico punto $P = (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$ e la sua immagine $\pi(P)$, dove

con "generico" intendiamo "non appartenente al piano per C parallelo ad H"

In questo modo si ha che il punto $\pi(P)$ appartiene anch'esso ad $\mathbb{R}^3$ (infatti la retta per C e P, non essendo parallela ad H, deve incontrare H in un punto di $\mathbb{R}^3$). Ciò premesso, essendo i punti $C,\, P,\, \pi(P)$ allineati, si deve avere

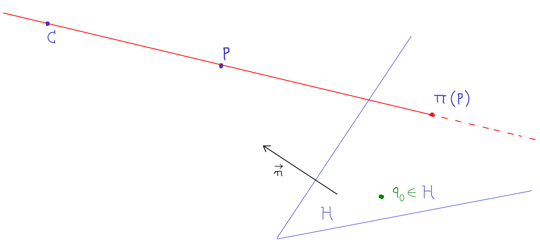
$$\pi(P) - C = \alpha\,(P - C) \qquad \text{(per una qualche costante } \alpha\text{)} \tag{$\spadesuit$}$$

(questo perché i vettori $\overline{CP} = P - C$ e $\overline{C\pi(P)} = \pi(P) - C$ sono proporzionali nonché entrambi non nulli, infatti $P \neq C$ per ipotesi e $\pi(P) \neq C$ sempre per ipotesi, essendo $\pi(P) \in H$ e $C \notin H$. Si veda la figura sotto).

Poiché P non appartiene al piano parallelo ad H passante per C, il prodotto scalare $\langle \vec{n},\, P - C \rangle$ è non nullo. Si ha

$$\langle \vec{n},\, \pi(P) - C \rangle = \alpha \langle \vec{n},\, P - C \rangle\,, \qquad \text{quindi } \alpha = \frac{\langle \vec{n},\, \pi(P) - C \rangle}{\langle \vec{n},\, P - C \rangle} = \frac{\langle \vec{n},\, Q_0 - C \rangle}{\langle \vec{n},\, P - C \rangle}$$

essendo $Q_0 \in H$ un punto arbitrario (scelto a priori, cioè fissato una volta per tutte).



Sopra, l'ultima uguaglianza, cioè l'uguaglianza

$$\langle \vec{n},\, \pi(P) - C \rangle = \langle \vec{n},\, Q_0 - C \rangle$$

segue dal fatto che essendo $\pi(P)$ e Q_0 entrambi punti di H, hanno lo stesso prodotto scalare con $\vec{n}$ (infatti, la loro differenza è un vettore appartenente alla giacitura del piano H, ed è perciò ortogonale ad $\vec{n}$).
Si noti che questo passaggio rappresenta un punto di svolta: è sparita la dipendenza esplicita di α da ciò che vogliamo calcolare, cioè da $\pi(P)$.

Posto $\delta = \langle \vec{n},\, Q_0 - C \rangle$ e $\xi = \langle \vec{n},\, P - C \rangle$, abbiamo $\alpha = \dfrac{\delta}{\xi}$.

In inciso osserviamo che $\delta/\|\vec{n}\|$ e $\xi/\|\vec{n}\|$ sono rispettivamente le distanze con segno (cfr. Osservazione 5.9 e Convenzione 5.11) da C, rispettivamente del piano H e del piano H_P parallelo ad H passante per P. In formule,

$$\frac{\delta}{\|\vec{n}\|} = \operatorname{dist}^*\{C,\, H\}\ , \qquad \frac{\xi}{\|\vec{n}\|} = \operatorname{dist}^*\{C,\, H_P\}$$

Nel caso della figura δ e ξ sono entrambi negativi perché $\vec{n}$ forma un angolo ottuso sia col vettore $\overline{CQ_0}$ che col vettore $\overline{CP}$, se avessimo disegnato $\vec{n}$ nel verso opposto sarebbero stati positivi, disegnare P a sinistra C (cioè nel lato opposto a dove la retta rossa incontra H), fa cambiare il segno di ξ.

A questo punto possiamo concludere, tornando a ($\spadesuit$) abbiamo

$$\pi(P) = C + \alpha(P-C) = C + \frac{\delta}{\xi}(P-C)$$

Scrivendo esplicitamente le coordinate in $\mathbb{R}^3$ di quest'espressione troviamo

$$\pi(P) = \Big(c_x + \tfrac{\delta}{\xi}(x-c_x)\,,\ c_y + \tfrac{\delta}{\xi}(y-c_y)\,,\ c_z + \tfrac{\delta}{\xi}(z-c_z)\Big)$$

Passando a coordinate proiettive troviamo

$$\begin{aligned}\pi(P) &= \Big[c_x + \frac{\delta}{\xi}(x-c_x)\,,\ c_y + \frac{\delta}{\xi}(y-c_y)\,,\ c_z + \frac{\delta}{\xi}(z-c_z)\,,\ 1\Big] \\ &= \Big[c_x\,\xi + \delta(x-c_x)\,,\ c_y\,\xi + \delta(y-c_y)\,,\ c_z\,\xi + \delta(z-c_z)\,,\ \xi\Big]\end{aligned} \qquad (\bigstar)$$

(abbiamo moltiplicato le quattro coordinate per il denominatore ξ). Scrivendo esplicitamente l'espressione di ξ troviamo

$$\begin{aligned}\xi \quad = \quad \langle \vec{n},\, P-C\rangle \ &= ax+by+cz - (ac_x+bc_y+cc_z) \\ &= ax+by+cz - d + \delta\end{aligned}$$

Infatti, denotando con o l'origine, abbiamo

$$-(ac_x+bc_y+cc_z) = \langle\vec{n},\, o-C\rangle = \langle\vec{n},\, o-Q_0\rangle + \langle\vec{n},\, Q_0-C\rangle = -d+\delta$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\langle\vec{n},\, o-Q_0\rangle = -\langle\vec{n},\, Q_0-o\rangle = -d\,, \qquad (\blacklozenge)$$

che a sua volta segue dal fatto che avendo H equazione $ax+by+cz = d$, sostituendo nell'espressione del prodotto scalare con $\vec{n}$, cioè nell'espressione $ax+by+cz$, le coordinate del vettore $\overline{oQ_0} = Q_0 - o$, che sono anche le coordinate del punto Q_0 (che in quanto punto in H ne verifica l'equazione), troviamo d.

Infine, l'equazione ($\bigstar$), sostituendovi $\xi = ax+by+cz-d+\delta$, può essere riscritta nella forma

$$\pi\Big(P=[x,\,y,\,z,\,1]\Big) \quad = \quad \left[\begin{pmatrix} \delta+ac_x & bc_x & cc_x & -c_x d \\ ac_y & \delta+bc_y & cc_y & -c_y d \\ ac_z & bc_z & \delta+cc_z & -c_z d \\ a & b & c & -d+\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}\right] \qquad (\clubsuit)$$

che, vista la Notazione 5.1, dà

$$\pi\Big(P=[X,\,Y,\,Z,\,W]\Big) \quad = \quad \left[\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\right]$$

(stessa matrice che in ($\clubsuit$)). $\square$

Nota. Le entrate della matrice M che appare in ($\clubsuit$) sono tutte omogenee di primo grado nelle costanti $a,\, b,\, c,\, d$ che compaiono nell'equazione di H (essendo tale anche $\delta = \langle\vec{n},\, Q_0-C\rangle$). Di conseguenza, se si cambia l'equazione H moltiplicandola per una costante λ, cioè si considera l'equazione $a'x+b'y+c'z = d'$ ottenuta moltiplicando per λ l'equazione $ax+by+cz = d$, allora la matrice M' ottenuta lavorando con i nuovi dati sarà la matrice $M' = \lambda M$. Naturalmente, dovendo risultare

$$[M'p] \quad = \quad \pi(p) \quad = \quad [Mp]$$

c'era da aspettarselo (nel senso che non sarebbe potuto essere altrimenti)!

Nota 5.8. Dato un vettore $\vec{v} = {}^t(v_x,\, v_y,\, v_z) \in \mathbb{R}^n$, il punto di Fuga F della direzione rappresentata da $\vec{v}$ è l'immagine del punto all'infinito F' corrispondente alla direzione di $\vec{v}$, in formule

$$F \quad = \quad \pi(F')\,, \qquad \text{essendo } F' = [v_x,\, v_y,\, v_z,\, 0]$$

(si noti che l'ultima coordinata proiettiva di F' è 0).

Osservazione 5.9. Nelle notazioni dell'algoritmo, in particolare dove

$$H \text{ è il piano di equazione } ax + by + cz = d, \quad \vec{n} = {}^t(a, b, c)$$

(che è un vettore ortogonale ad H), assumendo $\|\vec{n}\| = 1$ risulta

- $\delta := \langle \vec{n}, Q_0 - C \rangle = \text{dist}^*\{C, H\} =$ "distanza con segno di H da C";
- $\xi := \langle \vec{n}, P - C \rangle = \text{dist}^*\{C, H_P\} =$ "distanza con segno di H_P da C" (essendo H_P il piano parallelo ad H passante per P);
- $d = \langle \vec{n}, Q_0 - o \rangle = \text{dist}^*\{o, H\} =$ "distanza con segno di H dall'origine o" (si veda (♦) nella pagina precedente)

dove dist* denota la distanza con segno (cfr. Richiamo 5.10 e Convenzione 5.11).

Richiamo 5.10. In uno spazio vettoriale Euclideo, ad esempio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico, si ha la formula di proiezione di un vettore lungo un sottospazio di dimensione 1, nel nostro caso Span$\{\vec{n}\}$,

$$\vec{w} = \pi_{\text{Span}\{\vec{n}\}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\|} \vec{u}, \quad \text{essendo } \vec{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \text{ (che ha norma 1)}$$

(cfr. [1], Cap. 2, 1.15). Poiché $\vec{u}$ è uniario (ha norma 1) ed è orientato nello stesso verso di $\vec{n}$, si ha che

$$\text{il coefficiente } \frac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\|} \text{ è la lunghezza con "segno" del vettore } \pi_{\text{Span}\{\vec{n}\}}(\vec{v})$$

essendo il "segno" positivo se la direzione di $\vec{w}$ è concorde con quella di $\vec{n}$ (negativo se non lo è).

Convenzione 5.11. La distanza con segno di un punto B da un piano H avente versore normale $\vec{n}$ è data dalla formula

$$\text{dist}^*\{H, B\} = \langle \vec{n}, \overline{Q_0 B} \rangle = \langle \vec{n}, B - Q_0 \rangle, \text{ essendo } Q_0 \text{ un qualsiasi punto di } H$$

(è positiva se B appartiene allo stesso semispazio del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{n}$ avente estremo iniziale nel piano H). Naturalmente, se $\vec{n}$ non è un versore (cioè non ha norma 1) i vari prodotti scalari vanno divisi per $\|\vec{n}\|$. Per comodità di scrittura si pone anche

$$\text{dist}^*\{B, H\} = \text{"distanza di } H \text{ da } B\text{"} = -\,\text{dist}^*\{H, B\}.$$

Nota. Per non confondersi, l'idea di fondo è che in una retta orientata, la distanza di B da A sia la strada da percorrere per andare da A a B misurata concordemente con l'orientazione (per intenderci, sulla retta $\mathbb{R}$ orientata naturalmente, la distanza di x da 0 vale x). Allo stesso modo, la distanza di un punto da un piano è la strada da percorrere per andare dal piano al punto, quest'ultima misurata orientando la direzione ortogonale al piano secondo il verso dato dal versore normale $\vec{n}$ scelto (naturalmente la distanza di un piano da un punto sarà la stessa strada percorsa nel verso opposto).

Esempio 5.12. Consideriamo la proiezione centrale π di centro $C = (2, 2, -3)$, sul piano H di equazione $x + y + z = 4$. Determiniamo

i) la matrice $[M]$ che rappresenta π;

ii) il punto di fuga F della direzione data dal vettore $\vec{v} = {}^t(1, -2, 2)$.

Posto $Q_0 = (4, 0, 0)$ (un punto di H), considerando $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} \pi(P) = C + \tfrac{\langle \vec{n}, Q_0 - C \rangle}{\langle \vec{n}, P - C \rangle}(P - C) &= (2, 2, -3) + \tfrac{3}{x+y+z-1}(x-2, y-2, z+3) \\ &= \left(2 + \tfrac{3x-6}{x+y+z-1},\ 2 + \tfrac{3y-6}{x+y+z-1},\ -3 + \tfrac{3z+9}{x+y+z-1}\right) \end{aligned}$$

ovvero

$$\pi(P) = \left[5x+2y+2z-8,\ 2x+5y+2z-8,\ -3x-3y+12,\ x+y+z-1\right]$$

Di conseguenza

$$\pi\Big(P = [X, Y, Z, W]\Big) = \left[\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 2 & -8 \\ -3 & -3 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \right]$$

Il punto all'infinito corrispondente alla direzione $\vec{v}$ è il punto $F' = [1, -2, 2, 0]$, si ha

$$F = \pi(F') = \pi([1, -2, 2, 0]) = [5, -4, 3, 1]$$

che è il punto $(5, -4, 3) \in \mathbb{R}^3$. □

Nota. Coerentemente con le aspettative, il nucleo della matrice trovata $[M]$ contiene $C = [2, 2, -3, 1]$ e immagine il piano H, infatti le colonne di $[M]$ soddisfano l'equazione $X + Y + Z = 4W$.

Il caso di una proiezione parallela può essere trattato come limite del caso della proiezione centrale (Algoritmo 5.7). Essendo in effetti più semplice lo trattiamo direttamente nell'esempio che segue.

Esempio 5.13. Determiniamo la matrice $[M]$ che rappresenta la proiezione parallela π di direzione $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, sul piano H di equazione $ax + by + cz = d$.

Come premessa, a scanso di equivoci osserviamo che, viste le ipotesi, abbiamo

$$C = [v_x, v_y, v_z, 0] \quad \text{(il punto all'infinito della direzione } \vec{v}).$$

Dato $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il generico punto della retta $r_{C,P}$ ha coordinate

$$(x + tv_x, \; y + tv_y, \; z + tv_z) \qquad (\blacktriangle)$$

che appartiene ad H a condizione che risulti

$$a(x + tv_x) + b(y + tv_y) + c(z + tv_z) = d$$

ovvero che risulti

$$t = \frac{(d - ax - by - cz)}{(av_x + bv_y + cv_z)} =: \frac{\eta}{\omega}$$

dove η e ω sono numeratore e denominatore della frazione indicata (con $\omega \neq 0$ perché $C \notin H$). Ricordando che $\pi(P) = H \cap r_{C,P}$, quindi sostituendo $t = \eta/\omega$ in $(\blacktriangle)$, troviamo

$$\pi(P) = \left(x + \tfrac{\eta}{\omega} v_x, \; y + \tfrac{\eta}{\omega} v_y, \; z + \tfrac{\eta}{\omega} v_z\right)$$

e, passando a coordinate proiettive,

$$\begin{aligned} \pi(P) &= [x + \tfrac{\eta}{\omega} v_x, \; y + \tfrac{\eta}{\omega} v_y, \; z + \tfrac{\eta}{\omega} v_z, \; 1] \\ &= [\omega x + \eta v_x, \; \omega y + \eta v_y, \; \omega z + \eta v_z, \; \omega] \end{aligned}$$

Da cui sostituendo $\eta = d - ax - by - cz$ e $\omega = av_x + bv_y + cv_z$ si trova

$$\pi\Big(P = [x, y, z, 1]\Big) = \left[\begin{pmatrix} \omega - av_x & -bv_x & -cv_x & dv_x \\ -av_y & \omega - bv_y & -cv_y & dv_y \\ -av_z & -bv_z & \omega - cv_z & dv_z \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Quella indicata è la matrice $[M]$ cercata.

Nota. Da notare che trattandosi di una proiezione parallela, coerentemente con le aspettative la matrice $[M]$ è una matrice affine, cioè manda punti al finito in punti al finito (come pure punti all'infinito in punti all'infinito).

Abbiamo annunciato che il calcolo esplicito di M avrebbe dimostrato la Proposizione 5.2, in effetti è così ma c'è qualche precisazione da fare:

- nel caso della proiezione centrale, Algoritmo 5.7, nello svolgere i conti abbiamo assunto due ipotesi, precisamente abbiamo assunto P al finito e che non fosse nel piano H_C parallelo ad H passante per C, ovvero abbiamo solamente provato l'identità

  $$\pi(P) = \big[M \cdot P\big], \quad \forall \; P \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus H_C \qquad (1)$$

  e non, come vorremmo, l'identità

  $$\pi(P) = \big[M \cdot P\big], \quad \forall \; P \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \smallsetminus C \qquad (2)$$

  Quanto al passaggio dalla (1) alla (2) è sufficiente osservare che le funzioni π e "moltiplicazione per $[M]$" sono entrambe continue e, in quanto tali, coincidono nei punti non presi in considerazione svolgendo i calcoli (perché questi appartengono alla chiusura di $\mathbb{R}^3 \smallsetminus H_C$, ovvero si ottengono come limite di punti per i quali abbiamo svolto i conti);
- nel caso della proiezione parallela, Esempio 5.13, nello svolgere i conti abbiamo assunto P al finito, valgono considerazioni simili (a maggior ragione) a quelle di cui sopra.

Il fatto che la matrice M abbia rango 3 segue fal fatto che descrive π, funzione la cui immagine ha dimensione proiettiva 2 (essendo il piano H).

Esiste un altro modo per provare la Proposizione 5.2, ed in effetti per determinare $[M]$.

Dimostrazione (#2, della Proposizione 5.2). Siano C ed H come nella Proposizione. La proiettività degenere

$$\pi_0 \quad \text{associata alla matrice} \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

manda il punto $[x, y, z, 1]$ nel punto $[x, y, 0, 1]$, di conseguenza è la proiezione parallela (e ortogonale) dal punto all'infinito delle (z) sul piano $\{z = 0\}$ (che chiameremo rispettivamente C_0 e H_0). Se $f = [L]$ è una qualsiasi proiettività che manda

$$C_0 = [0, 0, 1, 0] \text{ nel punto } C \text{ ed } H_0 \text{ (di equazione } \{z = 0\}) \text{ nel piano } H$$

allora risulta

$$\pi = f \circ \pi_0 \circ f^{-1}$$

(perché pensando ad f come cambio di coordinate proiettive, la matrice M_0 descrive π nel nuovo sistema di riferimento proiettivo).

Infine, essendo f invertibile, risulta $\text{Rango}\,\pi = \text{Rango}\,\pi_0 = 3$. □

Tornando all'Esempio 5.12, possiamo prendere

$$f = \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

(trovata determinando la proiettività che fa corrispondere due cinquine di punti in posizione generale, la prima contenente ordinatamente C_0 e 3 punti di H_0, la seconda C e 3 punti di H, precisamente

$$\begin{array}{ccccc} [1, 0, 0, 0]\,, & [0, 1, 0, 0]\,, & C_0 = [0, 0, 1, 0]\,, & [0, 0, 0, 1]\,, & U_0 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ [4, 0, 0, 1]\,, & [0, 4, 0, 1]\,, & C = [2, 2, -3, 1]\,, & [0, 0, 4, 1]\,, & U \end{array}$$

essendo U_0 ed U i punti unità delle due cinquine, corrispondenti ai rappresentanti scelti per gli altri punti). Si ottiene

$$\begin{aligned} [M] &= \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] \\ &= \left[\tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 2 & -8 \\ -3 & -3 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

(che è la stessa proiettività degenere trovata utilizzando l'Algoritmo 5.7).

L'Algoritmo 5.7 consente il calcolo della matrice che rappresenta una prospettiva centrale arbitraria e, di conseguenza, del punto di fuga relativo ad una qualche direzione. È possibile un approccio diretto al calcolo dei punti fuga, che peraltro ha il vantaggio di poter essere utilizzato nel problema inverso, cioè quello di determinare la direzione che ha come punto di fuga un punto F fissato (vedremo che una tale direzione è unica).

Osservazione 5.14. Consideriamo la prospettiva centrale π di centro C sul piano H. Sia $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ un vettore in $\mathbb{R}^3$ (che quindi individuerà una direzione). Posto

$$F' = [v_x, v_y, v_z, 0]$$

(il punto all'infinito corrispondente alla direzione in questione), il punto di fuga F relativo alla direzione $\vec{v}$ è il punto

$$F = \pi(F')$$

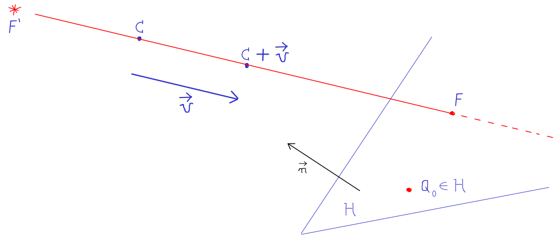
Assumendo che $\vec{v}$ non sia parallelo ad H (così da avere F al finito, cfr. Prop. 5.5), il fatto che i tre punti F', C ed F siano allineati, può essere espresso dicendo che i vettori $\vec{v}$ e $\overline{CF}$ sono proporzionali, ovvero che risulta

$$\overline{CF} \quad = \quad \alpha\,\vec{v} \qquad (\clubsuit)$$

per una qualche costante α. Prendendo il prodotto scalare con $\vec{n}$ di quest'equazione troviamo

$$\alpha \quad = \quad \frac{\langle\,\vec{n}\,,\ F-C\,\rangle}{\langle\,\vec{n}\,,\ \vec{v}\,\rangle} \quad = \quad \frac{\langle\,\vec{n}\,,\ Q_0-C\,\rangle}{\langle\,\vec{n}\,,\ \vec{v}\,\rangle}$$

dove $\vec{n}$ è un vettore ortogonale ad H e dove Q_0 è un qualsiasi punto di H (scelto a priori), infatti essendo F e Q_0 entrambi in H, la loro differenza ha prodotto scalare nullo con $\vec{n}$.



Sostituendo l'espressione trovata di α in ($\clubsuit$), o meglio in $F = C + \alpha\,\vec{v}$, abbiamo pertanto

$$F \quad = \quad C \; + \; \frac{\langle\,\vec{n}\,,\ Q_0 - C\,\rangle}{\langle\,\vec{n}\,,\ \vec{v}\,\rangle}\,\vec{v}$$

Da notare che il vettore $\overline{CF}$ è un vettore la cui direzione ha F come punto di fuga. Ciò ha una conseguenza immediata:

esiste un'unica direzione che ha F come punto di fuga, quella data dal vettore $\overline{CF}$

infatti π fa corrispondere biunivocamente i punti del piano all'infinito coi punti di H, quindi cambiando F con un altro punto di H cambia anche la direzione in questione.

Naturalmente, scrivere la direzione avente F come punto di fuga è immediato: basta scrivere il vettore $\overline{CF}$.

Esempio 5.15. Tornando all'esempio 5.12 della proiezione centrale π di

centro $C = (2,\ 2,\ -3)$ e piano di proiezione H di equazione $x + y + z = 4$.

il punto di fuga F della direzione data dal vettore $\vec{v} = {}^t(1,\ -2,\ 2)$ può essere calcolato direttamente come nell'Osservazione 5.14. Essendo

$$Q_0 - C \; = \; (0,\ 0,\ 4) - (2,\ 2,\ -3) \; = \; (-2,\ -2,\ 7) \quad \text{ed} \quad \vec{n} \; = \; (1,\ 1,\ 1)\,,$$

si ha

$$F \quad = \quad C \; + \; \frac{\langle\,\vec{n}\,,\ Q_0 - C\,\rangle}{\langle\,\vec{n}\,,\ \vec{v}\,\rangle}\,\vec{v} \quad = \quad C + \frac{3}{1}\,\vec{v} \quad = \quad (5,\ -4,\ 3)$$

Quanto al "problema inverso", determiniamo la direzione $\vec{w}$ che ha $F = (2,\ -1,\ 3)$ come punto di fuga. Si ha

$$\vec{w} \quad = \quad \overline{CF} \quad = \quad (0,\ -3,\ 6)$$

Come verifica dei risultati di cui sopra, si osservi che utilizzando la matrice trovata discutendo l'esempio 5.12 risulta

$$\pi([1,\ -2,\ 2,\ 0]) \; = \; [5,\ -4,\ 3,\ 1]\ , \qquad \pi([0,\ -1,\ 2,\ 0]) \; = \; [2,\ -1,\ 3,\ 1]$$

(per la seconda verifica, abbiamo considerato $\frac{1}{3}\,\vec{w}$, vettore che ha la stessa direzione di $\vec{w}$).