

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO
Prof. Carla MANNI
5 Dicembre, 2003, I Esonero - A

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri reali

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{4};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ di a e b in $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a e b e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare il valore $\tilde{b} \ominus \tilde{a}$ e determinare l'errore relativo rispetto a $b - a$.

- 2) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e sia

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + x_1^2};$$

- i) discutere il condizionamento di f rispetto alla prima componente del vettore $\mathbf{x}$ nel caso $x_2 = x_1$;
- ii) determinare, se possibile, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ per cui $f(\mathbf{x}) < \|\mathbf{x}\|_2 = 1$;
- iii) determinare e disegnare l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ per cui risulta $f(\mathbf{x}) = 1$.

- 3) Data la funzione

$$g(x) = k \sin(x), \quad x \in [0, \pi];$$

- i) mostrare che, nel caso $k = 2$, la funzione g ammette due punti fissi e che il più grande di essi appartiene all'intervallo $(\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$;
- ii) analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = 2$;
- iii) analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

- 4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0;$$

- i) calcolare, se possibile, A^{-1} ;
- ii) determinare, se possibile, $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ e $\mu_\infty(A)$;
- iii) determinare, se esiste, il valore di α per cui $\mu_\infty(A)$ risulta minimo.

- 5) È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Senza calcolare il determinante né gli autovalori, si dica, motivando la risposta, se è possibile che

- i) A sia singolare,
- ii) il suo raggio spettrale sia minore di 1,
- iii) il suo raggio spettrale sia maggiore di 5.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
16 Gennaio, 2004

1) Data la funzione

$$f(x) = k - x^2 - \cos(x) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad k > 0$$

- i) localizzare le eventuali radici di f nel caso $k = 2$;
- ii) analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f nel caso $k = 2$;
- iii) determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo che la funzione f abbia una radice doppia ed analizzare in tal caso la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione della radice in questione.

2) Date le due espressioni analiticamente equivalenti

$$f_1(x) = x - x^2, \quad f_2(x) = x(1 - x), \quad x \neq 0, 1;$$

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di f_1 e quello del calcolo di f_2 al variare di $x \in \mathbb{R}$;
- ii) stabilire, motivando la risposta, quale delle due espressioni è preferibile utilizzare dal punto di vista della propagazione dell'errore in un fissato insieme di numeri di macchina nell'ipotesi che x sia un elemento dell'insieme dato di numeri di macchina
- iii) posto $x = \frac{3}{4}$ calcolare il valore di $f_1(x)$ e di $f_2(x)$ nell'insieme di numeri di macchina $F(2, 3, m, M)$ in cui si operi con troncamento.

3) Sia n un numero intero positivo. Si consideri la matrice di ordine $n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n \end{pmatrix}$$

- i) nel caso $n = 2$ stabilire se la matrice ammette la fattorizzazione LU e, in caso affermativo, calcolare la fattorizzazione stessa;
- ii) nel caso $n = 2$ stabilire se la matrice ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- iii) nel caso n generico, stabilire se la matrice A ammette la fattorizzazione LU .

4) Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ ed i nodi

$$x_0 = -h, \quad x_1 = h, \quad 0 < h \leq 1;$$

- i) determinare e disegnare il polinomio, $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ sui nodi assegnati
- ii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$;
- iii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\left| \int_{-1}^1 L_{0,1}(x) dx + \int_{-1}^1 L_{1,1}(x) dx \right|.$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
16 Gennaio, 2004, II Esonero - A

1) Sia n un numero intero positivo. Si consideri la matrice di ordine $n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n \end{pmatrix}$$

- i) nel caso $n = 2$ stabilire se la matrice ammette la fattorizzazione LU e, in caso affermativo, calcolare la fattorizzazione stessa
- ii) nel caso $n = 2$ stabilire se la matrice ammette la fattorizzazione di Cholesky
- iii) nel caso n generico, stabilire se la matrice A ammette la fattorizzazione LU .

2) Dato il sistema lineare $Ax = b$ ove

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad b \in \mathbb{R}^3$$

- i) stabilire se la matrice A è irriducibile;
 - ii) stabilire per quali valori di α la matrice A è a diagonale dominante;
 - iii) determinare per quali valori di α il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema dato converge e confrontare la risposta con i valori del punto precedente;
 - iv) stabilire per quali valori del parametro α la matrice è definita positiva;
 - v) determinare per quali valori di α il metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge.
- 3) Assegnata la funzione $f(x) = -x^2 + 1$ ed i nodi

$$x_0 = -h, \quad x_1 = h, \quad 0 < h \leq 1;$$

- i) determinare e disegnare il polinomio, $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ sui nodi assegnati
- ii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$;
- iii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\left| \int_{-1}^1 L_{0,1}(x) dx + \int_{-1}^1 L_{1,1}(x) dx \right|.$$

4) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, N$, ove

$$x_i = i, \quad f(x) = x + \cos(2\pi x);$$

- i) nel caso $N = 3$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso N generico, determinare la parabola che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- iii) nel caso N generico, calcolare i valori $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$, $0 \leq k \leq N$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
27 Gennaio, 2004

1) Data la funzione

$$f(x) = x^4 - x^2;$$

- i) determinare i punti di massimo, i punti di minimo ed i flessi di f e disegnarne il grafico qualitativo;
- ii) analizzare la convergenza (incluso l'ordine) del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- iii) tenendo presenti i risultati del punto i), analizzare la convergenza del metodo di Newton (incluso l'ordine) per l'approssimazione delle eventuali radici positive della funzione

$$g(x) = f(x) + \frac{5}{36} = x^4 - x^2 + \frac{5}{36}.$$

2) Dati i numeri reali

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{20}, \quad z = \frac{1}{40};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ di x , y e z in $\mathcal{F}(2, 3, -6, 6)$ in cui si operi con troncamento;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per x , y e z e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare il valore $(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) \oplus \tilde{z}$ e $\tilde{x} \oplus (\tilde{y} \oplus \tilde{z})$, determinare l'errore relativo di ciascun risultato rispetto a $x + y + z$ e commentare il risultato.

3) Assegnato il sistema lineare $Ax = b$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- i) stabilire per quali valori di α la matrice ammette la fattorizzazione LU ;
- ii) se possibile, calcolare la fattorizzazione LU di A per $\alpha = -1$;
- iii) detta J la matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema dato stabilire per quali valori di α risulta $\|J\|_\infty < 1$;
- iv) stabilire quali valori di α il metodo di Jacobi converge e confrontare i risultati con quelli del punto precedente;
- v) nel caso $\alpha = -1$, indicato con $x^{(k)}$ il valore ottenuto alla k -esima iterazione del metodo di Jacobi ed con x^* la soluzione del sistema, dare una maggiorazione dell'errore

$$\|x^{(k)} - x^*\|, \quad \text{per } k \geq 3.$$

4) Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ e la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x};$$

- i) determinare il polinomio, $p(x)$, che interpola la funzione $f(x)$ sui nodi assegnati;
- ii) dare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo, per $x \in [0, 1]$, ad f il polinomio p ;
- iii) approssimare $\int_0^1 f(x)$, sia tramite $\int_0^1 p(x)dx$, sia tramite la formula di Simpson sui nodi x_0, x_1, x_2 e commentare i risultati ottenuti.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
13 Febbraio, 2004

1) Data la funzione

$$g(x) = -x^2 + x + k;$$

- i) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = \frac{1}{4}$, discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k \in [0, \frac{1}{4})$ discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

2) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,$$

- i) calcolare, se possibile, A^{-1} ;
- ii) determinare, se possibile, il numero di condizionamento in norma infinito di A e stabilire per quali valori del parametro α esso risulta minimo;
- iii) calcolare, se possibile, $\|A\|_2$ nel caso $\alpha = 1$.

3) Assegnato il sistema lineare $Bx = b$, ove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- i) calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU di B ;
- ii) stabilire per quali valori di β è possibile formulare il metodo di Gauss-Seidel per il sistema assegnato;
- iii) stabilire per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel per il sistema assegnato converge;
- iv) stabilire quali valori di β la matrice è definita positiva e commentare i risultati;
- v) effettuare un' iterazione del metodo di Gauss-Seidel partendo dal vettore iniziale

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

confrontare il valore ottenuto con la soluzione esatta del sistema e commentare i risultati.

4) Assegnati i punti $(x_j, f(x_j))$, $j = 1, \dots, 2k$, ove

$$x_{2i-1} = -i, \quad x_{2i} = i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$f(x) = x^3;$$

- i) nel caso $k = 2$, determinare esplicitamente e disegnare i punti assegnati;
- ii) nel caso $k = 2$, determinare la retta che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- iii) nel caso $k = 2$, determinare la parabola che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- iv) nel caso k generico, mostrare che, sia la retta che la parabola di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati per i dati assegnati, si riducono ad una retta passante per l'origine.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
14 Giugno, 2004

1) Data la funzione

$$g(x) = k - \ln(1 + 2x), \quad k \geq 0;$$

- i) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = 2$ discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k \in [0, \ln 2)$ discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

2) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

- i) calcolare, se possibile, A^{-1} ;
- ii) determinare, se possibile, $\|A\|_2$ e stabilire per quali valori del parametro α tale quantità risulta minima;
- iii) determinare, se possibile, il numero di condizionamento $\mu_2(A)$ e stabilire per quali valori del parametro α esso risulta minimo.

3) Assegnato il sistema lineare $Bx = b$, ove $b \in \mathbb{R}^3$ e

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad \beta > 0.$$

per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire, giustificando la risposta, se è vera o falsa:

- i) se $\beta > 2$, il metodo di Jacobi ed il metodo di Gauss-Seidel convergono;
- ii) esiste β con $\beta \leq 2$, per cui il metodo di Jacobi converge;
- iii) esiste β per cui il metodo di Gauss-Seidel converge ed il metodo di Jacobi no.

4) Assegnati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, 2n$ ove

$$f(x) = \cos(\pi n x)$$

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{2n}, \quad x_i \in [-1, 1], \quad i = 0, \dots, 2n,$$

sia $p_{2n}(x)$ il polinomio che interpola la funzione f sui nodi assegnati.

- i) Nel caso $n = 1$, $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, calcolare il polinomio p_2 e disegnare la funzione assegnata, i punti di interpolazione ed il polinomio $p_2(x)$.
- ii) Mostrare che

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_{2n}(x)| \leq \frac{(\pi n)^{2n+1}}{(2n+1)!} 2^{2n+1}.$$

- iii) Nel caso n generico e $x_i = -1 + \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, 2n$ determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti assegnati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
12 Luglio, 2004 (appello riservato Laurea Quadriennale)

1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - kx^2, \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 1$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) nel caso $k < 0$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

2) Dato l'insieme di numeri di macchina $F(2, 4, -4, 4)$ ove si operi con troncamento, e siano

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 16.5.$$

Determinare, se possibile

- i) le rappresentazioni $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ rispettivamente di a e b in $F(2, 4, -4, 4)$;
- ii) determinare, se possibile, gli errori relativi di rappresentazione e confrontarli con la precisione di macchina.

3) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & & 1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 1 & & & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- i) si mostri che A è definita positiva;
- ii) nel caso $n = 3$ si analizzi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$ ove $b \in \mathbb{R}^3$.

4) Assegnati i punti x_i , $i = 0, \dots, n$ con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e la funzione

$$f_k(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i), \quad k < n,$$

- i) determinare, se possibile, il polinomio p_k che interpola la funzione f_k sui nodi $x_0, \dots, x_k$;
- ii) determinare, se possibile, il polinomio p_n che interpola la funzione f_k sui nodi $x_0, \dots, x_n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
13 Settembre, 2004

1) Data la funzione

$$g(x) = k x^2(2 - x), \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 1$, studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ analizzando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) nel caso $k = -1$, studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ analizzando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

2) Date le due espressioni analiticamente equivalenti

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \frac{(x-1)}{x}, \quad x \neq 0;$$

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di f_1 ed f_2 ;
- ii) stabilire se, operando in un prefissato insieme di numeri di macchina ed assumendo che x appartenga a tale insieme, sia preferibile, dal punto di vista della propagazione dell'errore, utilizzare la prima o la seconda espressione.

3) Per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

si vuole usare il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k)} = P\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{q}$, in cui P è la matrice di iterazione ottenuta dalla A mediante la decomposizione $A = M - N$, dove

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) determinare esplicitamente la matrice P ed il vettore $\mathbf{q}$;
- ii) effettuare una iterazione del metodo proposto a partire dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- iii) stabilire se il metodo iterativo è convergente.

4) Data la funzione

$$h(x) = x^{\frac{1}{5}}, \quad x \in [0, 1]$$

- i) determinare il polinomio $p_1(x)$ che interpola la funzione $h(x)$ nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e disegnarne il grafico;
- ii) determinare il polinomio $p_0(x)$ che interpola la funzione $h(x)$ nel punto $x_0 = 1/32$ e disegnarne il grafico;
- iii) calcolare

$$r_1 = \max_{x \in [0,1]} |h(x) - p_1(x)|, \quad r_0 = \max_{x \in [0,1]} |h(x) - p_0(x)|;$$

- iv) spiegare perché, nonostante che p_1 abbia grado maggiore di p_0 , risulta $r_1 > r_0$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO / ANALISI NUMERICA I
7 Dicembre, 2004, I Esonero - B

1) Data la matrice

$$A = \mathbf{x}\mathbf{x}^T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

i) scrivere esplicitamente la matrice A nel caso

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0;$$

- ii) nello stesso caso del punto i) determinare α in modo che $\|A\|_\infty$, risulti minima;
- iii) nello stesso caso del punto i), determinare α in modo che $\|A\|_2$, risulti minima;
- iv) nel caso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ stabilire se A è invertibile e mostrare che $\mathbf{x}$ è autovettore di A .

2) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{15}{16}, \quad b = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{1}{8};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e $\tilde{c}$ di a , b e c in $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , b e c e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare i valori $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$, $\tilde{a} \oplus \tilde{c}$, determinare l'errore relativo rispetto ad $a + b$, ed ad $a + c$ (rispettivamente) e confrontarlo con la precisione di macchina;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se in un generico insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ il fatto che $x \oplus y = x \oplus z$, $x, y, z \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ implica $y = z$.

3) Data la funzione

$$f(x) = -x^3 + 3x + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 2$, localizzare le eventuali radici di f ;
- ii) nel caso $k = 2$ analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
- iii) nel caso $k = 0$ analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
- iv) nel caso $k = 0$ analizzare la convergenza delle successioni originate dal metodo di Newton a partire da $x_0 = -\frac{9}{10}$, $x_0 = \frac{4}{5}$ e da $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.

4) È data la matrice

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i, & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{1-i-j}, & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 4$ scrivere esplicitamente la matrice A e stabilire se risulta irriducibile;
- ii) nel caso $n = 4$, senza calcolare il determinante né gli autovalori:
 - mostrare che A non è singolare
 - determinare il numero degli autovalori positivi e di quelli negativi di A
 - mostrare che $\rho(A^{-1}) < 4$;
- iii) nel caso n sia un generico numero pari, mostrare che $\|A^{-1}\|_F < \sqrt{10n}$.
(Suggerimento: ricordare il legame intercorrente fra la traccia e gli autovalori).

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
18 Gennaio, 2005, II Esonero - A

1) Si consideri la matrice A di ordine $n \geq 2$ definita come segue:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i - 1 = j, \\ \alpha & \text{se } i = 1 \text{ e } j = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente la matrice e calcolarne il determinante;
 - ii) nel caso $n = 3$ stabilire per quali valori del parametro α la matrice ammette la fattorizzazione LU e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa;
 - iii) nel caso n generico, stabilire per quali valori del parametro α la matrice ammette la fattorizzazione LU e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa; (*si consiglia di utilizzare il metodo di Gauss*)
 - iv) tenendo presenti i risultati del punto precedente, nel caso n generico determinare per quali valori del parametro α la matrice risulta singolare.
- 2) Dato il sistema lineare $Ax = b$, ove A è la matrice dell'esercizio precedente e $b \in \mathbb{R}^3$,
- i) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di α la matrice A è a diagonale dominante in senso stretto;
 - ii) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di α la matrice A è a diagonale dominante ed irriducibile;
 - iii) nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
 - iv) nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge.
 - v) nel caso n generico, analizzare la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per $\alpha = 0$ e per i valori del parametro α per cui la matrice A risulta singolare.

3) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = i, \quad f(x) = x + \cos(2\pi x);$$

- i) nel caso $n = 2$, disegnare i punti assegnati e determinare se possibile, il polinomio, p , che interpola i dati assegnati scritto nella forma di Newton;
 - ii) nel caso $n = 2$ determinare una maggiorazione della quantità $\max_{x \in [0, n]} |f(x) - p(x)|$;
 - iii) nel caso n generico, determinare, se possibile, il polinomio che interpola i dati assegnati e calcolare i valori $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$, $0 \leq k \leq n$.
- 4) Assegnati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, N$ ove

$$g(x) = |x| - 1, \quad x_i = a + \frac{2i}{N}, \quad i = 0, \dots, N, \quad a \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $a = 0, N = 4$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso $a = 0, N = 4$, determinare e disegnare la parabola che meglio approssima i punti assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- iii) nel caso $a = -1, N = 4$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- iv) nel caso $a > 0, N$ generico, determinare e disegnare la parabola che meglio approssima i punti assegnati nel senso dei minimi quadrati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
26 Gennaio, 2005

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{1}{7}, \quad b = 2(1 + a);$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, e $\tilde{b}$, di a , e b in $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$;
 - ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a e b e confrontarli con la precisione di macchina;
 - iii) calcolare il valore $2 \odot (1 \oplus \tilde{a})$, e confrontarlo con $\tilde{b}$.
- 2) Si considerino le matrici A e C di ordine $n \geq 2$ ove $A = CC^T$ e

$$C = (c_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ \gamma & \text{se } i = n \text{ e } j = 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente le due matrici;
 - ii) nel caso $n = 3$ stabilire per quali valori del parametro γ la matrice A risulta definita positiva;
 - iii) nel caso $n = 3$ stabilire per quali valori del parametro γ la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa;
 - iv) nel caso $n = 3$ stabilire per quali valori del parametro γ il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$, converge;
 - v) nel caso n generico, stabilire per quali valori del parametro γ il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, risulta uguale a 1.
- 3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1};$$

- i) disegnare il grafico di f e localizzare le eventuali radici di f ;
 - ii) analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
 - iii) determinare i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione originata dal metodo di Newton a partire da x_0 non risulta convergente;
 - iv) determinare, se possibile, quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie a partire dall'intervallo $[-1, 3]$ per localizzare la radice di f appartenente a tale intervallo con un errore minore di 10^{-2} .
- 4) Dati i punti (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$, ove

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad y_k = \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right);$$

- i) nel caso $n = 2$, determinare e disegnare i punti assegnati;
- ii) nel caso $n = 2$, determinare se possibile, il polinomio di grado minore o uguale a 2, p_2 , tale che $p_2(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2$;
- iii) nel caso $n = 3$ disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, la parabola che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- iv) nel caso n generico, $n > 2$, determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale a n , p_n , tale che $p_n(x_k) = y_k$, $k = 0, \dots, n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
15 Febbraio, 2005

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{8}{7}, \quad b = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{1}{8};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e $\tilde{c}$ di a , b e c in $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a, b e c e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare i valori $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \oplus \tilde{c}$ e $\tilde{a} \oplus (\tilde{b} \oplus \tilde{c})$, determinare l'errore relativo di ciascuno di essi rispetto ad $a + b + c$ e confrontarlo con la precisione di macchina;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se in un generico insieme di numeri di macchina vale la proprietà associativa della somma.

- 2) Si consideri la matrice A di ordine $n \geq 2$

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} j & \text{per } j = 1, \dots, n, \quad i = j, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente la matrice;
- ii) nel caso $n = 3$ determinare, se possibile, la fattorizzazione LU della matrice data;
- iii) nel caso $n = 3$, stabilire se il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \alpha U)\mathbf{x}^{(k)} + \alpha L^{-1}\mathbf{b}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

ove L ed U sono le matrici di cui al punto precedente, può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, e, in caso affermativo, determinare per quali valori del parametro α detto metodo iterativo converge;

- iv) nel caso n generico, determinare se possibile, la fattorizzazione LU della matrice data.

- 3) Date le funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x - k, \quad g(x) = \frac{x^2 + k}{2(x - 1)}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > -1;$$

- i) nel caso $k = 3$, disegnare il grafico e localizzare le eventuali radici di f ;
- ii) nel caso $k = 3$, analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
- iii) nel caso $k = 3$ analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, per l'approssimazione delle radici di f .
- iv) nel caso k generico, analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione delle radici di f .

- 4) Dati i punti (x_k, y_k) , ove $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $y_k = x_k^2 - 1$, $k = 0, \dots, n$,

- i) nel caso $n = 2$, determinare e disegnare i punti assegnati;
- ii) nel caso $n = 2$, determinare se possibile, il polinomio di grado minore o uguale a 2, p_2 , tale che $p_2(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2$;
- iii) nel caso $n = 3$ disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- iv) nel caso n generico, $n > 2$, determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale a n , p_n , tale che $p_n(x_k) = y_k$, $k = 0, \dots, n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
21 Giugno, 2005

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = \frac{1}{8};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e di a , b in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , e b confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare i valori $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \otimes (\frac{1}{2})$ e $\tilde{a} \oplus ((\tilde{b} \ominus \tilde{a}) \otimes (\frac{1}{2}))$, e determinare l'errore relativo di ciascuno di essi rispetto al punto medio dell'intervallo $[a, b]$.

- 2) Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- i) nel caso $\beta = 2$ si determini $\|B\|_2$
- ii) nel caso $\beta = 2$ si calcoli il numero di condizionamento, in norma 2, di B .
- iii) calcolare, al variare del parametro β , il minimo valore assunto dal numero di condizionamento, in norma 2, di B .

- 3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

- i) stabilire per quali valori di α A è a diagonale dominante;
- ii) stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
- iii) stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
- iv) nel caso α generico effettuare tre iterazioni del metodo di Jacobi per il sistema dato a partire dal punto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ e commentare il risultato ottenuto.

- 4) Data la funzione

$$f(x) = |x|^\gamma, \quad \gamma > 0;$$

- i) nel caso $\gamma = 2$, disegnare il grafico e localizzare le eventuali radici di f ;
- ii) nel caso $\gamma = 2$, analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
- iii) nel caso $\gamma = 1$, disegnare il grafico di f ed analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;
- iv) nel caso $0 < \gamma < 1$, analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ;

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI

13 Settembre, 2005

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(3, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{4};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e $\tilde{c}$ di a , b e c in $\mathcal{F}(3, 3, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a, b e c e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare il valore $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \oplus \tilde{c}$, determinarne l'errore relativo rispetto ad $a + b + c$ e confrontarlo con la precisione di macchina.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = x^3 - kx, \quad k > 0;$$

- i) stabilire, al variare di k , il numero delle radici reali di f ;
- ii) studiare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione di ciascuna delle radici di f analizzando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.
- iii) dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m}, \quad m \in \mathbb{R},$$

determinare il parametro m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione della radice positiva di f ed analizzare la convergenza del metodo ottenuto per l'approssimazione di tutte le radici di f .

- 3) Data la matrice

$$A = 2I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T, \quad I \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

- i) nel caso $n = 3$ ed $\mathbf{u} = (1 \ 1 \ 1)^T$ determinare gli autovalori di A e stabilire (motivando la risposta) se la matrice è definita positiva;
- ii) nel caso $n = 3$ ed $\mathbf{u} = (1 \ 1 \ 1)^T$ determinare $\|A\|_2$ e stabilire, motivando la risposta, se il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = A\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{q}$$

converge;

- iii) nel caso n ed $\mathbf{u}$ generici, determinare gli autovalori di A e stabilire per quali valori di $\|\mathbf{u}\|_2$ la matrice è definita positiva.

- 4) Assegnata la funzione $g(x) = x^2 - x + 1$ ed i nodi

$$x_0 = -h, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = h \quad 0 < h \leq 1;$$

- i) determinare e disegnare il polinomio, $p(x)$ che interpola la funzione $g(x)$ sui nodi assegnati;
- ii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità $\max_{x \in [-1, 1]} |g(x) - p(x)|$;
- iii) calcolare, al variare del parametro h , la quantità

$$\left| \int_{-1}^1 x_0 L_{0,2}(x) dx + \int_{-1}^1 x_1 L_{1,2}(x) dx + \int_{-1}^1 x_2 L_{2,2}(x) dx \right|.$$

($L_{i,n}(x)$ indica l' i -esimo polinomio fondamentale di Lagrange di grado n .)

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO / ANALISI NUMERICA I
30 Novembre, 2005, I Esonero - A

- 1) Data la funzione $q(x) = \frac{1}{x}$, la sua derivata prima nel punto $x = 2$, $q'(2)$, può essere approssimata con una delle due seguenti espressioni analiticamente equivalenti

$$\left(\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h}, \quad -\frac{1}{2(2+h)}, \quad 0 < h < 1;$$

- i) stabilire, motivando la risposta, quale delle espressioni è preferibile usare, dal punto di vista della propagazione degli errori, operando in un prefissato insieme di numeri di macchina ed assumendo che h appartenga a tale insieme;
- ii) assegnato $h = \frac{1}{10}$, determinarne l'approssimazione, $\tilde{h}$, nell'insieme $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento; calcolare, in tale insieme, ciascuna delle espressioni suddette e confrontare i valori ottenuti con $q'(2)$;
- iii) sia $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, e sia $h = \frac{1}{10}$; determinare la rappresentazione, $\tilde{h}$, di h , in $\mathcal{F}(2, 4s, m, M)$, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina assumendo di operare con troncamento.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 4$, localizzare le radici di f ed analizzare la convergenza (determinando eventualmente anche l'ordine) del metodo di Newton per ciascuna di esse;
- ii) nel caso $k = 5$, analizzare la convergenza del metodo di Newton per ciascuna delle radici di f ed in particolare esaminare la successione originata a partire da $x_0 = 1$;
- iii) determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo che il metodo di Newton risulti del terzo ordine per almeno una delle radici di f ;
- iv) nel caso $k = 4$ analizzare (determinando eventualmente anche l'ordine) la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)},$$

per l'approssimazione della radice positiva di f .

- 3) È data la matrice di ordine $2n + 1$

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{2n+1} \quad \text{ove} \quad a_{i,j} = \begin{cases} -\alpha, & \text{se } i = 1, j = 2, 4, \dots, 2n \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{se } i = 1, j = 3, 5, \dots, 2n+1, \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 1$, scrivere esplicitamente la matrice $B = I + A$ e determinarne, se possibile, l'inversa;
- ii) nello stesso caso del punto i) determinare, se possibile, α in modo che risulti minimo $K_\infty(B)$;
- iii) nello caso n generico, posto $B = I + A$, determinare, se possibile, α in modo che risulti minimo $K_\infty(B)$.

- 4) Si consideri la matrice $C = 2nI + A + A^T$ ove A è la matrice dell'esercizio 3) con $\alpha = 1$.

- i) nel caso $n = 2$, scrivere esplicitamente la matrice C e stabilire se risulta irriducibile;
- ii) nel caso $n = 2$, senza calcolare esplicitamente il determinante né gli autovalori:
 - stabilire se C è singolare
 - determinare il segno di $\text{tr}(C^{-1})$ e dare una limitazione inferiore per $|\text{tr}(C^{-1})|$;
- iii) nel caso n generico, dare una limitazione superiore di $\|C\|_2$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
18 Gennaio, 2006, II Esonero - A

1) Si consideri la matrice A di ordine $n \geq 3$ definita come segue:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } |i - j| = 1, \\ \alpha & \text{se } i = 1 \text{ e } j = n, \text{ oppure se } i = n \text{ e } j = 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3, \alpha = 0$, scrivere esplicitamente la matrice e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
- ii) nel caso n, α generici, scrivere esplicitamente la matrice e stabilire per quali valori di α essa ammette la fattorizzazione LU ;
- iii) tenendo presenti i risultati del punto precedente, nel caso n, α , generici determinare per quali valori di α l'applicazione del metodo di eliminazione di Gauss non richiede scambi di righe.

2) Dato il sistema lineare $Ax = b$, ove A è la matrice dell'esercizio precedente e $b \in \mathbb{R}^n$,

- i) nel caso $n = 3, \alpha = 0$, analizzare la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema dato;
- ii) nel caso $n = 3, \alpha = -1$, analizzare la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema dato;
- iii) nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori di α per cui il metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge. (*Sugg. osservare la struttura di A*).
- iv) nel caso n generico, $\alpha = 0$, analizzare la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema dato.

3) Sia p_n , il polinomio di grado minore od uguale ad n che interpola i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, \quad i = 0, \dots, n, \quad f(x) = \cos(\pi x),$$

- i) nel caso $n = 2$, disegnare i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, e determinare, se possibile, il polinomio p_2 scrivendolo sia nella forma di Newton che in quella di Lagrange;
- ii) dopo aver determinato $\max_{x \in [-1,1]} |(x-1)x(x+1)|$, mostrare che

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \pi^3 \sqrt{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

- iii) stabilire se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_n(x)| = 0$.

4) Assegnati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$ ove

$$g(x) = |x^3|, \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N;$$

- i) nel caso $N = 2$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso $N = 2$, determinare e disegnare la parabola che meglio approssima i punti assegnati nel senso dei minimi quadrati;

iii) determinare l'espressione di $S(k) := \sum_{i=0}^k i^3$ come funzione di k sapendo che $S(k)$ è un polinomio di grado 4 rispetto a k .

- iv) tenendo presente il risultato del punto precedente, nel caso N generico, determinare la retta che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- v) determinare il valore di $c \in \mathbb{R}$ che rende minima l'espressione

$$\int_{-1}^1 (g(x) - c)^2 dx$$

e confrontare la retta $y = c$ con quella determinata al punto iv).

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
25 Gennaio, 2006, A

1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{12}, \quad c = b + a;$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e $\tilde{c}$, di a , b e c in $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , b e c e confrontarli con la precisione di macchina ;
- iii) calcolare il valore $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$, e confrontarlo con $\tilde{c}$.
- iv) determinare le rappresentazioni $\tilde{c}$, di c in $\mathcal{F}(2, 2s, -5, 5)$, $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$ in cui si operi con troncamento, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;

2) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $\alpha = 1$, calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU della matrice;
- ii) stabilire per quali valori di α la matrice è a diagonale dominante;
- iii) determinare tutti i valori di α per cui il metodo iterativo Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.
- iv) nel caso $\alpha = 8$ calcolare, se possibile, una fattorizzazione LU della matrice e commentare il risultato ottenuto.

3) Date le funzioni

$$f(x) = x^3 - kx, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{2k}, \quad k > 0,$$

- i) nel caso $k = 1$, disegnare il grafico di f e localizzarne le eventuali radici;
- ii) nel caso $k = 1$, analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- iii) nel caso k generico, analizzare la convergenza (compreso l'ordine) e dare un' interpretazione geometrica del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l' approssimazione delle eventuali radici di f ;
- iv) nel caso k generico, posto $x_{i+1} = g(x_i)$, $i \geq 0$, determinare, se possibile:
 - $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ tale che risulti $x_i = (-1)^i x_0$;
 - $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ tale che risulti $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0$.

4) Assegnati i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = a + i, \quad i = 0, \dots, n, \quad h(x) = \left| \frac{x}{2 + \sin(2\pi x)} \right|,$$

- i) nel caso $n = 2$, $a = -1$, disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, e determinare, se possibile, il polinomio, $p(x)$, che interpola i punti stessi;
- ii) nel caso $n = 4$, $a = -2$, disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, e determinare e disegnare la parabola, $s(x)$, che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- iii) nel caso $a = \frac{1}{4}$, $n \geq 2$ generico, determinare e disegnare la parabola, $q(x)$, che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
16 Febbraio 2006, A

1) Si consideri la matrice H di ordine $n \geq 3$ definita come segue:

$$H = -4I + T, \quad T = (t_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente la matrice e calcolare, se possibile, $\|H\|_\infty$;
- ii) nel caso $n = 3$ calcolare, se possibile, $K_2(H)$ (numero di condizionamento in norma 2 di H);
- iii) nel caso n generico mostrare che $K_2(H) < 3$.

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) determinare per quali valori di α il sistema ammette unica soluzione;
- ii) per i valori di α determinati al punto i), calcolare la soluzione del sistema usando, se possibile, un metodo diretto;
- iii) stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema converge;
- iv) tenendo presente i risultati del punto iii), calcolare gli autovalori di A ;
- v) mostrare che il metodo di Jacobi applicato ad un sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, ove $c_{i,i} = 1$, converge se e soltanto se la matrice C ha autovalori che appartengono, nel piano complesso, all'interno del cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

3) Data la funzione

$$f(x) = x^k(\log x - 1), \quad k = 0, 1$$

- i) nel caso $k = 0$, disegnare il grafico di f e localizzarne le eventuali radici;
- ii) nel caso $k = 0$, analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- iii) nel caso $k = 0$, determinare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 risulti convergente;
- iv) ripetere i punti i), ii) e iii) nel caso $k = 1$.

4) Sia $q(x)$ un polinomio di secondo grado, si consideri la funzione $g(x) = x - x^3 + q(x)$ ed i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, ove

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$

- i) nel caso $q(x) = 1 - x^2$ disegnare i punti assegnati e determinare il polinomio, $p(x)$, che li interpola sia nella forma di Newton che in quella di Lagrange;
- ii) nel caso $q(x)$ generico, determinare il polinomio che interpola i dati assegnati;
- iii) dopo aver calcolato le quantità

$$\max_{x \in [-1, 1]} \sum_{i=0}^2 |L_{i,2}(x)|, \quad \text{e} \quad \max_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{i=0}^2 L_{i,2}(x) \right|,$$

analizzare il condizionamento del calcolo di $p(x)$ rispetto ad una perturbazione dei valori $g(x_i)$, $i = 0, 1, 2$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
7 Luglio, 2006

1) Data la funzione

$$g(x) = \ln(x) + kx, \quad k \in \mathbb{R},$$

studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ analizzando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza, nei seguenti casi:

- i) $k = 1$;
- ii) $k \in [0, 1 - \frac{1}{e})$;
- iii) $k = 1 - \frac{1}{e}$.

2) Date le due espressioni analiticamente equivalenti

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2} - x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x};$$

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di f_1 ed f_2 ;
- ii) stabilire quale delle due espressioni sia preferibile utilizzare dal punto di vista della propagazione dell'errore, operando in un fissato insieme di numeri di macchina, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

3) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 1 - \frac{3}{n} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 1 - \frac{3}{n} & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- i) si mostri che A è definita positiva;
- ii) nel caso $n = 3$ si analizzi la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$ ove $b \in \mathbb{R}^3$.
- iii) nel caso n generico si analizzi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$ ove $b \in \mathbb{R}^n$.

4) Assegnati i punti $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ e le funzioni

$$b_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

- i) nel caso $n = 2$, determinare, se possibile, il polinomio p_2 che interpola la funzione b_1 sui nodi $x_0, \dots, x_n$;
- ii) nel caso n generico determinare, se possibile, il polinomio p_n che interpola la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x)$$

sui nodi $x_0, \dots, x_n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
19 Settembre, 2006

1) Si consideri la matrice A , di ordine $n \geq 2$, definita come segue:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i - 1, \ i = 2, \dots, n \\ 2a & \text{se } i = j = n \\ -a^2 & \text{se } i = n - 1, \ j = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad a > 0;$$

- i) nel caso $n = 2$ scrivere esplicitamente la matrice e calcolare $\|A\|_1$ e tracciarne il grafico al variare di a ;
- ii) nel caso $n = 2$ calcolare, se possibile, $\mu_1(A)$ (numero di condizionamento in norma 1) e determinare il valore di a per cui esso risulta minimo;
- iii) nel caso $n = 3$ calcolare, se possibile, $\mu_\infty(A)$ (numero di condizionamento in norma ∞).

2) Dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = (x - 1)^\alpha + 1, \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $\alpha = 2$ analizzare la convergenza del metodo determinando, eventualmente, anche l'ordine;
- ii) nel caso $0 < \alpha < 1$ analizzare la convergenza del metodo determinando, eventualmente, anche l'ordine;
- iii) nel caso $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ analizzare la convergenza del metodo determinando, eventualmente, anche l'ordine e stabilire se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che la successione originata dal metodo a partire da x_0 converge al più grande dei punti fissi.

3) Sia A la matrice dell'esercizio **1)** si consideri il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + q, \quad q \in \mathbb{R}^n$$

- i) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di a il metodo risulta convergente;
- ii) nel caso $n = 3$, per i valori di a per cui il metodo converge, posto $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, determinare il vettore x^* tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x^*$;
- iii) per $n \geq 3$ generico stabilire per quali valori di a il metodo risulta convergente.

4) Sia $g(x)$ la funzione dell'esercizio **2)**. Assegnati i punti

$$x_i = i^2 + 1, \quad i = 0, \dots, N$$

- i) nel caso $N = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, determinare e disegnare, se possibile, il polinomio p_2 che interpola la funzione $g(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 ;
- ii) nel caso $N = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, determinare e disegnare, se possibile, la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, 1, 2$;
- iii) nel caso $N \geq 2$, $\alpha = 2$ determinare, se possibile, il polinomio p_N che interpola la funzione $g(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_N$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO / ANALISI NUMERICA I
29 Novembre, 2006, I Esonero - A

- 1) Si consideri l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(2, t, m, M)$, $t \in \mathbb{N}$, ove si opera con troncamento ed i numeri reali

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{5}{12}, \quad c = \frac{\pi}{2};$$

- i) nel caso $t = 3$:
- determinare le rappresentazioni, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ di a e b nell'insieme dato, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - calcolare le due espressioni $(2 \oplus \tilde{a}) \oplus \tilde{b}$, $2 \oplus (\tilde{a} \oplus \tilde{b})$, e confrontarle con $2 + a + b$;
- ii) stabilire, motivando la risposta, se in un generico insieme di numeri di macchina vale la proprietà associativa della somma;
- iii) nel caso $t = 4$, determinare la rappresentazione, $\tilde{c}$, di c nell'insieme dato, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina.
- 2) Dato il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ ove

$$g(x) = \frac{1}{4}x^k(x+3), \quad k \in \mathbb{N};$$

- i) nel caso $k = 1$, localizzare i punti fissi di g , analizzare la convergenza del metodo (determinandone eventualmente anche l'ordine) per ciascuno di essi ed esaminare, in particolare, il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = -4$;
- ii) nel caso $k = 3$:
- stabilire se esistono punti fissi, α , di g tali che $g'(\alpha) = 1$;
 - analizzare la convergenza del metodo (determinandone eventualmente anche l'ordine)
 - esaminare (graficamente) il comportamento della successione originata da $x_0 \in (-2, 1)$;
 - esaminare il comportamento della successione originata da $x_0 = -\frac{9}{4}$.

- 3) È data la matrice di ordine n

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\theta}, & \text{se } i = n, \quad j = 1 \\ 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad 0 < \theta \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $n = 2$:
- scrivere esplicitamente la matrice A e determinarne l'inversa;
 - analizzare il condizionamento, rispetto a θ del calcolo degli elementi di A^{-1} e stabilire se esistono valori di θ per cui tale calcolo risulta malcondizionato;
 - determinare, se possibile, θ in modo che risulti minimo $K_\infty(A)$;
- ii) nello caso n generico, determinare θ in modo che $K_1(A)$ risulti minimo.
- 4) Sia $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ la matrice simmetrica

$$H = \begin{pmatrix} \omega & -1 & & & \\ -1 & \omega & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \omega & -1 \\ & & & -1 & \omega \end{pmatrix}, \quad \omega \geq 2.$$

- i) nel caso $n = 3$, determinare $K_2(H)$ senza calcolare esplicitamente H^{-1} ;
- ii) nello caso n generico, mostrare che la matrice H è definita positiva;
- iii) nello caso n generico, mostrare che

$$\omega \geq 2 + \frac{4}{\epsilon} \Rightarrow K_2(H) \leq 1 + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
17 Gennaio, 2007, SCRITTO COMPLETO - A

1) Dato il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, ove

$$g(x) = \frac{1}{1 + |x - k|}, \quad k \in \mathbb{R};$$

i) nel caso $k = 0$:

- mostrare che g ammette un unico punto fisso, α , ed analizzare la convergenza del metodo, determinandone, eventualmente, anche l'ordine,
- esaminare il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = 0$ mostrando, in particolare, che risulta

$$|x_i - \alpha| < |x_{i+1} - x_i| \quad \forall i \geq 0;$$

ii) nel caso $k = 1$:

- mostrare che g ammette un unico punto fisso, β , ed analizzare la convergenza del metodo, determinandone, eventualmente, anche l'ordine,
- esaminare il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = 0$ mostrando, in particolare, che risulta

$$|x_i - \beta| > 2|x_{i+1} - x_i|, \quad \forall i \geq 2.$$

2) Si consideri il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$, ove

$$C = (c_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, \dots, n, \quad j = i, \dots, n \\ \gamma & \text{se } i = n, \quad j = n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n;$$

- i) nel caso $n = 3$, scrivere esplicitamente C e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
- ii) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di γ il metodo di Jacobi applicato al sistema dato risulta convergente;
- iii) nel caso n, γ generici, scrivere esplicitamente la matrice e stabilire per quali valori di γ essa ammette la fattorizzazione LU ;
- iv) tenendo presente il risultato del punto ii) nel caso $\gamma = 0$, mostrare che sia metodo di Jacobi che quello di Gauss-Seidel applicati ad un sistema di ordine n , la cui matrice sia triangolare e non singolare, risultano convergenti.

3) Dati i punti $(x_i, h(x_i))$, ove

$$x_i : -2, -1, 1, 2, \quad \text{ed} \quad h(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2;$$

- i) disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, il polinomio, p , di grado minore od uguale a 3 che li interpola scritto nella forma di Newton;
- ii) tracciare il grafico di h e quello di p e determinare

$$\max_{x \in [-2, 2]} |h(x) - p(x)|;$$

- iii) determinare, se possibile, il polinomio, q , di grado minore od uguale a 3 tale che

$$\begin{aligned} q(-1) &= h(-1), \quad q'(-1) = h'(-1), \\ q(1) &= h(1), \quad q'(1) = h'(1), \end{aligned}$$

e calcolare

$$\max_{x \in [-2, 2]} |h(x) - q(x)|.$$

4) Dati i numeri reali

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{40}, \quad z = \frac{1}{20};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ di x , y e z in $\mathcal{F}(2, 3, -6, 6)$ in cui si operi con troncamento;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per x , y e z e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare il valore $(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) \oplus \tilde{z}$ e $\tilde{x} \oplus (\tilde{y} \oplus \tilde{z})$, determinare l'errore relativo di ciascun risultato rispetto a $x + y + z$ e commentare il risultato.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
17 Gennaio, 2007, II Esonero - A

1) Si consideri il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$, ove

$$C = (c_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, \dots, n, \quad j = i, \dots, n \\ \gamma & \text{se } i = n, \quad j = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n;$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente C e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
- ii) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di γ il metodo di Jacobi applicato al sistema dato risulta convergente;
- iii) nel caso n, γ generici, scrivere esplicitamente la matrice C e stabilire per quali valori di γ essa ammette la fattorizzazione LU ;
- iv) tenendo presente il risultato del punto ii) nel caso $\gamma = 0$, mostrare che sia metodo di Jacobi che quello di Gauss-Seidel applicati ad un sistema di ordine n , la cui matrice sia triangolare e non singolare, risultano convergenti.

2) Dato il sistema lineare di ordine n , $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A = 5I + H$ ed H è la matrice (pentadiagonale)

$$H = (h_{i,j}) = \begin{cases} -1, & \text{se } |i - j| \leq 2, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente A e stabilire se è definita positiva,
 - analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato;
- ii) nel caso n generico:
 - stabilire se A è definita positiva,
 - analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato.

3) Dati i punti $(x_i, y(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$, ove

$$x_i = (i - N)\pi, \quad y(x) = x^2 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(x);$$

- i) nel caso $N = 1$, disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso N generico, determinare, se possibile, la parabola che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti assegnati;
- iii) nel caso N generico, determinare, se possibile, le costanti a_0, a_1 in modo che risulti minima la quantità

$$\sum_{i=0}^{2N} [y(\bar{x}_i) - (a_0 + a_1 \sin(\bar{x}_i))]^2, \quad \text{ove } \bar{x}_i = \frac{\pi}{4} + \frac{x_i}{2}.$$

4) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$, ove

$$x_i : -2, -1, 1, 2, \quad \text{e } f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2;$$

- i) disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, il polinomio, p , di grado minore od uguale a 3 che li interpola scritto nella forma di Newton;
- ii) tracciare il grafico di f e quello di p e determinare $\max_{x \in [-2, 2]} |f(x) - p(x)|$;
- iii) determinare, se possibile, il polinomio, q , di grado minore od uguale a 3 tale che

$$\begin{aligned} q(-1) &= f(-1), \quad q'(-1) = f'(-1), \\ q(1) &= f(1), \quad q'(1) = f'(1), \end{aligned}$$

e calcolare $\max_{x \in [-2, 2]} |f(x) - q(x)|$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
25 Gennaio, 2007, A

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^k}{1+x^2}, \quad k > 0,$$

i) nel caso $k = 1$:

- disegnare il grafico di f ed analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- esaminare il comportamento delle successioni originate dal metodo di Newton a partire da $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e da $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- stabilire se il metodo di Newton converge a partire da qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$;

ii) nel caso $k = 3$:

- analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- mostrare che, detti x_i , $i \geq 0$, i termini della successione generata dal metodo di Newton, risulta $|x_{i+1}| \leq \frac{2}{3}|x_i|$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $i \geq 0$;
- stabilire se il metodo di Newton converge a partire da qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$.

2) Data la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R};$$

i) determinare, possibile, la fattorizzazione LU della matrice;

ii) nel caso $\rho = \frac{1}{9}$, rappresentare gli elementi di L ed U nell'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si opera con troncamento e commentare il risultato ottenuto;

iii) nel caso $\rho = -1$ (operando in precisione infinita) analizzare il problema dell'esistenza ed unicità della fattorizzazione LU di R determinando, eventualmente, da quanti parametri reali dipende la soluzione.

3) Data la matrice A di ordine $n \geq 2$,

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 2(-1)^i, & \text{se } i = j, \\ \alpha, & \text{se } |i - j| = 1, \quad \alpha \in [0, 1), \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

i) nel caso $n = 3$:

- scrivere esplicitamente A e calcolare, se possibile, $\mu_2(A)$;
- stabilire, se possibile, per quali valori di α $\mu_2(A)$ risulta minimo;

ii) nel caso n generico:

- stabilire se A è definita positiva;
- mostrare che $\mu_2(A) \leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$;
- analizzare, al variare di α , la convergenza dei metodi iterativi:

$$x^{(k+1)} = (I + A)x^{(k)} + \mathbf{q}, \quad x^{(k+1)} = (I - A)x^{(k)} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

4) Assegnati i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = i - a, \quad h(x) = \max(0, 2x),$$

i) nel caso $n = 2$, $a = 1$,

- disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, e determinare, se possibile, il polinomio, $p(x)$, che li interpola e calcolare $\max_{x \in [-1, 1]} |h(x) - p(x)|$;
- determinare, se possibile, la parabola, $q(x)$, che meglio approssima nel senso di minimi quadrati i dati assegnati;

ii) nel caso $a = -1$, $n \geq 2$ generico, determinare la retta, $r(x)$, che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
13 Febbraio, 2007, A

1) Dato il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ ove

$$g(x) = \frac{kx}{1+x^2}, \quad 1 \leq k \leq 2,$$

- i) nel caso $k = 2$, disegnare il grafico di g ed analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g ;
- ii) nel caso $k = 1$, disegnare il grafico di g ed analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g ;
- iii) nel caso $k \in (1, 2)$, analizzare la convergenza (compreso l'ordine) del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g .

2) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \geq 0;$$

- i) determinare, se possibile, la fattorizzazione LU di A ;
- ii) calcolare $\|A\|_1$, $\|L\|_1$ e $\|U\|_1$ e stabilire se, essendo $A = LU$, risulta $\|A\|_1 = \|L\|_1 \|U\|_1$;
- iii) nel caso $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$, rappresentare α nell'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si opera con troncamento e calcolare in tale insieme $\|A\|_1$, $\|L\|_1$ e $\|U\|_1$;
- iv) confrontare e commentare i risultati ottenuti nei punti ii) e iii).

3) Assegnati i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = \frac{i}{n}\pi, \quad h(x) = \sin x,$$

- i) nel caso $n = 2$:
 - disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$,
 - determinare, se possibile, il polinomio, $p_2(x)$, che li interpola,
 - determinare e disegnare la retta, $r(x)$, che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso $n \geq 2$, detto p_n il polinomio di grado minore od uguale ad n che interpola i punti assegnati,
 - mostrare che

$$\max_{x \in [0, \pi]} |h(x) - p_n(x)| \leq \frac{\pi^3}{6} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-2};$$

- stabilire se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0, \pi]} |h(x) - p_n(x)| = 0$.

4) Data l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 2ax + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $a > 1$, analizzare il condizionamento delle radici dell'equazione rispetto al parametro a ;
- ii) nel caso $a \geq 2$, stabilire, motivando la risposta, se esistono valori di a per cui il calcolo qualche radice dell'equazione può presentare il fenomeno della cancellazione numerica

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
3 Luglio, 2007

- 1) Dato l'insieme di numeri di macchina $F(2, 4, -4, 4)$ ove si operi con troncamento, e siano

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 8.5.$$

Determinare, se possibile

- i) le rappresentazioni $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ rispettivamente di a e b in $F(2, 4, -4, 4)$;
- ii) determinare, se possibile, gli errori relativi di rappresentazione e confrontarli con la precisione di macchina.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - kx^2, \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 1$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) nel caso $k < 0$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza. Analizzare in particolare il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = \frac{1}{4}$ per $k = -4$.

- 3) Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$ la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & & 1 - \frac{3}{n} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 1 - \frac{3}{n} & & & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- i) si mostri che A è definita positiva;
- ii) nel caso $n = 3$ si analizzi la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$ ove $b \in \mathbf{R}^3$, determinando esplicitamente il raggio spettrale delle matrici di iterazione di ciascuno dei due metodi.

- 4) Assegnati i punti x_i , $i = 0, \dots, n$ con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e la funzione

$$f_k(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i), \quad k < n,$$

- i) nel caso $k = 3$, $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, tracciare il grafico di f_3 e determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione f_3 sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 ;
- ii) nel caso k generico, determinare, se possibile, il polinomio p_k che interpola la funzione f_k sui nodi $x_0, \dots, x_k$;
- ii) determinare, se possibile, il polinomio p_n che interpola la funzione f_k sui nodi $x_0, \dots, x_n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ANALISI NUMERICA 1
Prof. Carla MANNI
20 Settembre, 2007

1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed i numeri razionali

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = \frac{1}{4};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e di a , b in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , e b e confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare il valore $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \otimes (\frac{1}{2})$ determinare l'errore relativo rispetto al punto medio dell'intervallo $[a, b]$ e confrontarlo con l'errore relativo sugli estremi dell'intervallo stesso.

2) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- i) nel caso $\alpha = 2$ si determini $\|A\|_2$
- ii) nel caso $\alpha = 2$ si calcoli il numero di condizionamento, in norma 2, di A .
- iii) calcolare, al variare del parametro α , il minimo valore assunto dal numero di condizionamento, in norma 2, di A .

3) Data la funzione

$$g(x) = -x^2 + x + k;$$

- i) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = \frac{1}{4}$, discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- ii) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k = 0$, discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;
- iii) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ nel caso $k \in (0, \frac{1}{4})$ discutendo, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

4) Data la funzione

$$h(x) = x^{\frac{1}{10}}, \quad x \in [0, 1]$$

- i) determinare il polinomio $p_1(x)$ che interpola la funzione $h(x)$ nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e disegnarne il grafico;
- ii) determinare la costante a_0 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $h(x)$ nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e disegnarne il grafico;
- iii) mostrare che

$$\max_{x \in [0, 1]} |h(x) - p_1(x)| > \max_{x \in [0, 1]} |h(x) - a_0|.$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 27 Novembre, 2007: A

1) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in [0, 1],$$

- i) stabilire per quali valori di a la matrice risulta ortogonale;
- ii) determinarne, se possibile, l'inversa;
- iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e posto $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ determinare la rappresentazione di A e di A^{-1} in tale insieme;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(\beta, 2t+1, m, M)$ in cui si operi con troncamento la matrice A risulta ortogonale per $0 \leq a < \beta^{-t}$.

2) Data la funzione:

$$g(x) = kx^2(2-x), \quad k > 0,$$

- i) stabilire se esistono valori di k per cui g ammette punti fissi, α , tali che $|g'(\alpha)| = 1$;
- ii) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, discutendone eventualmente anche l'ordine di convergenza, nei seguenti casi:
 - $k = 1$,
 - $k \in (1, 4/3)$;
- iii) ipotizzando che g descriva la funzione di iterazione del metodo di Newton applicato ad una opportuna funzione f regolare, stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è corretta:
la funzione f ha una radice doppia in $x = 0$.

3) Si consideri la matrice $H = I + B$ ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad b_{i,j} = \begin{cases} b^{|i-j|}, & \text{se } j = 1, i = 2, \dots, n, \\ b^{|i-j|}, & \text{se } i = 1, j = 2, \dots, n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad b \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $n = 3$, scrivere esplicitamente H e calcolare $\|B\|_\infty$;
- ii) nel caso n generico e $b \in [0, 1/2)$, mostrare che H è invertibile;
- iii) nel caso n generico e $b \in (0, 1/2)$, senza calcolare esplicitamente H^{-1} , mostrare che $\mu_\infty(H) < \frac{1}{1-2b}$.

4) Sia H la matrice dell'esercizio 3):

- i) nel caso $n = 3$, $b \in \mathbb{R}$ scrivere esplicitamente H e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU , discutendo in dettaglio il caso $b = 1$;
- ii) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di b la matrice H ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- iii) nel caso n generico e $b \in [0, 1/\sqrt{2}]$, mostrare che H ammette unica fattorizzazione LU ;
- iv) nel caso n generico e $b \in [0, 1/\sqrt{2}]$, mostrare che H ammette la fattorizzazione di Cholesky.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
II Esonero: 22 Gennaio, 2008: A

1) Dati i polinomi:

$$b_n^{(k)}(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

ed i punti

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n, \quad t_k \in [0, 1], \quad k = 0, \dots, n$$

si consideri il sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{q}$, ove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$B := \begin{pmatrix} b_n^{(0)}(t_0) & b_n^{(1)}(t_0) & \dots & b_n^{(n)}(t_0) \\ b_n^{(0)}(t_1) & b_n^{(1)}(t_1) & \dots & b_n^{(n)}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^{(0)}(t_n) & b_n^{(1)}(t_n) & \dots & b_n^{(n)}(t_n) \end{pmatrix}$$

i) nel caso $n = 2$, $t_0 = 0$, $t_2 = 1$:

- scrivere esplicitamente la matrice B ;
- stabilire per quali valori di t_1 il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
- stabilire per quali valori di t_1 il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;

ii) nel caso n e t_k generici:

- mostrare che il vettore $(1, 1, \dots, 1)^T$ è autovettore di B e calcolare $\|B\|_\infty$ e $\rho(B)$;
- analizzare la convergenza del metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(B^2 - B)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$.

2) Si consideri la funzione $h(x) = \max(0, x)$ e la sequenza di $2N$ punti

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_N & x_{N+1} & \dots & x_{2N} \\ -N & -N+1 & \dots & -1 & 1 & \dots & N \end{array}$$

- i) nel caso $N = 2$, calcolare la retta che meglio approssima h nel senso dei minimi quadrati sui punti assegnati;
- ii) nel caso N generico calcolare la retta che meglio approssima h nel senso dei minimi quadrati sui punti assegnati;
- iii) nel caso N generico, determinare $s \in S_1^0[-N, -1, 0, 1, N]$ (*spline di grado 1*, C^0) tale che risulti minima la quantità

$$\sum_{i=1}^{2N} [h(x_i) - s(x_i)]^2.$$

3) Si consideri il polinomio p_n (espresso nella forma di Lagrange) interpolante i dati

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad f_i := f(x_i).$$

- i) nel caso $n = 2$, $f(x) = 1 + x - x^2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ scrivere esplicitamente (utilizzando la forma di Lagrange) il polinomio $p_2(x)$ e calcolare $\max_{x \in [x_0, x_n]} \sum_{i=0}^n |L_{i,2}(x)|$
- ii) nel caso $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, f generica, mostrare che

$$|p_2(x)| \leq \frac{5}{4} \max_{i=0,1,2} |f_i|, \quad \forall x \in [x_0, x_2];$$

iii) nel caso generale, stabilire, motivando la risposta, se le seguenti disuguaglianze sono corrette $\forall x \in [x_0, x_n]$

$$\min_{i=0, \dots, n} f_i \leq p_n(x) \leq \max_{i=0, \dots, n} f_i, \quad |p_n(x)| \leq \max_{i=0, \dots, n} |f_i|.$$

4) Per approssimare $\int_{-1}^1 f(x) dx$ si considera la formula di quadratura

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1), \quad \text{con } x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- i) determinare i pesi w_0, w_1 in modo che la formula abbia grado di precisione (polinomiale) massimo;
- ii) utilizzare la formula ottenuta per approssimare $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2) dx$ e confrontare il risultato con il valore esatto dell'integrale;
- iii) stabilire se, utilizzando solo due nodi (eventualmente diversi da quelli assegnati), si può ottenere una formula di quadratura di grado più elevato;
- iv) senza effettuare nessun ulteriore calcolo valutare $\int_{-1}^1 (3x^2 - 1)r(x) dx$ ove $r(x)$ è un qualunque polinomio di grado minore od uguale ad 1.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
31 Gennaio, 2008: A

1) Data la funzione

$$r(x) = x^2 + \cos(x) - k, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad k > 0$$

i) nel caso $k = 2$:

- localizzare le eventuali radici di r ;
- analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di r ;

ii) determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo che la funzione r abbia una radice doppia ed analizzare in tal caso la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione della radice in questione.

2) Sia $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si consideri la matrice di ordine $n+1$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \sigma & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \sigma & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

i) nel caso $n = 2$

- stabilire per quali valori di σ la matrice ammette la fattorizzazione LU
- per $\sigma = 1$ calcolare, se possibile, una fattorizzazione LU di S ,
- mostrare che per $\sigma > 1$ la matrice ammette la fattorizzazione di Cholesky;

ii) nel caso n generico, $\sigma > n$, analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $S\mathbf{x} = \mathbf{q}$.

3) Assegnata la funzione $g(x) = -x^2 + 1$ ed i nodi

$$x_0 = -h, \quad x_1 = h, \quad 0 < h \leq 1;$$

i) determinare e disegnare il polinomio, $p(x)$ che interpola la funzione $g(x)$ sui nodi assegnati

ii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\max_{x \in [-1, 1]} |g(x) - p(x)|;$$

iii) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\left| \int_{-1}^1 L_{0,1}(x) dx + \int_{-1}^1 L_{1,1}(x) dx \right|.$$

iv) calcolare il grado di precisione della formula di quadratura interpolatoria con nodi x_0, x_1 per il valore di h determinato al punto ii) per approssimare $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

4) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si considera il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha hf(x_i, \eta_i)) \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

i) analizzare al variare di α l'ordine del metodo e stabilire se esistono valori di α per cui il metodo risulta implicito;

ii) dato il problema del secondo ordine

$$z'' = 4z, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = -2,$$

- determinarne la soluzione;
- approssimarne la soluzione in $x = .1$ utilizzando 1 passo del metodo di Eulero con $h = .1$
- approssimarne la soluzione in $x = .1$ utilizzando 1 passo del metodo assegnato con $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = .1$ e confrontare i risultati ottenuti.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 26 Novembre, 2008: B

1) Si consideri la matrice $S = B^T B$ ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad b_{i,j} = \begin{cases} b, & \text{se } j = 1, \ i = n, \\ 1 & \text{se } i = j, \ j = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad b \geq 0.$$

Nel caso $n = 3$:

- i) scrivere esplicitamente S e calcolarne il raggio spettrale;
- ii) analizzare il condizionamento del calcolo del raggio spettrale di S rispetto al parametro b e stabilire se esistono valori del parametro per cui tale calcolo risulta malcondizionato;
- iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento calcolare il raggio spettrale di S in tale insieme per $b = \frac{1}{2}$, eseguendo tutte le operazioni richieste nella corrispondente aritmetica.

2) Siano S, B le matrici dell'esercizio 1):

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente B e calcolare $\|B\|_2$;
- ii) nel caso $n = 3$, calcolare $\mu_2(S)$ e $\mu_2(B)$;
- iii) nel caso n generico, determinare, se possibile, valori di b per cui $\mu_2(B)$ risulta minimo;
- iv) nel caso n generico, dimostrare che $\mu_2(B) \leq \mu_2(S)$ indipendentemente da b .

Sugg. *si tenga presente che date due qualsiasi matrici $C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ risulta che CD e DC hanno gli stessi autovalori*

3) Sia B la matrice dell'esercizio 1):

- i) nel caso $n = 3$, calcolare $\mu_\infty(B)$;
- ii) nel caso n generico, calcolare $\mu_\infty(B)$;
- iii) nel caso n generico, calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU di BB^T .

4) Data la funzione:

$$f(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $k = 0$, analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici reali di f , determinandone eventualmente anche l'ordine di convergenza;
- ii) determinare, se esistono, i valori di k per cui il metodo di Newton risulta del terzo ordine per una radice negativa di f ;
- iii) determinare, se esistono, i valori di k per cui il metodo di Newton risulta del primo ordine per tutte le radici reali di f .

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 26 Gennaio, 2009: B

1) Si consideri il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v}_i := (-1)^{i+1}$, $i = 1, \dots, n$ e le matrici

$$A := \alpha I + C, \quad C := \mathbf{v}\mathbf{v}^T, \alpha > 0.$$

i) Nel caso $n = 3$:

- scrivere esplicitamente C e calcolarne gli autovalori;
- stabilire per quali valori di α la matrice A è definita positiva;
- analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

ii) Nel caso n generico

- determinare il rango di C
- mostrare che $\mathbf{v}$ è autovettore di C ;
- calcolare tutti gli autovalori di C ;
- analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

2) Dati i punti

$$(x_i, f(x_i)), \quad \text{ove } f(x) = |x^3| - 3x^2, \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N$$

- i) nel caso $N = 1$, determinare il polinomio p_2 di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
- ii) nel caso $N = 2$, determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- iii) nel caso $N \geq 3$ generico, determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale ad N che interpola i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, N$;
- iv) nel caso N generico, determinare, se possibile, la spline cubica naturale, s , con nodi in x_i , $i = 0, \dots, 2N$ (ossia $s \in S_3^2[x_0, \dots, x_{2N}]$, $s''(x_0) = s''(x_{2N}) = 0$) che interpola i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$.

3) Sia f la funzione dell'esercizio precedente.

- i) approssimare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ tramite la formula dei trapezi e confrontare il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale;
- ii) tenendo presente il punto i) dell'esercizio precedente, approssimare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ tramite $\int_{-1}^1 p_2(x)dx$ e tramite la formula di Simpson;
- iii) stabilire perché, pur avendo la formula di Simpson grado di precisione 3 l'approssimazione da essa fornita al punto precedente non fornisce il valore esatto dell'integrale. Che cosa cambierebbe se si usasse la formula composta di Simpson utilizzando due sottointervalli (uguali)?

4) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si considera il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h [\alpha f(x_i, \eta_i) + (1 - \alpha)f(x_{i+1}, \eta_{i+1})] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots$$

- i) stabilire se esistono valori di α per cui il metodo risulta implicito;
- ii) nel caso

$$f(x, y) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad y_0 = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

- determinarne la soluzione del problema di Cauchy assegnato;
- approssimare la soluzione in $x_1 = h$ utilizzando 1 passo del metodo fornito e confrontare il risultato ottenuto con il corrispondente valore della soluzione esatta.
- determinare, se esistono i valori di n per cui il metodo assegnato fornisce la soluzione esatta del problema di Cauchy in ogni punto x_i per ogni valore di h .
- iii) nel caso generale, analizzare al variare di α l'ordine del metodo.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
2 Febbraio, 2009: A

- 1) Si consideri un quadrato di lato $2r$ ed il cerchio in esso inscritto. Sia $\mathcal{A}$ l'area della regione di piano interna al quadrato ed esterna al cerchio.
- analizzare il condizionamento di $\mathcal{A}$ rispetto ad r
 - nel caso $r = 1$ determinare la rappresentazione $\tilde{\mathcal{A}}$, di $\mathcal{A}$ nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e confrontare l'errore relativo di rappresentazione con la precisione di macchina.
 - nel caso $r = 2^{-k}, k = 0, 1, \dots$, determinare la rappresentazione $\tilde{\mathcal{A}}$, di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento.

- 2) Dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = x^3 - x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

- nel caso $k = 0$, analizzare la convergenza del metodo, determinando eventualmente anche l'ordine, per approssimare gli eventuali punti fissi di g ;
- determinare, se possibile, tutti i valori di k per cui la convergenza del metodo per l'approssimazione di eventuali punti fissi di g risulta sublineare;
- determinare, se possibile, tutti i valori di k per cui g ammette un solo punto fisso.

- 3) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice (tridiagonale)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a + \lambda & & & 0 \\ a - \lambda & 2 & a + \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a - \lambda & 2 & a + \lambda \\ 0 & & & a - \lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [-a, a], \quad 0 < a \in \mathbb{R}$$

- nel caso $n = 3$ determinare tutti i valori di a t.c. il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ risulta convergente per ogni $\lambda \in [-a, a]$.
- nel caso $n = 3$ determinare tutti i valori di a t.c. il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ risulta convergente per ogni $\lambda \in [-a, a]$.
- nel caso n generico, $0 < a < 1$, $\lambda = 0$
 - stabilire se A è invertibile
 - determinare, se possibile, una maggiorazione di $\mu_2(A)$
 - determinare, se possibile, una maggiorazione di $\|A\|_F$ (Si ricorda $\|B\|_F := \sqrt{\text{tr}(B^T B)}$)

- 4) Dati i punti (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$, ove

$$x_k = \sqrt{t_k}, \quad y_k = t_k - 5\sqrt{t_k} + 6, \quad t_k := k^2, k = 0, \dots, n$$

- nel caso $n = 2$, determinare e disegnare i punti assegnati;
- nel caso $n = 2$, determinare se possibile, il polinomio di grado minore o uguale a 2, p_2 , tale che $p_2(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2$;
- nel caso $n = 3$ disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, la parabola che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- nel caso n generico, $n > 2$, determinare, se possibile, la parabola che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti assegnati;
- nel caso n generico, $n \geq 2$, sia f una qualsiasi funzione continua in $[0, n]$ tale che

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n$$

calcolare il valore approssimato di $\int_0^n f(x)dx$ che si ottiene tramite la formula di quadratura interpolatoria in $[0, n]$ avente nodi x_k , $k = 0, \dots, n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
17 Febbraio, 2009: A

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con arrotondamento ed i numeri razionali

$$b = \frac{1}{7}, \quad a = \frac{1}{8};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e di a , b in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , e b confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare i valori $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \otimes (\frac{1}{2})$ e $\tilde{a} \oplus ((\tilde{b} \ominus \tilde{a}) \otimes (\frac{1}{2}))$, e determinare l'errore relativo di ciascuno di essi rispetto al punto medio dell'intervallo $[a, b]$.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = (\ln x)^k;$$

- i) nel caso $k = 1$:
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f , determinando eventualmente anche l'ordine,
 - determinare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 converge in modo monotono ad una radice di f
 - determinare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 converge ad una radice di f
- ii) nel caso $k = 2$:
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f , determinando eventualmente anche l'ordine,
 - determinare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 converge in modo monotono ad una radice di f
 - determinare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 converge ad una radice di f .

- 3) Si consideri la matrice $H = I + A$ ove

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha^{|i-j|}, & \text{se } j = 1, i = 2, \dots, n, \\ \alpha^{|i-j|}, & \text{se } i = 1, j = 2, \dots, n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $n = 3$, scrivere esplicitamente H e calcolare $\|A\|_\infty$;
- ii) nel caso n generico e $\alpha \in (0, 1/2)$, mostrare che H è invertibile;
- iii) nel caso n generico e $\alpha \in (0, 1/2)$, senza calcolare esplicitamente H^{-1} , mostrare che

$$\mu_\infty(H) < \frac{1}{1 - 2\alpha}.$$

- iv) nel caso n generico stabilire, se possibile, per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ converge.

- 4) Dati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$, ove

$$x_i = (N - i)\pi, \quad g(x) = x^2 \cos(2x) - \pi \sin(x);$$

- i) nel caso $N = 1$, disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, la parabola che li interpola;
- ii) nel caso $N = 2$, determinare, se possibile, la parabola che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti assegnati;
- iii) nel caso $N > 1$ generico, determinare, se possibile, la parabola che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti assegnati;
- iii) nel caso $N \geq 1$ generico, calcolare il valore approssimato di $\int_{-N\pi}^{N\pi} g(x) dx$ che si ottiene tramite la formula di quadratura interpolatoria in $[-N\pi, N\pi]$ avente nodi x_i , $i = 0, \dots, 2N$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
1 Luglio, 2009: A

- 1) Data la funzione $q(x) = \frac{1}{x^2}$, la sua derivata prima nel punto $x = 2$, $q'(2)$, può essere approssimata con una delle due seguenti espressioni analiticamente equivalenti

$$\left(\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{h}, \quad -\frac{4+h}{4(2+h)^2}, \quad 0 < h \ll 1;$$

- i) stabilire, motivando la risposta, quale delle espressioni è preferibile usare, dal punto di vista della propagazione degli errori, operando in un prefissato insieme di numeri di macchina ed assumendo che h appartenga a tale insieme;
- ii) assegnato $h = \frac{1}{10}$, determinarne l'approssimazione, $\tilde{h}$, nell'insieme $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento; calcolare, in tale insieme, ciascuna delle espressioni suddette e confrontare i valori ottenuti con $q'(2)$.

- 2) Data la funzione

$$r(x) = k - \sqrt{x}, \quad k \geq 0$$

- i) nel caso $k = 1$:
 - localizzare le eventuali radici di r ;
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di r ;
- ii) nel caso $k = 0$:
 - localizzare le eventuali radici di r ;
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di r ;
- ii) nel caso k generico: determinare tutti i valori iniziali x_0 per i quali il metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di r origina successioni convergenti.

- 3) Si consideri la matrice $H = I + A$ ove

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha^i, & \text{se } j = n - i + 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

- i) nel caso $n = 3$, scrivere esplicitamente H e calcolare $\|A\|_\infty$;
- ii) nel caso n generico e $\alpha \in (0, 1)$, mostrare che H è invertibile;
- iii) nel caso n generico e $\alpha \in (0, 1)$, senza calcolare esplicitamente H^{-1} , mostrare che

$$\mu_\infty(H) \leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

- iv) nel caso n generico stabilire, se possibile, per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ converge.

- 4) Per approssimare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ si considera la formula di quadratura

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1), \quad \text{con } x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- i) determinare i pesi w_0, w_1 in modo che la formula abbia grado di precisione (polinomiale) massimo;
- ii) utilizzare la formula ottenuta per approssimare $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2)dx$ e confrontare il risultato con il valore esatto dell'integrale;
- iii) stabilire se, utilizzando solo due nodi (eventualmente diversi da quelli assegnati), si può ottenere una formula di quadratura di grado più elevato;
- iv) senza effettuare nessun ulteriore calcolo valutare $\int_{-1}^1 (3x^2 - 1)r(x)dx$ ove $r(x)$ è un qualunque polinomio di grado minore od uguale ad 1.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 25 Novembre, 2009: B

1) Data la matrice $P = LR$ ove

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, p > 0,$$

- i) stabilire per quali valori di p la matrice P risulta singolare;
- ii) analizzare il condizionamento del calcolo degli elementi di P rispetto ad p ;
- iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e posto $p = 3\sqrt{2}$ determinare la rappresentazione di P in tale insieme;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ in cui si operi con troncamento la matrice P risulta singolare per $p \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$, $p > \beta^t - 1$.

2) Data la funzione:

$$f(x) = x^2(3 - x) - k, \quad k > 0,$$

- i) nel caso $k = 0$
 - tracciare il grafico di f ed analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimarne le radici
 - mostrare che il metodo di Newton applicato alla funzione f genera una successione monotona decrescente convergente a 0 per ogni $0 < x_0 \leq \frac{3}{2}$
 - senza effettuare ulteriori calcoli, indicando con g la funzione di iterazione del metodo di Newton applicato alla funzione f , stabilire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono corrette:
 - a) la funzione g ha una singolarità in $x = 2$
 - b) la funzione g ha un punto stazionario in $x = 3$
 - c) la funzione g ha come unica radice $x = 0$.
- ii) stabilire se esistono valori di k per cui il metodo di Newton risulta del terzo ordine per qualche radice di f .

3) Si consideri la matrice $H = I + B$ ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad b_{i,j} = \begin{cases} \beta, & \text{se } j = i - 1, \quad i = 2, \dots, n, \\ \beta, & \text{se } j = i + 1, \quad i = 1, \dots, n - 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \beta \geq 0,$$

- i) nel caso $n = 3$,
 - scrivere esplicitamente H e determinare tutti i valori di β per cui essa risulta definita positiva;
 - calcolare, quando possibile, $\|H\|_2$, $\mu_2(H)$, $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mu_2(H)$
- ii) nel caso n generico e $\beta \leq 1/2$, mostrare che H è invertibile e definita positiva;
- iii) nel caso n generico determinare un valore di β per cui $\mu_\infty(H)$ risulta minimo.
- iv) nel caso n generico, $\beta > 0$, dare una maggiorazione di $\|B\|_2$;
- v) nel caso n generico, $\beta > 0$, determinare, se possibile, un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\|\mathbf{x}\|_2 = 1, \quad \|B\mathbf{x}\|_2 = 2\beta.$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 20 Gennaio, 2010: B

1) Data la matrice, B , diagonale a blocchi di ordine $2n$ definita come segue

$$B = (b_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2n, \\ -\beta & \text{se } j = i + 1, \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \\ \beta & \text{se } j = i - 1, \quad i = 2, 4, 6, \dots, 2n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R};$$

i) nel caso $n = 2$

- scrivere esplicitamente B e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
- stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
- stabilire per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;

ii) nel caso n generico, scrivere esplicitamente la matrice B e, indicato con B_k il minore principale di testa di ordine k della matrice stessa, calcolare

$$\det B_k, \quad k = 1, \dots, 2n;$$

iii) nel caso n generico mostrare che la matrice B ammette la fattorizzazione LU , $\forall \beta \in \mathbb{R}$;

iv) tenendo presente il risultato dei punti ii) e iii), stabilire se il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \widehat{U}\mathbf{x}^k + L^{-1}\mathbf{b}, \quad \text{ove } I - \widehat{U} = U, \quad LU = B$$

può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e, in caso affermativo, analizzarne la convergenza.

2) Dati i punti

$$(x_i, f(x_i)), \quad \text{ove } f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N;$$

i) nel caso $N = 1$,

- disegnare la funzione data i punti assegnati;
- determinare il polinomio p_2 di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
- mostrare che

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

ii) nel caso N generico, indicato con p_{2N} il polinomio di grado minore o uguale a $2N$ che interpola i dati assegnati, mostrare che

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_{2N}(x)| < 2^{-N};$$

iii) nel caso N generico, indicato con q_{2N} il polinomio di grado minore o uguale a $2N$ che interpola f sui nodi di Chebyshev, mostrare che

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - q_{2N}(x)| \leq \frac{1}{2^{2N}}.$$

3) Sia f la funzione dell'esercizio precedente:

- i) approssimare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ tramite la formula del punto medio e la formula dei trapezi confrontando in ciascuno dei due casi il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale;
(si tenga presente che $\ln(3) \cong 1.098612$).
- ii) sia $g \in C^1[a, b]$ e sia data la formula di quadratura

$$\int_a^b g(x)dx \cong g(x_0)(b-a) + g'(x_0)\frac{1}{2}[(b-x_0)^2 - (a-x_0)^2], \quad x_0 \in [a, b]$$

- darne un'interpretazione geometrica;
- stabilire se, per opportune scelte di $x_0 \in [a, b]$, la formula si riduce ad una formula di quadratura interpolatoria nota;
- posto $x_0 = 0$, approssimare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ tramite la formula suddetta e confrontare il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale;

iii) data una funzione convessa g , $g \in C^1[a, b]$, mostrare che:

- la formula dei trapezi fornisce un'approssimazione per eccesso di $\int_a^b g(x)dx$;
- la formula del punto ii) fornisce un'approssimazione per difetto di $\int_a^b g(x)dx$, $\forall x_0 \in [a, b]$;
- la formula del punto medio fornisce un'approssimazione per difetto di $\int_a^b g(x)dx$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1

2 Febbraio, 2010: A

- 1) Si considerino un quadrato di lato l ed un triangolo equilatero di lato $2l$. Sia $\mathcal{A}$ la differenza fra l'area del triangolo e quella del quadrato.

- i) analizzare il condizionamento di $\mathcal{A}$ rispetto ad l
- ii) nel caso $l = 1$ determinare la rappresentazione $\tilde{\mathcal{A}}$, di $\mathcal{A}$ nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e confrontare l'errore relativo di rappresentazione con la precisione di macchina.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^k + 1}{2} \right);$$

- i) nel caso $k = 1$:
 - disegnare il grafico di f e localizzarne le eventuali radici;
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le radici di f determinando eventualmente anche l'ordine;
 - determinare il massimo valore a , tale che il metodo di Newton per l'approssimazione della radice positiva di f converge $\forall x_0 \in (-1, a)$;
- ii) nel caso $k = 2$:
 - disegnare il grafico di f e localizzarne le eventuali radici;
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le radici di f determinando eventualmente anche l'ordine;
 - mostrare che il metodo di Newton per l'approssimazione della radice positiva di f converge $\forall x_0 \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}})$.

- 3) Si consideri la matrice A di ordine $n \geq 3$ definita come segue:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i - 1 = j, \\ \alpha & \text{se } i = 2 \text{ e } j = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente la matrice, stabilire per quali valori del parametro α la matrice ammette la fattorizzazione LU e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa;
 - ii) nel caso n generico, stabilire per quali valori del parametro α la matrice ammette la fattorizzazione LU e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa;
 - iii) nel caso n generico, stabilire per quali valori del parametro α la matrice risulta a diagonale dominante e irriducibile;
 - iv) dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:
 - nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
 - nel caso n generico, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge.
- 4) Dati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove $x_i = i$, $g(x) = x + \cos(2\pi x)$;
- i) nel caso $n = 2$, disegnare i punti assegnati e determinare se possibile, il polinomio, p , che interpola i dati assegnati scritto nella forma di Newton;
 - ii) nel caso n generico, determinare, se possibile, il polinomio che interpola i dati assegnati e calcolare i valori $g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$, $0 \leq k \leq n$;
 - iii) nel caso $n > 1$ generico, determinare, se possibile, la parabola che meglio approssima nel senso di minimi quadrati i dati assegnati.

- 5) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2} [f(x_i, \eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_{i+1})] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots$$

- i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;
- ii) posto $f = 2x + 1$, $y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih$, $i = 0, \dots$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 7 Dicembre, 2010: A

1) Data il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ove

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad x_i = \begin{cases} \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \text{se } i = 1, \\ \frac{2t}{1+t^2}, & \text{se } i = n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad t \geq 0,$$

- i) analizzare il condizionamento del calcolo delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto a t ;
- ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e posto $t = \frac{1}{2\sqrt{2}}$:
 - determinare la rappresentazione di $\tilde{t}$ di t in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di x_n in tale insieme;
- iii) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera (si ricorda che tutte le operazioni richieste devono essere effettuate nell'aritmetica di macchina)
posto $t = \frac{1}{2^r\sqrt{2}}$, nell'insieme nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2r+2, m, M)$ in cui si operi con troncamento risulta $x_n = 2\tilde{t}$, ove $\tilde{t}$ indica la rappresentazione di t nell'insieme di numeri di macchina assegnato.

2) Si consideri il vettore $\mathbf{x}$ dell'esercizio 1).

- i) Nel caso $n = 2$, $t = 1$, determinare, se possibile, una matrice P ortogonale e simmetrica tale che

$$P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- ii) nel caso $n = 2$, $t \geq 0$ generico, determinare, se possibile, una matrice P ortogonale e simmetrica tale che

$$P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix};$$

- iii) nel caso n e $t \geq 0$ generici, determinare, se possibile, una matrice P ortogonale e simmetrica tale che

$$P\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \text{ ove } \mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T;$$

- iv) detta P la matrice del punto precedente, determinare

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|P\|_F, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \|P\|_2, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \mu_\infty(P), \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \det(P).$$

3) Data la funzione:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $k = 0$
 - tracciare il grafico di g ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione di punti fissi di g ;
 - mostrare che, detto α un punto fisso di g , per ogni $\gamma > 0$ si ha

$$|x_i - \alpha| \leq \gamma \Rightarrow |x_{i+1} - \alpha| < \gamma^2 |x_i - \alpha|, \quad i = 0, \dots$$

- determinare, se possibile, x_0 tale che

$$|x_0 - \alpha| \geq \frac{1}{10}, \quad |x_2 - \alpha| < 10^{-9};$$

- ii) determinare per quali valori di k il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta convergente per almeno un punto fisso di g ;
- iii) stabilire se esistono valori di k per i quali il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta avere convergenza sublineare per qualche punto fisso di g .
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
nel caso $k = \frac{\sqrt{3}}{4}$ risulta

$$g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad g'(\sqrt{3}) \neq 0, \quad g''(\sqrt{3}) = 0,$$

quindi il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ è almeno del terzo ordine per il punto fisso $\alpha = \sqrt{3}$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
II Esonero: 25 Gennaio, 2011: B

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove

$$A = I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad \mathbf{v}^T = (\sqrt{\gamma}, 0, \dots, 0, \sqrt{\gamma}), \quad \gamma \in [0, 1], \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3$$

- i) nel caso $n = 3$
 - scrivere esplicitamente la matrice A ;
 - stabilire per quali valori di γ il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
- ii) nel caso n generico:
 - calcolare gli autovalori di A ;
 - stabilire per quali valori di γ il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
- iii) nel caso n generico, $\gamma = 1$:
 - stabilire se il sistema dato ammette soluzione unica
 - stabilire se il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \omega A)\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema dato e, in caso affermativo, analizzarne la convergenza al variare del parametro ω ;

- iv) nel caso n generico, $\gamma = \frac{1}{4}$, determinare, se possibile, il valore di ω per cui risulta minimo $\rho(I - \omega A)$.

2) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$ ove

$$f(x) = 3x^2 - |x^3|, \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N,$$

- i) nel caso $N = 1$,
 - disegnare la funzione f ;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- ii) nel caso $N \geq 2$ generico,
 - determinare il polinomio p_N di grado minore o uguale a N che interpola f sui nodi $x_0, \dots, x_N$;
 - approssimare $\int_{-1}^0 f(x)dx$ tramite la formula di quadratura gaussiana con due nodi in $[-1, 0]$
- iii) determinare, se possibile, $s \in S_3^2[-1, 0, 1]$ tale che $s''(-1) = s''(1) = 0$ (*spline cubica C^2 naturale con nodi $-1, 0, 1$*) che interpola f sui nodi $-1, 0, 1$;
- iv) calcolare $\int_{-1}^1 (s''(x))^2 dx$
- v) determinare, se possibile, una funzione $g \in C^2[-1, 1]$ tale che

$$g(-1) = f(-1), \quad g(0) = f(0), \quad g(1) = f(1), \quad \int_{-1}^1 (g''(x))^2 dx = \pi^2.$$

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h [\alpha f(x_i, \eta_i) + (1 - \alpha)f(x_{i+1}, \eta_{i+1})] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots, \quad \alpha \in [0, 1], \quad h > 0.$$

- i) stabilire per quali valori del parametro α il metodo è implicito;
- ii) posto $f(x, y) = -y$, $y_0 = 1$,
 - approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih$, $i = 0, \dots$.
 - stabilire per quali valori del parametro α le approssimazioni determinate al punto precedente sono tutte non negative indipendentemente dal valore del passo h ;
 - stabilire per quali valori del parametro α le approssimazioni in oggetto costituiscono una successione monotona decrescente in modulo indipendentemente dal valore del passo h ;
- iii) calcolare l'ordine del metodo al variare del parametro α .

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
31 Gennaio, 2011: A

- 1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ed A è una matrice che ammette la fattorizzazione LU , si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \omega U)\mathbf{x}^{(k)} + \omega L^{-1}\mathbf{b}, \quad \omega \in \mathbb{R}; \quad (*)$$

- i) stabilire se il metodo può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema assegnato;
ii) nel caso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- determinare, se possibile, la fattorizzazione LU di A ;
 - analizzare al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
 - posto $\alpha = 1$, analizzare al variare di ω la convergenza del metodo (*) per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
 - posto $\alpha = -1$, analizzare al variare di ω la convergenza del metodo (*) per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- iii) nel caso generale, stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
Sia A definita positiva, allora esiste $\omega > 0$ tale che il metodo () applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente.*

- 2) Dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = k \left(\frac{3x - x^2}{3 + x^2} \right), \quad 0 \neq k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = 1$:
- disegnare il grafico di g ;
 - analizzare la convergenza del metodo per l'approssimazione dei punti fissi di g , determinandone eventualmente anche l'ordine;
 - analizzare il comportamento delle successioni generate dal metodo per $x_0 \in (0, 3]$;
 - analizzare il comportamento delle successioni generate dal metodo per $x_0 > 3$;
- ii) determinare, se possibile, i valori di k per cui il metodo risulta del secondo ordine per l'approssimazione di almeno un punto fisso di g ;
- iii) determinare, se possibile, i valori di k per cui il metodo risulta del terzo ordine per l'approssimazione di almeno un punto fisso di g .

- 3) Dati i punti

$$(x_k, y_k), \quad \text{ove } x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad y_k = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n$$

- i) nel caso $n = 2$,
- disegnare i punti assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
 - determinare il polinomio, p_2 di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
 - approssimare $\int_{-1}^1 p_2(x)dx$ tramite la formula di quadratura gaussiana con due nodi in $[-1, 1]$;
 - ricordando la formula di duplicazione del coseno, verificare che $p_2(x) = \cos(2\arccos(x))$, $x \in [-1, 1]$;
- ii) nel caso n generico, determinare il polinomio p_n di grado minore o uguale a n che interpola i dati assegnati;
- iii) nel caso n generico numero pari, determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
15 Febbraio, 2011: A

1) Data la funzione $h(t) = \frac{1}{2+t}$,

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di h rispetto a t ;
- ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e posto $t = \frac{\pi}{8}$:
 - determinare la rappresentazione di $\tilde{t}$ di t in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $h(t)$ in tale insieme eseguendo tutte le operazioni indicate nell'aritmetica di macchina.

2) Data la funzione

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = 1$:
 - disegnare il grafico di f ;
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f , determinandone eventualmente anche l'ordine;
- ii) nel caso $k = 0$:
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f , determinandone eventualmente anche l'ordine;
 - determinare, se possibile, i valori $x_0 > 0$ per cui la successione da essi originata tramite il metodo di Newton ha le seguenti proprietà

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0, \quad x_{i+1} > x_i, \quad \forall i > 0;$$

- iii) determinare, se possibile, i valori di k per cui il metodo risulta di ordine superiore al secondo per l'approssimazione di almeno una radice di f ;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera
detta g la funzione di iterazione del metodo di Newton relativo ad f , risulta $g'(1/2) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

3) Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di ordine n , ove la matrice A è definita come segue:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} i & \text{se } i = 2, \dots, n, \quad j = i, \dots, n \\ 1 & \text{se } i = 1, \quad j = n, \\ 1 & \text{se } i = n, \quad j = 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$ scrivere esplicitamente la matrice A e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione QR in modo che risulti $r_{ii} > 0$
- ii) nel caso n generico,
 - scrivere esplicitamente la matrice A
 - stabilire se il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
 - calcolare la fattorizzazione QR di A in modo che risulti $r_{ii} > 0$
 - stabilire se il metodo di Jacobi applicato al sistema $R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$ converge
 - analizzare la convergenza del metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \omega R)\mathbf{x}^{(k)} + \omega Q^T \mathbf{b}, \quad \omega = \frac{2}{n},$$

per l'approssimazione della soluzione del sistema dato.

4) Dati i punti

$$(x_k, y_k), \quad \text{ove } x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad y_k = 1 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n$$

- i) nel caso $n = 2$,
 - disegnare i punti assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
 - determinare il polinomio, p_2 di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
- ii) nel caso n generico determinare il polinomio p_n di grado minore o uguale a n che interpola i dati assegnati;
- iii) approssimare $\int_{-1}^1 p_n(x) dx$ mediante la formula di Simpson.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
5 Luglio, 2011: A

1) Data la funzione $h(t) = \frac{t}{1+t}$,

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di h rispetto a t ;
- ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento e posto $t = \frac{\pi}{16}$:
 - determinare la rappresentazione di $\tilde{t}$ di t in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $h(t)$ in tale insieme eseguendo tutte le operazioni indicate nell'aritmetica di macchina.

2) Data la funzione:

$$f(x) = 21x^2 + x^3 - 3x^4 + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $k = 0$,
 - analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici reali di f , determinandone eventualmente anche l'ordine di convergenza;
 - mostrare che per $0 < x_0 \leq \frac{7}{6}$ la successione originata tramite il metodo di Newton ha le seguenti proprietà

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0, \quad x_{i+1} < x_i, \quad \forall i > 0;$$

- ii) determinare, se possibile, i valori di k per cui il metodo risulta di ordine superiore al secondo per l'approssimazione di almeno una radice negativa di f ;
- iii) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera
detta g la funzione di iterazione del metodo di Newton relativo ad f , risulta $g'(-1) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

3) Si consideri il vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{w}_i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1, n \\ 0, & \text{se } i = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

e le matrici

$$A := \gamma I - C, \quad C := \mathbf{w}\mathbf{w}^T, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- i) Nel caso $n = 3, \gamma = -1$:
 - scrivere esplicitamente C e calcolarne gli autovalori;
 - stabilire se la matrice A è definita positiva;
 - analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
- ii) Nel caso n, γ generici:
 - calcolare tutti gli autovalori di C ;
 - stabilire per quali valori di γ la matrice A è definita positiva;
 - stabilire per quali valori di γ il metodo di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ converge.
- 4) Assegnata la funzione $q(x) = x^2$, i nodi

$$x_0 = -h, \quad x_1 = h, \quad 0 < h \leq 1;$$

e indicati con $L_{0,1}, L_{1,1}$ i polinomi fondamentali di Lagrange relativi ai nodi assegnati,

- i) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\left| \int_{-1}^1 L_{0,1}(x) dx + \int_{-1}^1 L_{1,1}(x) dx \right|,$$

- ii) determinare h in modo che la formula di quadratura $I_1(f) := f(x_0) + f(x_1)$ per approssimare $\int_{-1}^1 f(x) dx$ abbia grado di precisione massimo.
- iii) determinare e disegnare il polinomio, $p(x)$ che interpola la funzione $q(x)$ sui nodi assegnati;
- iv) determinare, se possibile, il valore del parametro h per cui risulta minima la quantità

$$\max_{x \in [-1, 1]} |q(x) - p(x)|;$$

e confrontarlo con il valore di h determinato al punto ii).

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
20 Settembre, 2011: A

1) Data la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R};$$

- i) determinare, possibile, la fattorizzazione LU della matrice;
- ii) nel caso $\rho = \frac{1}{9}$, rappresentare gli elementi di L ed U nell'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si opera con troncamento e commentare il risultato ottenuto;
- iii) nel caso $\rho = -1$ (operando in precisione infinita) analizzare il problema dell'esistenza ed unicità della fattorizzazione LU di R determinando, eventualmente, da quanti parametri reali dipende la soluzione.

2) Dato il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, ove

$$g(x) = -\frac{1}{1 + |x + k|}, \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = 0$:
 - mostrare che g ammette un unico punto fisso, α , ed analizzare la convergenza del metodo, determinandone, eventualmente, anche l'ordine,
 - esaminare il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = 0$ mostrando, in particolare, che risulta

$$|x_i - \alpha| < |x_{i+1} - x_i| \quad \forall i \geq 0;$$

- ii) nel caso $k = 1$:
 - mostrare che g ammette un unico punto fisso, β , ed analizzare la convergenza del metodo, determinandone, eventualmente, anche l'ordine,
 - esaminare il comportamento della successione originata a partire da $x_0 = 0$ mostrando, in particolare, che risulta

$$|x_i - \beta| > 2|x_{i+1} - x_i|, \quad \forall i \geq 2.$$

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

- i) stabilire per quali valori di α A è a diagonale dominante;
- ii) stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
- iii) stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
- iv) nel caso α generico effettuare tre iterazioni del metodo di Jacobi per il sistema dato a partire dal punto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ e commentare il risultato ottenuto.

4) Dati i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$, ove

$$x_i : -2, -1, 1, 2, \quad \text{ed} \quad h(x) = (x-1)^2(x+1)^2;$$

- i) disegnare i punti assegnati e determinare, se possibile, il polinomio, p , di grado minore od uguale a 3 che li interpola scritto nella forma di Newton;
- ii) determinare, se possibile, il polinomio, di grado minore od uguale a 1 che interpola $(x_1, h(x_1))$, $(x_2, h(x_2))$ interpola scritto nella forma di Newton;
- iii) determinare, se possibile, il polinomio, q , di grado minore od uguale a 3 tale che

$$\begin{aligned} q(-1) &= h(-1), \quad q'(-1) = h'(-1), \\ q(1) &= h(1), \quad q'(1) = h'(1), \end{aligned}$$

- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
sia f una funzione pari e siano

$$x_0, \dots, x_{2m-1}$$

2m punti simmetrici rispetto all'origine (ossia $x_{2m-1-k} = -x_k$, $k = 0, \dots, m-1$), allora

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{2m-1}] = 0.$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 22 Novembre, 2011: B

1) Data la funzione:

$$g(x) = k \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 \right), \quad k \in \mathbb{R},$$

i) nel caso $k = 2$:

- tracciare il grafico di g ,
 - analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g ;
 - stabilire se esistono valori $x_0 > 1$ per cui, posto $x_{i+1} = g(x_i)$, risulta $x_{i+1} = \frac{1}{2}$ per qualche $i \geq 0$;
- ii) determinare, se possibile, un valore di k tale che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta avere convergenza sublineare per qualche punto fisso di g minore di 1.

2) È data la matrice $A = 2I + H$, di ordine n , ove

$$H = (h_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad h_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) nel caso $n = 3$

- scrivere esplicitamente la matrice A e calcolarne i determinanti dei minori principali di testa;
- calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU di A ;
- calcolare, se possibile, la fattorizzazione di Cholesky di A ;

ii) nel caso n generico:

- procedendo per induzione su n , mostrare che, indicato con A_k il minore principale di testa di ordine k di A , e posto $d_k := \det(A_k)$, risulta

$$d_k = k + 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

- stabilire, motivando la risposta, se la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky e, in caso affermativo, determinare gli elementi diagonali della matrice che ne costituisce tale fattorizzazione.

iii) nel caso n generico, tenendo presente i risultati del punto precedente mostrare che

$$\|A^{-1}\|_2 < 4^{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

3) È data la matrice $B = bI + H$, ove H è la matrice dell'esercizio precedente con $n = 3$ e $0 < b \in \mathbb{R}$.

- i) scrivere esplicitamente la matrice B , e calcolare, quando possibile, $\mu_2(B)$;
- ii) calcolare, se possibile,

$$\inf_{b \in (0, \sqrt{2})} \mu_2(B), \quad \inf_{b > \sqrt{2}} \mu_2(B);$$

iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $b = 8\sqrt{2}$:

- determinare la rappresentazione di $\tilde{b}$ di b in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
- determinare la rappresentazione di $\mu_2(B)$ in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina;

iv) per ogni $b > 8\sqrt{2}$ determinare la rappresentazione di $\mu_2(B)$ nell'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
II Esonero: 24 Gennaio, 2012

1) Dato il sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la cui matrice, è definita come segue

$$B = (b_{i,j}) = \begin{cases} (-1)^i \beta & \text{se } i = j, \quad i = 1, \dots, n, \\ 1 & \text{se } |i - j| = 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad 0 < \beta \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$
 - scrivere esplicitamente B
 - stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
 - stabilire per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
- ii) nel caso n generico e $\beta \geq 2$,
 - mostrare che il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge;
 - determinare tutti i valori di $\beta \geq 2$ per cui la matrice B risulta definita positiva e commentare i risultati alla luce del punto precedente;
- iii) nel caso n generico pari e $\beta = 2$, analizzare la variare di $\omega \in \mathbb{R}$ la convergenza del metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = (I - \omega B)\mathbf{x}^k + \omega \mathbf{b}.$$

2) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$ ove

$$f(x) = 1 - |x|, \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N,$$

- i) nel caso $N = 1$,
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- ii) nel caso $N \geq 1$ generico, determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- iii) determinare, se possibile, $s \in S_1^0[-1, 0, 1]$ (spline lineare C^0 con nodi $-1, 0, 1$) che interpola f sui nodi assegnati;
- iv) determinare, se possibile, $c \in \mathbb{R}$ in modo che risulti minima la quantità

$$\int_{-1}^1 (f(x) - c)^2 dx$$

e confrontare il risultato ottenuto con quello del punto ii) al crescere di N .

3) Per approssimare $\int_{-1}^1 f(x) dx$ si considera la formula di quadratura

$$I_3(f) = w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a), \quad 0 < a \leq 1$$

- i) nel caso $w_0 = w_1 = w_2 = 1$, stabilire, motivando la risposta, se la formula assegnata può essere interpolatoria;
- ii) nel caso $w_0 = w_2 > 1$, $w_1 = 2 - w_0 - w_2$ stabilire, motivando la risposta, se è possibile determinare a in modo che la formula di quadratura assegnata abbia grado di precisione (polinomiale) 5;
- iii) nel caso $a = 1$
 - determinare i pesi w_0, w_1, w_2 in modo che la formula abbia grado di precisione massimo
 - stabilire se la formula trovata coincide con una formula di quadratura nota;
 - approssimare $\int_{-1}^1 x^4 dx$ mediante la formula ottenuta
- iv) determinare i pesi w_0, w_1, w_2 ed il valore di a in modo che la formula abbia grado di precisione massimo e stabilire se la formula trovata coincide con una formula di quadratura nota;
- v) scrivere il polinomio monico di grado 3 ortogonale sull'intervallo $[-1, 1]$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
31 Gennaio, 2012: A

- 1) Sia $E(a)$ l'errore che si commette approssimando

$$\int_0^a x(x-1)(x-2)dx$$

tramite la formula dei trapezi.

- i) Scrivere l'espressione di $E(a)$.
 - ii) Determinare, se esiste, $\hat{a} > 0$ tale che $E(\hat{a}) = 0$.
 - iii) Discutere il condizionamento del calcolo di $E(a)$ rispetto ad $a \in (0, \hat{a})$.
- 2) Sia assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, e $A = A^T$.
- i) nel caso $n = 3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha + 2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R},$$

- determinare, se possibile, la fattorizzazione LU di A ;
 - determinare, se possibile, la fattorizzazione di Cholesky, SS^T , di A
 - verificare che $a_{i,i} \geq s_{i,i}^2$, $i = 1, 2, 3$
 - analizzare al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- iii) nel caso n generico, mostrare che se A è non singolare ed ammette la fattorizzazione di Cholesky SS^T , allora:
- $a_{i,i} \geq s_{i,i}^2$, $i = 1, \dots, n$;
 - il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è convergente;
 - se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ indicano gli autovalori di A , risulta

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

- 3) Data la funzione

$$f(x) = \max\{x - x^2, -x - x^2\}$$

- i) disegnare il grafico di f ;
- ii) analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione della radice positiva di f determinandone eventualmente anche l'ordine;
- iii) analizzare il comportamento delle successioni generate dal metodo di Newton per $x_0 \in (0, \frac{1}{3})$;
- iv) analizzare il comportamento delle successioni generate dal metodo di Newton per $x_0 \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$;
- v) analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione della radice di modulo minimo di f determinandone eventualmente anche l'ordine.

- 4) Sia f la funzione dell'esercizio precedente. Si considerino i punti

$$(x_k, f(x_k)), \quad \text{ove } x_k = k - N, \quad k = 0, \dots, 2N$$

- i) nel caso $N = 1$,
 - disegnare i punti assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
 - determinare il polinomio, di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
- ii) nel caso $N > 1$ generico,
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a N che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, N$;
- iii) determinare, se possibile, $s \in S_2^1[-1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1]$ tale che

$$s(-1) = f(-1), \quad s(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}), \quad s(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), \quad s(1) = f(1)$$

$$s'(-\frac{1}{2}) = f'(-\frac{1}{2}), \quad s'(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}).$$

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
21 Febbraio, 2012: A

1) Si considerino le due espressioni analiticamente equivalenti

$$\frac{1-x^3}{1-x}, \quad 1+x+x^2;$$

- i) analizzare, al variare di x , il condizionamento delle due espressioni
- ii) nel caso in cui x sia un numero di macchina reale positivo, si dica, motivando la risposta, quale delle due espressioni risulta preferibile dal punto di vista della propagazione dell'errore;
- iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con troncamento ed $x = \frac{1}{4\sqrt{2}}$:
 - determinare la rappresentazione $\tilde{x}$ di x in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$;
 - calcolare il valore della seconda delle espressioni proposte per lo specificato valore di x eseguendo tutte le operazioni nella corrispondente aritmetica di macchina.

2) Sia assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, e A è una matrice diagonali a blocchi di ordine $2n$ definita come segue

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,2n}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i, & i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1, \\ \gamma, & \text{se } j = i+1, & i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1, \\ \gamma^3 & \text{se } j = i, & i = 2, 4, 6, \dots, 2n, \\ \gamma, & \text{se } j = i-1, & i = 2, 4, 6, \dots, 2n, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \gamma > 0;$$

- i) nel caso $n = 2$:
 - scrivere esplicitamente la matrice A ;
 - determinare, se possibile, i valori di γ per cui la matrice A risulta a diagonale dominante;
 - analizzare al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- ii) nel caso n generico:
 - scrivere esplicitamente la matrice A ;
 - determinare, se possibile, i valori di γ per cui la matrice A risulta a diagonale dominante;
 - analizzare al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3) Dati i metodi iterativi

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = a(x - x^2), \quad 0 < a \in \mathbb{R} \quad x_{i+1} = G(x_i), \quad G(x) = g(g(x));$$

- i) analizzare la convergenza del metodo $x_{i+1} = g(x_i)$, studiandone eventualmente anche l'ordine nei casi:
 - $a = 2$,
 - $a \in (2, 3)$;
- ii) dare un'interpretazione geometrica del metodo $x_{i+1} = G(x_i)$;
- iii) analizzare l'eventuale convergenza del metodo $x_{i+1} = G(x_i)$ per approssimare il punto fisso positivo di g , determinandone anche l'ordine, nel caso $a = 2$;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera
Sia $g \in C^4$ e $G(x) = g(g(x))$. Se $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$; allora α è punto fisso di G e il metodo iterativo $x_{i+1} = G(x_i)$, converge localmente ad α con ordine almeno 4.

4) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si considera il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha hf(x_i, \eta_i)) \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

- i) analizzare al variare di α l'ordine del metodo e stabilire se esistono valori di α per cui il metodo risulta implicito;
- ii) dato il problema del secondo ordine

$$z'' + z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1,$$

- determinarne la soluzione;
- approssimarne la soluzione in $x = h$ utilizzando 1 passo del metodo assegnato e commentare il risultato ottenuto.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 1 Dicembre, 2014: B

1) È data la matrice $P = I + B$, di ordine n , ove $B = \mathbf{u}\mathbf{e}^T$

$$\mathbf{u}^T = (b, b^2, \dots, b^n), \quad \mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1), \quad 0 < b \in \mathbb{R}.$$

Si consideri il caso $n = 2$

- i) scrivere esplicitamente la matrice P ,
- ii) mostrare che $\rho(P)$ si può esprimere nelle due seguenti forme analiticamente equivalenti,

$$1 + b + b^2, \quad \frac{1 - b^3}{1 - b};$$

ed analizzare il condizionamento del calcolo di $\rho(P)$ rispetto alla variabile b .

- iii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $b = \pi/8$:
 - determinare la rappresentazione $\tilde{b}$ di b in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $\rho(P)$ in tale insieme utilizzando le due espressioni seguenti

$$(1 \oplus \tilde{b}) \oplus ((\tilde{b} \odot \tilde{b})), \quad 1 \oplus (\tilde{b} \oplus ((\tilde{b} \odot \tilde{b})))$$

eseguendo in entrambi i casi tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

2) Data la funzione:

$$f(x) = |x^2 - 1| - k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = 0$:
 - tracciare il grafico di f , ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
 - mostrare che $\forall x_0 > 1$ il metodo di Newton genera una successione $\{x_i\}$ tale che

$$0 < x_i - 1 < \frac{1}{2}(x_{i-1} - 1)^2$$

- mostrare (senza esplicitamente effettuare il calcolo delle iterate) che 3 iterazioni sono sufficienti per approssimare la radice 1 di f con un errore non superiore a 10^{-8} considerando come punto iniziale $x_0 = \frac{11}{10}$;
- ii) nel caso $k = 1$:
 - tracciare il grafico di f , ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
 - mostrare che $\forall x_0 \neq 0 \quad |x_0| < 1$ il metodo di Newton genera una successione $\{x_i\}$ tale che

$$x_i = \frac{1}{2^i} x_0$$

- determinare quante iterazioni sono necessarie per approssimare la radice nulla di f con un errore non superiore a 10^{-8} considerando come punto iniziale $x_0 = \frac{1}{10}$.

3) Si considerino le matrici B e P come nell'esercizio 1).

- i) Nel caso n generico
 - calcolare gli autovalori di B e quelli di P ;
- ii) nel caso $n = 3$
 - calcolare gli autovalori dei minori principali di testa di B e di P ;
 - stabilire, motivando la risposta, se la matrice P ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- iii) nel caso n generico:
 - calcolare gli autovalori dei minori principali di testa di B e di P ;
 - stabilire, motivando la risposta, se il metodo di eliminazione di Gauss applicato alla matrice P necessita di scambi di righe;
 - stabilire, motivando la risposta, se la matrice P ammette la fattorizzazione di Cholesky;
 - determinare, se esistono, i valori di b per cui $\|B\|_2 = \|B\|_F = n$.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
II Esonero: 12 Gennaio, 2015: A

- 1) Dato sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ si consideri la decomposizione di A nella forma $A = D - B - C$ ove D , $-B$, $-C$ indicano rispettivamente la parte diagonale, sottodiagonale e sopradiagonale della matrice. Posto

$$H_\omega = (D - \omega B)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega C], \quad \mathbf{q}_\omega = \omega(D - \omega B)^{-1}\mathbf{b}, \omega \in \mathbb{R}$$

si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = H_\omega \mathbf{x}^k + \mathbf{q}_\omega.$$

- i) Stabilire se il metodo iterativo proposto si riduce ad un metodo noto per particolari valori di ω
- ii) Nel caso $n = 2$ si ponga

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

- calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi;
- calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel;
- scrivere esplicitamente la matrice H_ω e mostrare che se il metodo iterativo proposto risulta convergente allora $|\omega - 1| < 1$.
- iii) Nel caso n ed A generici:
 - stabilire se il metodo iterativo proposto può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
 - calcolare il determinante di H_ω ;
 - mostrare che se il metodo iterativo proposto risulta convergente allora $|\omega - 1| < 1$.

- 2) Dati i punti $(x_i, g(x_i))$ ove

$$g(x) = \max(0, x), \quad x_i = -1 + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N,$$

- i) nel caso $N = 1$, determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- ii) nel caso $N \geq 1$ generico, determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- iii) determinare, se possibile, $s \in S_1^0[-1, -1/2, 0, 1/2, 1]$ che interpola g sui nodi assegnati;
- iv) determinare, se possibile, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ in modo che risulti minima la quantità

$$\int_{-1}^1 (g(x) - c_0 - c_1 x)^2 dx$$

e confrontare il risultato ottenuto con quello del punto ii) al crescere di N .

- 3) Si considera la formula di quadratura interpolatoria

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) w_i$$

ove

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 0 < x_N < \dots < x_{2N-1} = 1, \quad x_i = -x_{2N-1-i}, \quad i = 0, \dots, 2N-1$$

- i) Nel caso $N = 1$ generico scrivere esplicitamente $L_{0,2N-1}, \dots, L_{2N-1,2N-1}$ e calcolare $w_0, \dots, w_{2N-1}$
- ii) nel caso N generico mostrare che

$$L_{i,2N-1}(x) = L_{2N-1-i,2N-1}(-x), \quad i = 0, \dots, 2N-1;$$

$$w_i = w_{2N-1-i}, \quad i = 0, \dots, 2N-1.$$

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
20 Gennaio, 2015: A

1) Data la funzione:

$$f(x) = 3xe^x + 1,$$

- i) tracciare il grafico di f , e analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- ii) analizzare il comportamento delle successioni generate dal metodo di Newton a partire da $x_0 \in (-\infty, -4]$;
- iii) analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ ove

$$g(x) = -\frac{1+x}{f'(x)};$$

- iv) stabilire se il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ può essere utilizzato per approssimare le eventuali radici di f .

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice A è definita come segue:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i - 1 = j, \\ \alpha & \text{se } i = 2 \text{ e } j = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$,
 - stabilire per quali valori di α la matrice A è a diagonale dominante ed irriducibile;
 - nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema dato converge;
 - nel caso $n = 3$, determinare tutti i valori del parametro α per cui il metodo iterativo Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge.
- ii) nel caso n generico, stabilire per quali valori del parametro α la matrice ammette la fattorizzazione LU e calcolare, quando possibile, la fattorizzazione stessa;
- iii) tenendo presenti i risultati del punto precedente, nel caso n generico determinare per quali valori del parametro α la matrice risulta singolare.
- iv) nel caso n generico, analizzare la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per $\alpha = 0$ e per i valori del parametro α per cui la matrice A risulta singolare.

3) Dati i punti

$$(x_k, y_k), \quad \text{ove } x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad y_k = (-1)^k + 1, \quad k = 0, \dots, n$$

- i) nel caso $n = 2$,
 - disegnare i punti assegnati;
 - determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
 - determinare il polinomio, p_2 di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
 - determinare $\max_{x \in [-1,1]} |p_2(x)|$;
- ii) nel caso n generico,
 - determinare il polinomio p_n di grado minore o uguale a n che interpola i dati assegnati e darne un'espressione analitica per $x \in [-1, 1]$;
 - determinare $\max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)|$;
- iii) nel caso n generico numero pari, determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 25 Novembre, 2015: A

1) Data la funzione:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$$

i) nel caso $k = 0$

- tracciare il grafico di f , ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
- tracciare il grafico di $|f|$ ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di $|f|$;

ii) determinare se possibile il valore del parametro k in modo che il metodo di Newton risulti del terzo ordine per l'approssimazione di almeno una radice di f .

2) Si consideri la matrice $A_n = I_n + \alpha H_n$, di ordine n , ove I_n indica la matrice identità di ordine n , $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$H_n = (h_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad h_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) nel caso $n = 3$

- scrivere esplicitamente la matrice A_3 e calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU
- analizzare il condizionamento degli elementi di L al variare di α ;
- stabilire per quali valori di α la matrice A_3 ammette la fattorizzazione di Cholesky;

ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$:

- determinare la rappresentazione di $\tilde{\alpha}$ di α in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
- determinare la rappresentazione di L calcolata al punto i) in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina;

iii) nel caso n generico mostrare che A_n ammette la fattorizzazione di Cholesky per $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$.

3) Si considerino le matrici A_n e H_n come nell'esercizio precedente e sia

$$p_n(\lambda) = \det(H_n - \lambda I_n)$$

i) calcolare $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$

ii) nel caso $n = 3$ ed $\alpha \geq 0$ calcolare se possibile $\rho(A_3)$, $\mu_2(A_3)$, $\text{tr}(A_3^{-1})$

iii) nel caso n generico e $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$

- mostrare che $\mu_2(A_n) < 2$;
- determinare se possibile $\min_{\alpha} \mu_2(A_n)$;

iv) nel caso n generico

- mostrare per induzione che $p_n(\lambda) = -\lambda p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda)$;
- dedurre dal punto precedente che $p_{2n+1}(\lambda)$ contiene solo potenze dispari di λ mentre $p_{2n}(\lambda)$ contiene solo potenze pari di λ ;
- calcolare se possibile $\mu_{\infty}(H_{2n+1})$;
- mostrare che per $|\alpha| < \frac{1}{2}$ risulta $\text{tr}(A_{2n+1}^{-1}) \leq 1 + \frac{2n}{1-4\alpha^2}$.

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
I Esonero: 25 Novembre, 2015: B

1) Si consideri la matrice $B_n = I_n + \beta H_n$, di ordine n , ove I_n indica la matrice identità di ordine n , $\beta \in \mathbb{R}$ e

$$H_n = (h_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad h_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$
 - scrivere esplicitamente la matrice B_3 e calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU
 - analizzare il condizionamento degli elementi di L al variare di β ;
 - stabilire per quali valori di β la matrice B_3 ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$:
 - determinare la rappresentazione di $\tilde{\beta}$ di β in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di L calcolata al punto i) in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina;
- iii) nel caso n generico mostrare che B_n ammette la fattorizzazione di Cholesky per $|\beta| \leq \frac{1}{2}$.

2) Si considerino le matrici B_n e H_n come nell'esercizio precedente e sia

$$p_n(\lambda) = \det(H_n - \lambda I_n)$$

- i) calcolare $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$;
- ii) nel caso $n = 3$ e $\beta \geq 0$ calcolare se possibile $\rho(B_3)$, $\mu_2(B_3)$, $\text{tr}(B_3^{-1})$;
- iii) nel caso n generico e $0 \leq \beta \leq \frac{1}{6}$
 - mostrare che $\mu_2(B_n) < 2$;
 - determinare se possibile $\min_{\beta} \mu_2(B_n)$;
- iv) nel caso n generico
 - mostrare per induzione che $p_n(\lambda) = -\lambda p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda)$;
 - dedurre dal punto precedente che $p_{2n+1}(\lambda)$ contiene solo potenze dispari di λ mentre $p_{2n}(\lambda)$ contiene solo potenze pari di λ ;
 - calcolare se possibile $\mu_{\infty}(H_{2n+1})$;
 - mostrare che per $|\beta| < \frac{1}{2}$ risulta $\text{tr}(B_{2n}^{-1}) \leq \frac{2n}{1-4\beta^2}$.

3) Data la funzione:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$$

- i) nel caso $k = 0$
 - tracciare il grafico di f , ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di f ;
 - tracciare il grafico di $|f|$ ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di $|f|$;
- ii) determinare se possibile il valore del parametro k in modo che il metodo di Newton risulti del terzo ordine per l'approssimazione di almeno una radice di f .

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
20 Gennaio, 2016

1) Dati i polinomi

$$b_{i,n}(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (*)$$

- i) analizzare il condizionamento del calcolo di $b_{0,n}$ e $b_{n,n}$ rispetto alla variabile t
- ii) mostrare che

$$\left| \sum_{i=0}^n f_i b_{i,n}(t) - \sum_{i=0}^n (f_i + \delta_i) b_{i,n}(t) \right| \leq \max_{i=0, \dots, n} |\delta_i|, \quad \forall t \in [0, 1]$$

- iii) stabilire, motivando la risposta, se la limitazione precedente vale $\forall t \in \mathbb{R}$
- iv) assumendo di aver a disposizione i valori $b_i := b_{i,n}(t)$, $i = 0, \dots, n$ per un fissato $t \in [0, 1]$ stabilire, motivando la risposta, se il calcolo della quantità

$$\sum_{i=0}^n f_i b_i, \quad f_i \geq 0,$$

può comportare cancellazione numerica.

2) Data la funzione $b_{n-1,n}(t)$ definita in (*):

- i) nel caso $n = 3$, tracciare il grafico di $b_{n-1,n}$, ed analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo di Newton per l'approssimazione delle eventuali radici di $b_{n-1,n}$;
- ii) nel caso $n = 3$, analizzare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = x_i - 2 \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

per approssimare la radice di modulo minimo di $b_{n-1,n}$;

- iii) data una funzione $f \in C^r$ e sia α una radice di molteplicità r per f . Determinare, se possibile, il valore di a in modo che il metodo iterativo

$$x_{i+1} = x_i - a \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

risulti di ordine superiore al primo per l'approssimazione di α .

3) Si consideri il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$, ove

$$C = (c_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, \dots, n, \quad j = i, \dots, n \\ \gamma & \text{se } i = n, \quad j = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n;$$

- i) nel caso $n = 3$, scrivere esplicitamente C e calcolarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
- ii) nel caso $n = 3$, stabilire per quali valori di γ il metodo di Jacobi applicato al sistema dato risulta convergente;
- iii) nel caso n, γ generici, scrivere esplicitamente la matrice e stabilire per quali valori di γ essa ammette la fattorizzazione LU ;
- iv) stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera
sia il metodo di Jacobi che quello di Gauss-Seidel applicati ad un sistema di ordine n , la cui matrice sia triangolare e non singolare, risultano convergenti in un numero finito di passi

4) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si considera il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha hf(x_i, \eta_i)) \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

- i) analizzare al variare di α l'ordine del metodo e stabilire se esistono valori di α per cui il metodo risulta implicito;
- ii) nel caso $f(x, y) = 2(x-1)$, $y_0 = 1$
 - determinarne la soluzione;
 - approssimarne la soluzione in $x = ih, i = 0, 1, \dots$, utilizzando il metodo assegnato con $\alpha = \frac{1}{2}$ e confrontare i risultati ottenuti con la soluzione esatta.

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica/ Corso di Laurea in Informatica
ANALISI NUMERICA 1
Esonero: 23 Novembre, 2016: A

1) Data la funzione:

$$g(x) = x^2 - x + k;$$

- i) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, considerando anche l'ordine, per $k = \frac{3}{4}$ e $k = 1$;
- ii) nel caso $k = 0$:
 - stabilire se il metodo iterativo $x_{i+1} = G(x_i)$, ove $G(x) = g(g(x))$, può essere utilizzato per approssimare i punti fissi di g ;
 - analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = G(x_i)$;
 - tenendo presente i risultati dei punti precedenti, analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$;
- iii) Sia g una funzione di classe C^1 tale che $\alpha = g(\alpha)$ e per qualche $\rho > 0$ risulti $|g'(x)| < 1$ per $0 < |x - \alpha| \leq \rho$. Stabilire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono corrette:
 - a) il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ è localmente convergente ad α ;
 - b) il metodo iterativo $x_{i+1} = g(g(x_i))$ è localmente convergente ad α ;
 - c) se inoltre il metodo $x_{i+1} = g(x_i)$ ha ordine 1, allora $x_{i+1} = g(g(x_i))$ produce una successione monotona convergente ad α se x_0 è sufficientemente vicino ad α .

2) È data la matrice $A = I + V$, di ordine $n \geq 2$, ove $V = \mathbf{v}\mathbf{v}^T$

$$\mathbf{v}^T = (0, \omega, \omega, \dots, \omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente la matrice A , e determinarne, se possibile, la fattorizzazione LU ;
 - calcolare, se possibile, $\mu_\infty(L)$ e stabilire per quali valori di ω risulta minimo;
- ii) nel caso n generico:
 - per $k = 1, \dots, n$ calcolare gli autovalori di V_k e quelli di A_k , ove V_k ed A_k indicano i minori principali di testa di ordine k delle matrici V ed A rispettivamente;
 - stabilire per quali valori di ω la matrice A ammette la fattorizzazione LU ;
 - stabilire per quali valori di ω la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky;
 - considerando se possibile la fattorizzazione LU di A , determinare, se possibile, $\min_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\infty(L)$.

3) Si considerino le matrici A e V come nell'esercizio precedente.

- i) Nel caso $n = 3$:
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge e calcolare $\rho(J)$.
- ii) Nel caso $n = 3$, dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $\omega = \frac{11}{3}$:
 - determinare la rappresentazione $\tilde{\omega}$ di ω in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $\rho(J)$ in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.
- iii) Nel caso $n = 3$, dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $\omega = \frac{11}{3}$, determinare la rappresentazione della matrice di iterazione di Gauss-Seidel in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.
- iv) Nel caso n generico:
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $(\omega^2 I - V)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
11 Gennaio, 2017, II Esonero

- 1) Assegnati i punti $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ e le funzioni

$$b_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

- i) nel caso $n = 2$, determinare, se possibile, il polinomio p_2 che interpola la funzione b_1 sui nodi $x_0, \dots, x_n$;
- ii) nel caso n generico determinare, se possibile, il polinomio che interpola la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x)$$

sui nodi $x_0, \dots, x_n$ e calcolare i valori $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$, $0 \leq k \leq n$.

- iii) Stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è corretta
Se r è un polinomio di grado minore o uguale a k con $0 \leq k < n$, allora

$$r[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$$

- 2) Assegnati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$ ove

$$g(x) = 1 - |x|, \quad x_i = a + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N, \quad a \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $a = 0, N = 2$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;
- ii) nel caso $a = 0, N = 2$, determinare e disegnare la parabola che meglio approssima i punti assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- iii) nel caso $a = -1, N$ generico, determinare se possibile il polinomio

$$q_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad n \leq N$$

che rende minima la seguente quantità

$$\sum_{i=0}^N (g(x_i) - q_n(x_i))^2 w(x_i) \quad \text{ove} \quad w(x_i) > 0, i = 0, \dots, n, \quad w(x_i) = 0, i = n+1, \dots, N$$

- 3) Per approssimare l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

si vuole utilizzare la formula gaussiana con due nodi x_0, x_1 sull'intervallo di interesse.

- i) Determinare pesi e nodi della formula sull'intervallo $[-1, 1]$ e determinarne il grado di precisione;
- ii) determinare pesi e nodi della formula su un intervallo generico $[a, b]$;
- iii) usare la formula determinata per approssimare $\int_0^1 x^3 dx$, e $\int_0^1 x^4 dx$.

- 4) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2} [f(x_i, \eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_{i+1})] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots$$

- i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;
- ii) calcolare l'ordine del metodo
- iii) posto $f(x, y) = 2x - 1$, $y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih$, $i = 0, \dots$.
- iv) determinare e disegnare la regione di assoluta stabilità del metodo.

Corso di Laurea Informatica/Corso di Laurea in Matematica
CALCOLO NUMERICO/ ANALISI NUMERICA 1
18 Gennaio, 2017, A

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$ in cui si operi con arrotondamento ed i numeri razionali

$$b = \frac{1}{7}, \quad a = \frac{1}{8};$$

- i) determinare le rappresentazioni $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, e di a , b in $\mathcal{F}(2, 3, -5, 5)$;
- ii) calcolare gli errori relativi di rappresentazione per a , e b confrontarli con la precisione di macchina;
- iii) calcolare i valori $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \otimes (\frac{1}{2})$ e $\tilde{a} \oplus ((\tilde{b} \ominus \tilde{a}) \otimes (\frac{1}{2}))$, e determinare l'errore relativo di ciascuno di essi rispetto al punto medio dell'intervallo $[a, b]$.

- 2) Data la funzione:

$$g(x) = (2 - x)kx^2, \quad k > 0,$$

- i) analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, discutendone eventualmente anche l'ordine di convergenza nei casi $k = \frac{1}{2}$ e $k = 1$;
- ii) stabilire se esistono valori di k per cui g ammette punti fissi, α , tali che $|g'(\alpha)| = 1$;
- iii) nel caso $k \in (1, 4/3)$; analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, discutendone eventualmente anche l'ordine di convergenza;
- iv) ipotizzando che g descriva la funzione di iterazione del metodo di Newton applicato ad una opportuna funzione f regolare, stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è corretta: *la funzione f ha una radice doppia in $x = 0$.*

- 3) Data la matrice A di ordine $n \geq 2$,

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 2(-1)^i, & \text{se } i = j, \\ \alpha, & \text{se } |i - j| = 1, \quad \alpha \in [0, 1), \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente A e stabilire per quali valori di α è definita positiva;
 - stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente;
 - calcolare, se possibile, $\mu_2(A)$ e stabilire per quali valori di α esso risulta minimo;
- ii) nel caso n generico:
 - stabilire se A è definita positiva;
 - mostrare che $\mu_2(A) \leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$;
 - analizzare, al variare di α , la convergenza dei metodi iterativi:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I + A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = (I - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

- 4) Assegnati i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, ove

$$x_i = i - a, \quad h(x) = \max(0, 2x),$$

- i) disegnare il grafico di h ;
- ii) nel caso $n = 2$, $a = 1$,
 - disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, determinare, se possibile, il polinomio, $p_2(x)$, di grado minore o uguale a 2 che li interpola e calcolare $\max_{x \in [-1, 1]} |h(x) - p_2(x)|$;
 - approssimare $\int_{-1}^1 h(x) dx$ tramite la formula composta dei trapezi con nodi x_0, x_1, x_2 ;
- iii) nel caso $a = -1$, $n \geq 2$ generico, determinare la retta, $r(x)$, che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati;
- iv) approssimare $\int_{-1}^1 h(x) dx$ mediante la formula gaussiana su due nodi e confrontare il risultato ottenuto con quello del punto ii);
- v) stabilire se è possibile ottenere il valore esatto di $\int_{-1}^1 h(x) dx$ mediante una formula (composita) che utilizzi solo due nodi di cui uno negativo e l'altro positivo.

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

FACOLTÀ di SMFN
Corso di Laurea in Matematica/ Corso di Laurea in Informatica
ANALISI NUMERICA 1
Esonero: 4 Dicembre, 2017: A

1) Si consideri la sequenza di polinomi:

$$T_0(x) := 1; \quad T_1(x) := x; \quad T_n(x) := 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2;$$

i) per $n = 2$:

- scrivere esplicitamente $T_2(x)$;
- analizzare il condizionamento del calcolo di $T_2(x)$ rispetto a x ;

ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

- determinare la rappresentazione $\tilde{x}$ di x in $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$ e determinare l'errore relativo di rappresentazione;
- calcolare il valore $T_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, effettuando tutte le operazioni nell'aritmetica di $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, e confrontare il valore ottenuto con il valore esatto.

2) Si consideri la sequenza di polinomi T_n dati nell'esercizio 1):

- i) scrivere esplicitamente T_3 ;
- ii) analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le eventuali radici di T_3 , considerando anche l'ordine;
- iii) determinare, se possibile, un valore $x_0 > 0$ tale che la successione costruita tramite il metodo di Newton a partire da x_0 verifichi la relazione $x_{i+1} = -x_i$;
- iv) analizzare il comportamento della successione costruita tramite il metodo di Newton a partire da $x_0 \in (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}]$;
- v) mostrare che, per ogni $n \geq 1$

$$T_n(1) = 1, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0.$$

3) Si consideri la matrice A_n , di ordine n , ove

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i-j| = 1, \\ \alpha, & \text{se } i = j = 1, \\ 2\alpha, & \text{se } i = j, \quad i = 2, \dots, n \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

i) nel caso $n = 3$:

- scrivere esplicitamente la matrice A_3 e calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU ;
- stabilire per quali valori di α la matrice è definita positiva;
- stabilire per quali valori di α la matrice ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
- stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema $A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
- stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;

ii) nel caso n generico mostrare che la matrice A_n ammette la fattorizzazione di Cholesky se $\alpha \geq 1$;

iii) nel caso n generico, sapendo che

$$\det(A_n) = T_n(\alpha), \quad \forall n \geq 1, \quad (\diamond)$$

ove T_n è dato nell'esercizio 1):

- mostrare che per $\alpha = 1$ risulta $\det(A_n) = 1$ per ogni $n \geq 1$;
- mostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste $\epsilon_n > 0$ tale che la matrice A_n ammette la fattorizzazione di Cholesky per $\alpha \geq 1 - \epsilon_n$.

iv) dimostrare l'uguaglianza in $(\diamond)$.

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
10 Gennaio, 2018 II Esonero

1) Assegnati i punti

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

ed i polinomi

$$H_{0,0}(x) = (1-x)^2(1+2x), \quad H_{1,0}(x) = x^2(3-2x), \quad H_{0,1}(x) = x(1-x)^2, \quad H_{1,1}(x) = x^2(x-1)$$

i) nel caso n generico determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale ad n che interpola la funzione

$$g(x) = H_{0,0}(x) + H_{1,0}(x)$$

sui nodi $x_0, \dots, x_n$ e calcolare i valori $g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$, $0 \leq k \leq n$;

ii) calcolare $H_{i,j}(x_0)$, $H'_{i,j}(x_0)$, $H_{i,j}(x_n)$ e $H'_{i,j}(x_n)$ per $i, j = 0, 1$ (si consiglia di redigere una tabella);

iii) nel caso $n = 1$, sia $f \in C^1[0, 1]$, tenendo presente i risultati del punto precedente, senza effettuare ulteriori calcoli determinare il polinomio p_3 di grado minore o uguale a 3 tale che

$$p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3(x_1) = f(x_1), \quad p'_3(x_0) = f'(x_0), \quad p'_3(x_1) = f'(x_1);$$

iv) sia p_3 è il polinomio al punto precedente, mostrare che per $f \in C^4[0, 1]$ e $x \in (x_0, x_1)$ risulta

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2, \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

(si usi la stessa linea dimostrativa dell'errore del polinomio interpolante);

v) nel caso $n > 1$ generico si consideri la funzione s definita a tratti come segue: per $x \in [x_i, x_{i+1})$

$$s(x) = f(x_i)H_{0,0}(t) + f(x_{i+1})H_{1,0}(t) + \frac{1}{n}f'(x_i)H_{0,1}(t) + \frac{1}{n}f'(x_{i+1})H_{1,1}(t), \quad \text{ove } t = \frac{(x - x_i)}{1/n}$$

$$s(x_n) = f(x_n)$$

determinare, se esistono, i valori $s'(x_i)$ $i = 1, \dots, n-1$, e stabilire, motivando la risposta, se $s \in S_3^1[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

2) Sia $f \in C[a, b]$. Si consideri la formula di quadratura interpolatoria $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ per approssimare $\int_a^b f(x) dx$ ove

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

i) calcolare i pesi della formula nei casi $n = 1, 2$, stabilire se le formule ottenute sono formule di quadratura note e determinarne il grado di precisione;

ii) approssimare $\int_{-1}^1 |x| dx$ mediante le due formule ottenute al punto precedente;

iii) nel caso n generico mostrare che

$$w_i = w_{n-i}, \quad i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$$

iii) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$, n generico, assumendo che f sia una funzione dispari, calcolare

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n w_i f(x_i).$$

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{6} [K_1 + 4K_2 + K_3], & x_i = ih, \quad i = 0, \dots \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

ove

$$K_1 = f(x_i, \eta_i), \quad K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i, \eta_i)), \quad K_3 = f(x_i + h, \eta_i + h f(x_i, \eta_i)) :$$

i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;

ii) mostrare che il metodo ha almeno ordine 2;

iii) stabilire se la regione di assoluta stabilità del metodo è illimitata.

iv) posto $f(x, y) = 4x^3$, $y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih$, $i = 0, \dots$.

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1/ CALCOLO NUMERICO

24 Gennaio, 2018, C

Si considerino i polinomi

$$H_{0,0}(x) := (1-x)^2(1+2x), \quad H_{1,0}(x) := x^2(3-2x), \quad H_{0,1}(x) := x(1-x)^2, \quad H_{1,1}(x) := x^2(x-1).$$

- 1) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $x = \frac{1}{9}$:
- i) analizzare il condizionamento del calcolo di $H_{0,0}$ rispetto a x ;
 - ii) determinare la rappresentazione $\tilde{x}$ di x in $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$ e determinare l'errore relativo di rappresentazione;
 - iii) calcolare il valore $H_{0,0}(\tilde{x})$, effettuando tutte le operazioni nell'aritmetica di $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$.

- 2) Assegnati i punti

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n, \quad 0 < n,$$

e la funzione

$$h(x) := H_{0,1}(x) + H_{1,1}(x);$$

- i) nei casi $n = 2, 3$, determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale ad n che interpola la funzione $h(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$;
 - ii) nel caso $n > 3$ generico, determinare, se possibile, il polinomio di grado minore o uguale ad n che interpola la funzione $h(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$ e calcolare i valori $h[x_0, x_1, x_2, \dots, x_r]$, $3 \leq r \leq n$;
 - iii) nel caso n generico, determinare, se possibile, la costante che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $h(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$.
- 3) Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) := kH_{1,1}(x), \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = 1$ analizzare la convergenza del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g determinandone anche l'ordine;
 - ii) determinare, se esistono, valori di k per cui il metodo risulta del secondo ordine per qualche punto fisso non nullo di g ;
 - iii) nel caso $k \in (-16/3, -9/2)$ analizzare la convergenza del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g determinandone anche l'ordine.
- 4) Si consideri la matrice C_n , di ordine n , ove

$$C_n = (c_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad c_{i,j} = \begin{cases} H_{1,0}(1), & \text{se } |i-j| = 1, \\ \gamma H_{0,0}(0), & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad 0 < \gamma \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente la matrice C_3 e calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU ;
 - stabilire per quali valori di γ il metodo di Jacobi applicato al sistema $C_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di γ il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $C_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - ii) nel caso n generico ed $\gamma \geq 2$ stabilire se il metodo di eliminazione di Gauss applicato alla matrice C_n richiede scambi di righe.
- 5) Sia $f \in C^1[0, 1]$. Per approssimare $\int_0^1 f(x)dx$, si consideri la formula di quadratura

$$w_0 f(0) + w_1 f(1) + \hat{w}_0 f'(0) + \hat{w}_1 f'(1)$$

ove

$$w_0 := \int_0^1 H_{0,0}(x)dx, \quad w_1 := \int_0^1 H_{1,0}(x)dx, \quad \hat{w}_0 := \int_0^1 H_{0,1}(x)dx, \quad \hat{w}_1 := \int_0^1 H_{1,1}(x)dx;$$

- i) calcolare w_0 , w_1 , $\hat{w}_0$, $\hat{w}_1$;
- ii) determinare il grado di precisione della formula di quadratura;
- iii) sia $f \in C^1[0, 1]$ una funzione con una radice doppia in 0 ed una radice doppia in 1, approssimare $\int_0^1 f(x)dx$ mediante la formula di quadratura assegnata;
- iv) dare un'interpretazione geometrica della formula di quadratura assegnata.

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

MACROAREA di SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica/ Corso di Laurea in Informatica
ANALISI NUMERICA 1
Esonero: 10 Dicembre, 2018: D

1) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = 0$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le eventuali radici di f , considerando anche l'ordine;
- ii) determinare, se possibile, i valori di k per cui il metodo di Newton risulta di ordine superiore al terzo per qualche radice di f ;
- iii) nel caso $k = 0$ stabilire se il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, ove

$$g(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)},$$

può essere utilizzato per approssimare le radici di f e, in caso affermativo, analizzarne la convergenza considerando anche l'ordine.

2) Si consideri la matrice A_n , di ordine n , ove

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i-j| = 1, \\ 2\alpha, & \text{se } i = j, \quad i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0;$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente la matrice A_3 e calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU ;
 - stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema $A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
- ii) nel caso n generico ed $\alpha \geq 1$
 - stabilire se il metodo di eliminazione di Gauss applicato alla matrice A_n richiede scambi di righe;
 - mostrare che il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.

3) Sia A_n la matrice di ordine n definita nell'esercizio 2).

- i) si consideri il caso $n = 3$ ed i valori di α per cui la matrice è definita positiva:
 - calcolare, quando possibile, $\mu_2(A_3)$;
 - analizzare il condizionamento del calcolo di $\mu_2(A_3)$ rispetto a α ;
- ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $\alpha = 2$, calcolare il valore $\mu_2(A_3)$, effettuando tutte le operazioni nell'aritmetica di $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$;
- iii) nel caso n generico
 - mostrare che per ogni $\alpha \geq 1$ la matrice A_n è invertibile;
 - mostrare che per ogni $\alpha > 1$ risulta

$$\mu_2(A_n) < \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1};$$

- mostrare che per $\alpha = 1$ risulta

$$\mu_2(A_n) > \left(\frac{n+1}{\pi} \right)^2;$$

(Suggerimento si ricordi l'espressione nota degli autovalori della matrice A_n per $\alpha = 0$)

- stabilire, motivando la risposta, se esistono valori di $\alpha \in (0, 1)$ tali che il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge per ogni valore di n .

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
10 Gennaio, 2019 II Esonero

1) Assegnati i punti

$$(x_k, y_k) = \left(\cos \frac{k\pi}{n+1}, (-1)^k \right) \quad k = 0, \dots, n+1,$$

- i) si considerino i casi $n = 0, 1, 2$
 - si determinino, se possibile, il polinomi p_1, p_2, p_3 di grado minore o uguale ad $n+1$ che interpolano, rispettivamente, i dati assegnati
 - mostrare che $p_3(x) = 2xp_2(x) - p_1(x)$
- ii) nel caso n generico determinare, se possibile il polinomio p_{n+1} di grado minore o uguale ad $n+1$ che interpola rispettivamente i dati assegnati
- iii) nel caso $n = 1$, determinare, se possibile, la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati
- iv) nel caso n generico dispari, determinare, se possibile, la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati

2) Siano $x_i, i = 0, \dots, n$, punti distinti in $[a, b]$. Si consideri la formula di quadratura

$$\sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (*)$$

per approssimare $\int_a^b f(x)dx$. Siano inoltre date le funzioni

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = e^x, \quad (**)$$

- i) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$:
 - determinare, se possibile, i pesi della formula (*) in modo che abbia grado di precisione almeno 2;
 - determinare esattamente il grado di precisione della formula costruita al punto precedente;
- ii) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$:
 - determinare, se possibile, i pesi della formula (*) in modo che risulti esatta su tutti gli elementi dello spazio vettoriale generato dalle funzioni f_0, f_1, f_2 in (**);
 - approssimare $\int_{-1}^1 e^{-x} dx$, tramite la formula costruita e confrontare il valore ottenuto con quello esatto;
- iii) nel caso $[a, b]$ generico $n = 1, x_0 = a, x_1 = a + \frac{2}{3}(b-a)$
 - determinare, se possibile, i pesi della formula (*) in modo che la formula stessa abbia grado di precisione almeno 2;
- iv) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 1, x_0 = -h, x_1 = h, h \in (0, 1]$:
 - determinare, se possibile, il valore h ed i pesi della formula (*) in modo che la formula stessa abbia grado di precisione massimo;
- v) nel caso $[a, b]$ generico $n = 1$,
 - determinare, se possibile, x_0, x_1 ed i pesi della formula (*) in modo che la formula stessa abbia grado di precisione massimo.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4} [K_1 + 3K_2] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots$$

ove

$$K_1 = f(x_i, \eta_i), \quad K_2 = f\left(x_i + \frac{2}{3}h, \eta_i + \frac{2}{3}hf(x_i, \eta_i)\right):$$

- i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;
- ii) mostrare che il metodo ha almeno ordine 2;
- iii) posto $f(x, y) = 3x^2 + 2x + 1, y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih, i = 0, \dots$.

Suggerimento: si tenga presente il risultato del punto iii) dell'esercizio 2

MACROAREA di SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica/ Corso di Laurea in Informatica
ANALISI NUMERICA 1
21 Gennaio, 2019 A

1) Data la funzione:

$$g(x) = 3x^2 - 2x^3 + k(x-1)^2, \quad k \in \mathbb{R},$$

- i) nel caso $k = 0$:
 - tracciare il grafico di g ,
 - analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g ;
 - stabilire se esistono valori $x_0 < 0$ per cui, posto $x_{i+1} = g(x_i)$, risulta $x_{i+1} = \frac{1}{2}$ per qualche $i \geq 0$;
- ii) determinare, se possibile, un valore di k tale che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta avere ordine di convergenza maggiore di 2 per qualche punto fisso di g positivo.

2) È data la matrice $A = I + W$, di ordine $n \geq 2$, ove $W = \mathbf{w}\mathbf{w}^T$

$$\mathbf{w}^T = (0, \omega, \omega, \dots, \omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

- i) Nel caso $n = 3$:
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge e calcolare $\rho(J)$.
 - calcolare, se possibile, $\mu_\infty(J)$.
- ii) Nel caso $n = 3$, dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $\omega = \frac{11}{3}$:
 - determinare la rappresentazione $\tilde{\omega}$ di ω in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $\rho(J)$ in tale insieme, per tale valore di ω , eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina, e stabilire se in base a tale risultato il metodo di Jacobi risulta convergente.
- iii) Nel caso n generico:
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di ω il metodo di Jacobi applicato al sistema $(\omega^2 I - W)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.

3) Assegnati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, 2N$ ove

$$f(x) = 2|x|, \quad x_i = a + \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, 2N, \quad a \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $a = -1$, $N = 1$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
- ii) nel caso $a = 0$, $N \geq 1$ generico, determinare il polinomio di grado minore o uguale a $2N$ che interpola i dati assegnati;
- iii) nel caso nel caso $a = -1$, $N \geq 1$ generico, determinare la retta che meglio approssima i punti assegnati nel senso dei minimi quadrati.

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4} [3K_1 + K_2], & x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \dots \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

ove

$$K_1 = f(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha h f(x_i, \eta_i)), \quad K_2 = f(x_i + h, \eta_i + h f(x_{i+1}, \eta_{i+1})), \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

- i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;
- ii) determinare, se possibile, il valore del parametro α in modo che il metodo abbia ordine almeno 2.

Gli studenti di Informatica sono tenuti a svolgere i punti indicati in grassetto

MACROAREA di SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
Esonero: 25 Novembre, 2019: A

1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x| + k, & \text{se } x \neq 0, \\ k, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $k = \frac{1}{e}$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le eventuali radici di f , considerando anche l'ordine;
- ii) nel caso $k = 0$ analizzare la convergenza del metodo di Newton per approssimare la radice di modulo minimo di f , discutendo in particolare il concetto di ordine di convergenza.

2) Si consideri la matrice A_n , di ordine n , ove

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{con} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ \alpha, & \text{se } j = 1, i = 2, \dots, n, \\ \alpha, & \text{se } j = n, i = 1, \dots, n-1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0;$$

- i) nel caso $n = 3$:
 - scrivere esplicitamente la matrice A_3 , calcolarne, quando possibile, la fattorizzazione LU e calcolare $\det(A_3)$;
 - dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $\alpha = \frac{\pi}{3}$, calcolare il valore $\det(A_3)$, effettuando tutte le operazioni nell'aritmetica di $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$;
- ii) nel caso n generico
 - calcolare, quando possibile, la fattorizzazione LU di A_n e calcolare $\det(A_n)$;
 - stabilire se il metodo di eliminazione di Gauss richiede scambi di righe;
 - per i valori di α per cui $\det(A_n) \neq 0$ determinare quante moltiplicazioni e divisioni sono necessarie per calcolare, se possibile, la soluzione del sistema $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, mediante il metodo di eliminazione di Gauss senza pivoting.

3) Si consideri la matrice B , di ordine n , ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{ove} \quad b_{i,j} = \begin{cases} \beta, & \text{se } j = i + 1, i = 1, \dots, n-1 \\ 2, & \text{se } i = j, i = 1, \dots, n \\ 1 - \beta, & \text{se } j = i - 1, i = 2, \dots, n \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \beta \in [0, 1];$$

- i) stabilire per quali valori di β la matrice è invertibile;
- ii) stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, risulta convergente e calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi nel caso $\beta = 0$;
- iii) calcolare $B^T B$, mostrare che $\|B\|_2 \leq 3$ e che

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|B\mathbf{x}\|_2 \leq 3;$$

- iv) mostrare che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\|B\mathbf{x}\|_\infty \geq \|\mathbf{x}\|_\infty$ e dedurre che $\|B^{-1}\|_\infty \leq 1$;
- v) mostrare che $\mu_\infty(B) \leq 3$.

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
13 Gennaio, 2020 II Esonero

- 1) Si considerino i punti $(z_i, f(z_i))$, ove $z_i = -1 + \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, 2N$, e

$$f(x) = k|x|^3 - 3x^2 + m, \quad k, m \in \mathbb{R};$$

- i) nel caso $N = 1$, $k = 2$, $m = 1$,
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i dati assegnati;
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;
- ii) nel caso $N \geq 1$ generico $k = 0$, $m = 1$,
 - determinare il polinomio p_{2N} di grado minore o uguale a $2N$ che interpola i dati assegnati
 - determinare il polinomio di grado minore o uguale a 1 che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati; *Si ricorda che $\sum_{j=1}^k j^2 = (2k+1)k(k+1)/6$*
 - determinare, se possibile, la costante q in modo che risulti minima la quantità $\int_{-1}^1 (f(x) - q)^2 dx$;
- iii) nel caso N generico,
 - stabilire per quali valori di $k, m \in \mathbb{R}$ la funzione f è una spline cubica C^2 con nodi $z_0, \dots, z_{2N}$;
 - stabilire per quali valori di $k, m \in \mathbb{R}$ la funzione f è una spline cubica C^2 naturale con nodi $z_0, \dots, z_{2N}$.

- 2) Siano x_0, x_1 punti distinti in $[a, b]$. Per approssimare $\int_a^b f(x) dx$ si consideri la formula di quadratura

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \quad (*)$$

- i) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ determinare il grado di precisione della formula di quadratura (*) ottenuta ponendo

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad w_0 = w_1 = 1;$$

- ii) nel caso $[a, b]$ generico:
 - tenendo presente il risultato del punto precedente, determinare il grado di precisione della formula di quadratura (*) ottenuta ponendo

$$x_0 = a + \frac{1}{4}(b-a), \quad x_1 = a + \frac{3}{4}(b-a), \quad w_0 = w_1 = \frac{1}{2}(b-a);$$

- detti $L_{i,1}$, $i = 0, 1$, i polinomi fondamentali di Lagrange sui nodi x_0, x_1 suddetti, si calcolino i valori

$$\int_a^b L_{i,1}(x) dx, \quad i = 0, 1;$$

- iii) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$, $x_0 = -\alpha$, $x_1 = \frac{1}{3\alpha}$, $\alpha \in [\frac{1}{3}, 1]$:
 - determinare, se possibile, i pesi della formula (*) in modo che la formula stessa abbia grado di precisione almeno 2;
 - determinare esattamente il grado di precisione della formula costruita al variare di α ;
 - stabilire se esistono valori di α tali che la formula costruita sia una formula di quadratura gaussiana;
- iv) calcolare il valore approssimato mediante la formula gaussiana con 2 nodi su $[-1, 0]$ di $\int_{-1}^0 f(x) dx$ ove f è la funzione dell'esercizio 1).

- 3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2} [K_1 + K_2] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots$$

ove

$$K_1 = f(x_i + \frac{1}{4}h, \eta_i + \frac{1}{4}hf(x_i, \eta_i)), \quad K_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, \eta_i + \frac{3}{4}hf(x_i, \eta_i)) :$$

- i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito;
- ii) mostrare che il metodo ha ordine almeno 2;
- iii) posto $f(x, y) = y$, $y_0 = 1$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito nel punto $x_1 = h$ e confrontare il risultato con il valore esatto della soluzione nello stesso punto;
- iv) posto $f(x, y) = \pi - 2x$, $y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih$, $i = 0, \dots$.

Suggerimento: si tenga presente il risultato del punto ii) dell'esercizio 2)

Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
20 Gennaio, 2020

1) Assegnati gli $n + 2$ punti

$$(x_0, y_0) = (1, 1), \quad (x_k, y_k) = \left(\cos \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right), 0 \right) \quad k = 1, \dots, n, \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = (-1, (-1)^n)$$

- i) nei casi $n = 1, 2$
 - determinare, se possibile, i polinomi p_n , di grado minore o uguale ad n che interpolano i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$
 - determinare, se possibile, i polinomi q_{n+1} di grado minore o uguale ad $n + 1$ che interpolano i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n + 1$
 - confrontare i polinomi p_n e q_{n+1} sopra determinati;
- ii) nel caso $n = 2$, determinare, se possibile, la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n + 1$;
- iii) nel caso $n \geq 2$ generico pari, determinare, se possibile, la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n + 1$;
- iv) nel caso n generico
 - determinare, se possibile, il polinomio r_{n-1} di grado minore o uguale ad $n - 1$ che interpola i dati (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$;
 - determinare, se possibile, il polinomio p_n di grado minore o uguale ad n che interpola i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$;
 - determinare, se possibile, il polinomio q_{n+1} di grado minore o uguale ad $n + 1$ che interpola i dati (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n + 1$.

2) Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) := kx^2(x-1), \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) nel caso $k = -4$ analizzare la convergenza del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g determinandone anche l'ordine;
- ii) determinare, se esistono, valori di k per cui il metodo risulta del secondo ordine per qualche punto fisso non nullo di g ;
- iii) determinare, se esistono, valori di k per cui risulta $g'(\alpha) = -1$ per qualche punto fisso α di g ;
- iv) tenendo presente i risultati dei punti precedenti, analizzare la convergenza del metodo per l'approssimazione degli eventuali punti fissi di g nel caso $k \in (-16/3, -9/2)$, determinandone anche l'ordine.

3) È data la matrice $B = I + Q$, di ordine $n \geq 2$, ove $Q = \mathbf{q}\mathbf{q}^T$

$$\mathbf{q}^T = (0, \beta, \beta, \dots, \beta), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

- i) Nel caso $n = 3$:
 - stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge e calcolare $\rho(J)$.
- ii) Nel caso $n = 3$, dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $\beta = \frac{11}{3}$:
 - determinare la rappresentazione $\tilde{\beta}$ di β in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
 - determinare la rappresentazione di $\rho(J)$ in tale insieme eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.
- iii) Nel caso n generico:
 - calcolare gli autovalori di Q e quelli di B
 - stabilire per quali valori di β la matrice B ammette la fattorizzazione di Cholesky;
 - stabilire per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge;
 - stabilire per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $(\beta^2 I - Q)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.