MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
13 Gennaio, 2021

1) Per $n \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice di ordine $n+1$

$$T_{n+1}(\lambda) = (t_{i,j})_{i,j=1}^{n+1} = \begin{cases} \lambda & i = j = 1; \\ 2\lambda & i = j,\ i = 2, \ldots, n+1; \\ -1 & |i-j| = 1,\ i = 1, \ldots, n+1; \\ 0 & \text{altrimenti}; \end{cases}$$

i) nel caso $n = 2$ scrivere esplicitamente la matrice e stabilire per quali valori di λ:
- la matrice ammette unica fattorizzazione LU;
- la matrice risulta a diagonale dominante ed irriducibile;
- il metodo di Jacobi applicato al sistema $T_3(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente;
- il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $T_3(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente;

ii) nel caso $n \geq 2$ generico:
- analizzare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $T_{n+1}(0)\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- mostrare che
$$\det(T_{n+1}(\lambda)) = 2\lambda \det(T_n(\lambda)) - \det(T_{n-1}(\lambda));$$
- mostrare che la matrice $T_{n+1}(\lambda)$ ammette unica fattorizzazione LU per $|\lambda| > \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

2) Con la notazione dell'esercizio precedente, sia $f(x) = \det(T_{n+1}(x))$;

i) per $n = 3$:
- analizzare il condizionamento del calcolo di f rispetto ad x;
- analizzare la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f determinandone, se possibile, anche l'ordine;

ii) per $n \geq 1$ generico mostrare che il metodo di Newton per l'approssimazione delle radici di f ha almeno ordine 2.

3) Si consideri la formula di quadratura $I(g) = g(x_0)w_0 + g(x_1)w_1$, per approssimare

$$\int_{-a}^{a} g(x)\mathrm{d}x;$$

i) nel caso $a = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$:
- determinare $w_0,\ w_1$ in modo che la formula abbia grado di percisione (polinomiale) massimo;
- rappresentare w_1 sopra trovato nell'insieme di numeri di macchina $F(2, 3, -10, 10)$ in cui si operi con troncamento e determinare l'errore relativo di rappresentazione;

ii) approssimare $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x$ con la formula del punto medio, con la formula dei trapezi e con la formula ottenuta al punto precedente;

iii) determinare, se possibile, $w_0,\ w_1,\ w_2$ in modo che risulti

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) w_0 + g(0)w_1 + g\left(\frac{\pi}{2}\right) w_2,$$

per ogni funzione g della forma $g(x) = c_0 + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

iv) determinare, se possibile, $w_0,\ w_1,\ w_2$ in modo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x = g(-\pi)w_0 + g(0)w_1 + g(\pi)w_2,$$

per ogni funzione g della forma $g(x) = c_0 + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
25 Gennaio, 2021

1) Data la funzione:

$$g(x) = kx^3 - \frac{3}{2}kx^2,\ k \in \mathbb{R},$$

i) nel caso $k = -2$:
- tracciare il grafico di g,
- analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g;
- stabilire se esistono valori $x_0 < 0$ per cui, posto $x_{i+1} = g(x_i)$, risulta $x_{i+1} = \frac{1}{2}$ per qualche $i \geq 0$;

iii) determinare, se possibile, un valore di k tale che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta avere convergenza sublineare per qualche punto fisso di g minore di 1.

2) È data la matrice $Q = I + A$, di ordine n, ove $A = \mathbf{u}\mathbf{e}^T$

$$\mathbf{u}^T = (a, a^2, \cdots, a^n), \quad \mathbf{e}^T = (1, 1, \cdots, 1), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

i) nel caso $n = 2$
- mostrare che $\rho(Q)$ si può esprimere nelle due seguenti forme analiticamente equivalenti,

$$1 + a + a^2, \qquad \frac{1 - a^3}{1 - a};$$

  ed analizzare il condizionamento del calcolo di $\rho(Q)$ rispetto ad a.
- dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$, in cui si operi con troncamento, e posto $a = \pi/8$:
  - determinare la rappresentazione $\tilde{a}$ di a in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
  - determinare la rappresentazione di $\rho(Q)$ in tale insieme utilizzando le due espressioni seguenti

$$(1 \oplus \tilde{a}) \oplus ((\tilde{a} \odot \tilde{a})), \quad 1 \oplus (\tilde{a} \oplus ((\tilde{a} \odot \tilde{a}))$$

    eseguendo in entrambi i casi tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

ii) nel caso $n = 3$
- calcolare gli autovalori dei minori principali di testa di A e di Q;
- stabilire, motivando la risposta, se la matrice Q ammette la fattorizzazione di Cholesky;

iii) nel caso n generico:
- calcolare gli autovalori dei minori principali di testa di A e di Q;
- stabilire, motivando la risposta, se il metodo di eliminazione di Gauss applicato alla matrice Q necessita di scambi di righe;
- stabilire, motivando la risposta, se la matrice Q ammette la fattorizzazione di Cholesky;
- determinare, se possibile, i valori di a per cui $\|A\|_2 = \|A\|_F = n$.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h\left[\alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2\right] \\ \eta_0 = y_0, \end{cases} \qquad x_i = x_0 + ih,\ i = 0, \cdots$$

ove

$$K_1 = f(x_i + h, \eta_i + hf(x_i, \eta_i)),\ K_2 = f(x_i + h, \eta_i + hf(x_{i+1}, \eta_{i+1})), \quad \alpha \in [0, 1];$$

i) stabilire per quali valori di α il metodo è implicito;

ii) nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ applicare il metodo suddetto per approssimare la soluzione del problema dato con $f(x, y) = y$, $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ nel punto $x_1 = h$;

iii) determinare, se possibile, il valore del parametro α in modo che il metodo abbia ordine almeno 2.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
1 Dicembre, 2021, I Esonero

1) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} - k & x > 0 \\ \\ x^2 - k & x \leq 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R};$$

i) nel caso $k = 1$, analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di f, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$;

ii) nel caso $k = e^{-2}$, analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di f;

iii) nel caso $k = 0$:

- scrivere esplicitamente la funzione di iterazione $g(x)$ per il metodo di Newton;
- analizzare la convergenza del metodo di Newton per successioni originate da $0 < x_0 \leq 1$ e per successioni originate da $x_0 < 0$, studiando in dettaglio l'ordine;
- alla luce dei risultati del punto precedente stabilire, motivando la risposta, se è preferibile scegliere come punto di partenza per approssimare la radice nulla di f il valore $x_0 = \frac{1}{4}$ oppure $x_0 = -\frac{1}{4}$;
- dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -10, 10)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $x_0 = \frac{1}{9}$:
  - determinare la rappresentazione $\tilde{x}_0$ di x_0 in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
  - determinare il valore $\tilde{x}_1$ ottenuto tramite il metodo di Newton a partire da $\tilde{x}_0$ utilizzando l'espressione di $g(x)$ precedentemente calcolata ed eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina;
  - analizzare la convergenza della successione $\tilde{x}_i$ ottenuta con il metodo di Newton a partire dal $\tilde{x}_0$ utilizzando l'espressione di $g(x)$ precedentemente calcolata ed eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

2) Si consideri la matrice di ordine n, $H = I - \mathbf{q}\mathbf{q}^T$ ove $\mathbf{q}$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ con al massimo 2 componenti non nulle avente la seguente espressione

$$\mathbf{q}^T = (\rho\cos(\theta), 0, \ldots, 0, \rho\sin(\theta)), \quad \rho > 0, \ \theta \in [0, \pi],$$

i) nel caso $n = 3, \rho = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$:

- scrivere esplicitamente H;
- calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU di H;

ii) nel caso n generico:

- stabilire per quali valori dei parametri ρ e θ la matrice H ammette unica fattorizzazione LU
- mostrare che per $0 < \rho < 1$ la matrice H ammette la fattorizzazione di Cholesky per ogni $\theta \in [0, \pi]$;
- calcolare quando possibile $\mu_2(H)$ e determinarne il valore minimo;

iii) nel caso n generico, $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta \in [0, \pi]$:

- mostrare che H è ortogonale;
- determinare una fattorizzazione QR di H;
- stabilire se la matrice H ammette autovalore 1 e, in caso affermativo, determinare una base ortonormale del corrispondente autospazio.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
22 Gennaio, 2022, II Esonero

1) Dati i punti

$$x_i = i, \quad i = 0, \dots, n+1$$

e le funzioni

$$\phi_i(x) := \begin{cases} x - i + 1, & x \in [i-1, i], \\ i + 1 - x, & x \in (i, i+1], \quad i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

i) scrivere l'espressione analitica e disegnare le funzioni

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ f(x) := (\phi_1(x))^2,\ g(x) := \phi_1(x)\phi_2(x);$$

ii) determinare, se possibile,
- il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola la funzione ϕ_1 sui punti x_0, x_1, x_2;
- il polinomio di grado minore o uguale ad n che interpola la funzione g sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$;
- la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, \dots, n+1$;
- una spline di grado 1, C^0, sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ che interpola la funzione f sui punti $x_0, \dots, x_{n+1}$ e stabilire se questa è unica.

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove A è la matrice tridiagonale di ordine n con elementi

$$a_{i,j} := \frac{1}{6} \begin{cases} 4, & i = j, \\ \alpha, & |i-j| = 1\ , \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

i) nel caso $n = 3$:
- determinare tutti i valori di α per i quali la matrice A è definita positiva;
- determinare tutti i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare dato converge;
- determinare tutti i valori di α per i quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare dato converge;

ii) nel caso n generico:
- calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi;
- calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

iii) nel caso n generico ed $\alpha = 1$:
- mostrare che, considerando le funzioni defininte in (1),

$$a_{i,j} = \int_0^{n+1} \phi_i(x)\phi_j(x)\mathrm{d}x, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{2}$$

- determinare le matrici di ordine n, A_S e A_T, i cui elementi sono ottenuti approssimando gli integrali (2) utilizzando la formula di Simpson composita e la formula dei trapezi composita sulla partizione data da $x_0, \dots, x_{n+1}$, rispettivamente.

3) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}\right), \\ \eta_0 = y_0 \end{cases} \qquad x_i = ih,\ i = 0, \cdots$$

i) stabilire se il metodo è implicito o esplicito e mostrare che ha ordine almeno 2;

ii) posto $f(x, y) = 2x + \sqrt{2}$, $\ y_0 = 0$, approssimare la soluzione del problema dato tramite il metodo fornito sui punti $x_i = ih,\ i = 0, \cdots$.

iii) determinare la regione di assoluta stabilità del metodo.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
26 Gennaio, 2022

1) Data la funzione:
$$g(x) = k(x-1)^2 - 2x^3 + 3x^2,\ k \in \mathbb{R},$$

i) nel caso $k = 0$:
- analizzare la convergenza, considerando anche l'ordine, del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g;
- stabilire se esistono valori $x_0 < 0$ per cui, posto $x_{i+1} = g(x_i)$, risulta $x_{i+1} = \frac{1}{2}$ per qualche $i \geq 0$;

ii) determinare, se possibile, un valore di k tale che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ risulta avere ordine di convergenza maggiore di 2 per qualche punto fisso di g positivo.

2) Siano $x_i,\ i = 0, \ldots, n$, punti distinti in $[a, b]$. Si consideri la formula di quadratura
$$\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad (*)$$
per approssimare $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

i) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 2$, $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$:
- determinare, se possibile, i pesi della formula $(*)$ in modo che abbia grado di precisione almeno 2;
- determinare esattamente il grado di precisione della formula costruita al punto precedente;

ii) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 1$, $x_0 = -h, x_1 = h, \quad h \in (0, 1]$: determinare, se possibile, il valore h ed i pesi della formula $(*)$ in modo che la formula stessa abbia grado di precisione massimo;

iii) nel caso $[a, b]$ generico $n = 1$, determinare, se possibile, x_0, x_1 ed i pesi della formula $(*)$ in modo che la formula stessa abbia grado di precisione massimo.

iv) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 3, -10, 10)$, in cui si operi con arrotondamento, si consideri il valore di h ottenuto al punto ii). Determinare la rappresentazione $\tilde{h}$ di h in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;

v) nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ $n = 2$, $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$: determinare, se possibile, i pesi della formula $(*)$ in modo che risulti esatta su tutti gli elementi dello spazio vettoriale generato dalle funzioni
$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = e^{-\gamma x}, \quad f_2(x) = e^{\gamma x},\ \gamma > 0$$
ed analizzare il comportamento dei pesi ottenuti quando γ tende a 0.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ove A è una matrice che ammette la fattorizzazione LU, si consideri il metodo iterativo
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \omega U)\mathbf{x}^{(k)} + \omega L^{-1}\mathbf{b}, \quad \omega \in \mathbb{R}; \qquad (**)$$

i) stabilire se il metodo può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema assegnato;

ii) nel caso
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- determinare, se possibile, la fattorizzazione LU di A;
- analizzare al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- posto $\alpha = 1$, analizzare al variare di ω la convergenza del metodo $(**)$ per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- posto $\alpha = -1$, analizzare al variare di ω la convergenza del metodo $(**)$ per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

iii) nel caso generale, stabilire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera:
Sia A simmetrica e definita positiva, allora esiste $\omega > 0$ tale che il metodo $(**)$ applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
24 Novembre, 2022, I Esonero

1) Data la funzione:

$$f(x) = xe^x + k, \quad k \in \mathbb{R} \tag{3}$$

i) nel caso $k = 0$, analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di f;

ii) determinare, se possibile, il valore di k tale che il metodo di Newton sia almeno del terzo ordine per l'approssimazione di qualche radice di f.

2) Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = \frac{2x^4 + 3x^3}{2(x+1)^3}, \quad x > -1; \tag{4}$$

i) si analizzi la convergenza del metodo, incluso l'ordine $\left(\textit{risulta } g'(x) = \frac{x^2(2x^2+8x+9)}{2(x+1)^4},\ g''(x) = \frac{3x(x+3)}{(x+1)^5}\right)$;

ii) dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $x_0 = \frac{1}{6}$:
- determinare la rappresentazione $\tilde{x}_0$ di x_0 in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
- determinare il valore $\tilde{x}_1$ ottenuto tramite il metodo (4) a partire da $\tilde{x}_0$ eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina;

iii) data una generica funzione $h(x)$ di classe C^3 si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2}u(x_i)[3 - u'(x_i)], \quad u(x) = \frac{h(x)}{h'(x)}; \tag{5}$$

- verificare che il metodo (4) è ottenuto applicando (5) alla funzione (3) con $k = 0$, ossia ponendo $h(x) = xe^x$;
- mostrare che il metodo (5) può essere usato per approssimare le radici semplici di h ed è almeno del terzo ordine per tali radici.

3) Si consideri la matrice di ordine n:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 1 & i = j,\ i = 1, \dots, n \\ \alpha & i = 1,\ j = 2, \dots, n,\ \text{oppure } i = 2, \dots, n,\ j = 1 \qquad \alpha > 0. \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

i) Nel caso $n = 3$:
- determinare per quali valori di α esiste unica fattorizzazione LU di A;
- mostrare che la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky per $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- determinare i valori di α per cui il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.

ii) Nel caso n generico:
- determinare gli autovalori della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e stabilire per valori di α il metodo converge;
- mostrare che la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky per $\alpha < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

4) Sia A una qualsiasi matrice di ordine n con elementi diagonali non nulli. Indicando con D, B e C le usuali matrici utilizzate per la scomposizione di A per descrivere i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - \omega B)^{-1}[(1-\omega)D + \omega C]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(D - \omega B)^{-1}\mathbf{b}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

i) stabilire se il metodo, in caso di convergenza, può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

ii) stabilire se il metodo si riduce ad un metodo noto per qualche valore di ω;

iii) mostrare che condizione necessaria per la convergenza del metoto è $|1 - \omega| < 1$.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
12 Gennaio, 2023, II Esonero

1) Dati i punti $(x_i, g(x_i))$ ove $x_i = -1 + \frac{i}{N}, i = 0, \dots, 2N$ e

$$g(x) = \begin{cases} x - x^2 & x \geq 0 \\ x + x^2 & x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

i) nel caso $N = 1$, determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;

ii) nel caso $N = 2$, determinare la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati;

iii) nel caso $N > 1$, generico mostrare che la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati ha la forma $y = ax$ con $0 < a < 1$;

iv) determinare se possibile le costanti c_0, c_1 tale che risulti minima la seguente quantità

$$\int_{-1}^{1} [g(x) - (c_0 + c_1 x)]^2 \mathrm{d}x;$$

v) per $N \geq 1$ generico determinare, se possibile, $s \in \mathbb{S}_2^1[-1, 0, 1]$ (*spline di grado 2, C^1 sui nodi -1,0,1*) che interpola i dati assegnati e stabilire se tale s è unica per ogni N.

2) Si consideri la formula di quadratura $w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$ per approssimare

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

i) nel caso $a = -1, b = 1,\ x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h$, determinare $h \in (0, 1]$ e $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la formula abbia grado di precisione (polinomiale) massimo;

ii) nello stesso caso del punto precedente, stabilire se, scegliendo i nodi x_0, x_1, x_2 in modo diverso è possibile ottenere una formula di quadratura con grado di precisione più elevato;

iii) nel caso $a,\ b$ generici, determinare $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ e $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la formula abbia grado di precisione (polinomiale) massimo;

iv) considerando la funzione g in (6), approssimare $\int_0^1 x^3 g(x) \mathrm{d}x$ tramite la formula ottenuta al punto precedente;

v) considerando la funzione g in (6), nel caso $a = -1, b = 1, x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h$, determinare, se possibile, $h \in (0, 1]$ e $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la formula sia esatta su tutte le funzioni dello spazio lineare generato dalle funzioni

$$1, x, x^2, g(x), |g(x)|.$$

3) Si considerino i polinomi

$$\mathcal{B}_{j,n}(x) := \binom{n}{j} x^j (1 - x)^{n-j},\ j = 0, \dots, n \tag{7}$$

assumendo che essi costituiscano una base per lo spazio $\mathbb{P}_n$ dei polinomi di grado minore o uguale ad n:

i) stabilire sotto quali condizioni il seguente problema ammette unica soluzione
dati $(x_i, y_i),\ i = 0, \dots, n$ determinare $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \mathcal{B}_{j,n}(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots, n$$

ii) stabilire sotto quali condizioni la matrice con elementi

$$b_{i,j} := \mathcal{B}_{j-1,n}(x_{i-1}),\ i, j = 1, \dots, n + 1$$

risulta non singolare;

iii) dimostrare che i polinomi in (7) sono una base di $\mathbb{P}_n$.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
26 Gennaio, 2023

1) Data la funzione:

$$g(x) = \frac{|x|}{1+x^2} + k \tag{8}$$

i) nel caso $k = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di g;

ii) nel caso $k = 0$

- analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di g;
- determinare, se possibile, $\rho > 0$ tale che il metodo di Newton per l'approssimazione della radice nulla di g risulta convergente per ogni $x_0 \in (-\rho, \rho)$
- dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $x_0 = \frac{1}{9}$:
  - determinare la rappresentazione $\tilde{x}_0$ di x_0 in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;
  - determinare il valore $\tilde{x}_1$ ottenuto tramite il metodo di Newton a partire da $\tilde{x}_0$ eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

2) Si consideri la matrice $H = I + B$ ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n}, b_{i,j} = \begin{cases} \beta, & \text{se } |i-j| = 1,\ i = 1, ,\cdots, n, \\ \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \beta \geq 0,$$

i) nel caso $n = 3$,

- scrivere esplicitamente H e determinare tutti i valori di β per cui essa risulta definita positiva;
- calcolare, quando possibile, $\|H\|_2$, $\mu_2(H)$, $\lim_{\beta\to+\infty} \mu_2(H)$

ii) nel caso n generico

- mostrare che H ammette la fattorizzazione di Cholesky per $\beta \leq 1/2$,
- determinare, se possibile,
$$\min_{\beta\in[0,1/2]} \mu_\infty(H);$$
- nel caso $\beta > 0$, mostrare che $\|B\|_2 < 2\beta$;
- nel caso $\beta > 0$, determinare, se possibile, un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$\|\mathbf{x}\|_2 = 1,\ \|B\mathbf{x}\|_2 = 2\beta;$$

iii) mostrare che per ogni $\beta > \frac{1}{2}$ esiste un n_β tale che per $n > n_\beta$ il metodo di Jacobi applicato al sistema $H\mathbf{x} = \mathbf{c}$ non converge.

3) Assegnati i punti $(x_i, h(x_i))$, $\;i = 0, \cdots, n$, ove

$$x_i = a + i, \quad i = 0, \cdots, n, \quad h(x) = \left| \frac{x}{2 - \cos(2\pi x)} \right|,$$

i) nel caso $n = 2$, $a = -1$, disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \cdots, n$, e determinare, se possibile, il polinomio $p(x)$, di grado minore o uguale a 2, che interpola i punti stessi;

ii) nel caso $n = 4, a = -2$, disegnare i punti $(x_i, h(x_i))$, $i = 0, \cdots, n$, e determinare e disegnare la parabola, $s(x)$, che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati;

iii) nel caso $a = \frac{1}{4}$, $n \geq 2$ generico, determinare e disegnare la parabola, $q(x)$, che meglio approssima i dati assegnati nel senso dei minimi quadrati;

iv) nel caso $n = 4$, $a = -2$, determinare e disegnare la funzione spline $s \in S_1^0[-2, -1, 0, 1, 2]$ che interpola i dati assegnati.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
23 Novembre, 2023, I Esonero

1) Si consideri la matrice $A := I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ di ordine $2n+1$, $n \geq 1$, ove

$$\mathbf{u}^T := (u_1, \ldots, u_{2n+1}), \quad \mathbf{v}^T := (v_1, \ldots, v_{2n+1})$$

con

$$u_i := \begin{cases} \omega & i \neq n+1 \\ 0 & i = n+1, \end{cases} \qquad v_i := \begin{cases} 0 & i \neq n+1 \\ \gamma & i = n+1, \end{cases} \qquad \omega, \gamma \geq 0.$$

i) Nel caso $n = 1$, $\omega = \gamma$:
   - calcolare, se possibile, la fattorizzazione LU di A;
   - stabilire per quali valori di γ la matrice A ammette la fattorizzazione di Cholesky;
   - calcolare, se possibile, $\mu_\infty(A)$.

ii) Nel caso n generico, $\omega = \gamma$:
   - calcolare $\rho(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$, $\|\mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_2$ e $\rho(A)$;
   - determinare, se possibile, $\beta \in \mathbb{R}$, tale che $A^{-1} = I - \beta\mathbf{u}\mathbf{v}^T$;
   - calcolare $\mu_F(A)$, ove μ_F indica il numero di condizionamento in norma di Fromebius;
   - determinare

$$\min_{\|\mathbf{v}\|_2 = 1} \mu_F(A).$$

2) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = \frac{1}{4}$:

i) determinare la rappresentazione $\tilde{\omega}, \tilde{\gamma}$ di ω e γ in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;

ii) considerando la matrice A dell'esercizio precedente nel caso $n = 1$, calcolare $\|A\|_\infty$ e $\mu_\infty(A)$ eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

3) Data la funzione:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + k, \;\; k \in \mathbb{R} \tag{9}$$

i) nel caso $k = 0$,
   - analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di f;
   - determinare, se esistono, i valori $x_0 > -3$ tali che la successione ottenuta tramite il metodo di Newton a partire da x_0 converga alla radice non nulla di f e

$$x_{i+1} > x_i, \forall\; i \geq 1;$$

ii) determinare, se possibile, il valore di k tale che il metodo di Newton sia almeno del quarto ordine per l'approssimazione di qualche radice di f;

iii) determinare, se ne esistono, i valori di k per cui il metodo di Newton risulta almeno del secondo ordine per l'approssimazione di tutte le radici di f;

iv) dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = \frac{x^3(5x+7)}{9(x+1)^3}; \tag{10}$$

   - stabilire se il metodo può essere usato, qualora risulti convergente, per approssimare le radici della funzione in (9) nel caso $k = 0$;
   - analizzare la convergenza del metodo, incluso l'ordine, per approssimare la radice nulla della funzione in (9) nel caso $k = 0$.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
15 Gennaio, 2024, II Esonero

1) Dati i punti

$$(x_i, y_i),\ x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad y_i = \sin(x_i);$$

i) nel caso $a = 0$, $b = \pi$, $n = 2$ determinare:
- il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i punti assegnati e stabilire se è unico;
- $g \in \langle 1, \sin(x), \cos(x) \rangle$ che interpola i punti assegnati e stabilire se questa funzione è unica;

ii) nel caso $a = -\pi$, $b = \pi$, $n = 2$ determinare:
- il polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola i punti assegnati e stabilire se è unico;
- $g \in \langle 1, \sin(x), \cos(x) \rangle$ che interpola i punti assegnati e stabilire se questa funzione è unica;

iii) nel caso $a = -\pi$, $b = \pi$, $n > 2$ generico, mostrare che la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati per i punti assegnati ha la forma $y = cx$ con $0 < c < 1$;

iv) nel caso $a = -\pi$, $b = \pi$, determinare, se possibile, le costanti c_0, c_1 tali che risulti minima la quantità

$$\int_a^b [\sin(x) - c_0 - c_1 x]^2 \mathrm{d}x;$$

v) siano $\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x)$, funzioni in $C^n[a,b]$ tali che ogni funzione g della forma $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x)$, con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, ha al massimo n radici (contando la molteplicità) in $[a,b]$.
Stabilire, motivando la risposta, se il seguente problema ammette unica soluzione:

> *Dati (x_i, y_i), ove $y_i \in \mathbb{R}$ e $x_0, \ldots, x_n$ sono punti distinti in $[a,b]$, determinare $g \in \langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$ tale che*
> $$g(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

2) Sia A una qualsiasi matrice con elementi diagonali non nulli. Indicando con D, B e C le usuali matrici utilizzate per la scomposizione di A per descrivere i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - \omega B)^{-1}[(1-\omega)D + \omega C]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(D - \omega B)^{-1}\mathbf{b}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

i) stabilire se il metodo, in caso di convergenza, può essere utilizzato per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

ii) nel caso $\omega = 1$, discutere la convergenza del metodo per matrici a diagonale dominate in senso stretto;

iii) mostrare che condizione necessaria per la convergenza del metoto è $|1 - \omega| < 1$.

3) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

ed il metodo:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf\left(x_i + \alpha(x_{i+1} - x_i), \eta_i + \alpha\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)\right), \\ \eta_0 = y_0, \end{cases} \qquad \alpha \in [0,1], \qquad x_i = ih,\ i = 0, \cdots$$

i) stabilire per quali valori di α il metodo è implicito e individuare, se esistono, valori di α per i quali il metodo si riduce a metodi noti;

ii) stabilire se esistono valori di α per cui il metodo ha ordine almeno 2;

iii) posto $f(x,y) = 2\pi x + \pi^2$, $\quad y_0 = 0$, stabilire se esistono valori di α per cui il metodo fornisce la soluzione esatta su tutti i punti $x_i = ih$, $i = 0, \ldots$;

iv) sia $\mathcal{C}_\alpha$ il cerchio nel piano complesso di centro $\left(\frac{1}{2\alpha - 1}, 0\right)$ e raggio $|\frac{1}{2\alpha-1}|$ mostrare che la regione di assoluta stabilità del metodo:
- coincide con l'interno di $\mathcal{C}_\alpha$ se $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$;
- coincide con l'esterno di $\mathcal{C}_\alpha$ se $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$.

MACROAREA di SMFN
Corso di Laurea in Matematica
ANALISI NUMERICA 1
25 Novembre, 2024, I Esonero

1) Si consideri la matrice $A = I + B$ di ordine n, ove

$$B = (b_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n},\ b_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j,\ i = 1, \cdots, n, \\ \beta, & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \beta \geq 0.$$

i) Nel caso $n = 3$:
- calcolare gli autovalori di B;
- mostare che A ammette la fattorizzazione di Cholesky per $\beta \in [0, 1)$;
- calcolare, se possibile, $\mu_2(A)$;
- stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ converge.

ii) Nel caso n generico:
- calcolare gli autovalori di B (*si osservi la struttura della matrice* $B + \beta I$);
- stabilire per quali valori di β il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ converge;
- per $\beta \in [0, 1)$ calcolare, se possibile, i valori singolari di S, ove S indica la matrice che fornisce la fattorizzazione di Cholesky di A.

2) Dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(2, 2, -5, 5)$, in cui si operi con arrotondamento, e posto $\beta = \frac{1}{9}$:

i) determinare la rappresentazione $\tilde{\beta}$, di β in tale insieme, calcolare l'errore relativo di rappresentazione e confrontarlo con la precisione di macchina;

ii) considerando la matrice A dell'esercizio precedente nel caso $n = 3$, calcolare $\|A\|_1$ eseguendo tutte le operazioni necessarie nell'aritmetica di macchina.

3) Data la funzione:

$$f(x) = (1 - x)^r (1 + rx),\ r \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

i) nel caso $r = 3$,
- analizzare la convergenza del metodo di Newton, incluso l'ordine, per approssimare le radici di f;
- determinare, se esistono, i valori $x_0 < 1$ tali che la successione ottenuta tramite il metodo di Newton a partire da x_0 converga alla radice di modulo massimo di f e

$$x_{i+1} < x_i, \forall\ i \geq 1;$$

ii) dato il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad g(x) = x - r\frac{f(x)}{f'(x)};$$

- analizzare il condizionamento del calcolo di g rispetto a x per $0 < x \ll 1$;
- stabilire se il metodo può essere usato, qualora risulti convergente, per approssimare le radici della funzione in (11) per r generico;
- analizzare la convergenza del metodo, incluso l'ordine, per approssimare le radici della funzione in (11) nel caso $r \geq 3$;

iii) data una funzione F di classe C^r in un intorno di una radice α di molteplicità $r > 1$, mostrare che il metodo iterativo

$$x_{i+1} = G(x_i),\ G(x) = x - r\frac{F(x)}{F'(x)};$$

risulta convergente ed almeno del secondo ordine per approssimare la radice α di F.