

Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
27 Settembre 2013

Tema d'esame: studio di alcune proprietà delle funzioni di Bessel di prima specie, che sono di particolare interesse in meccanica celeste.

Descrizione del metodo di calcolo

Le funzioni di Bessel di prima specie $J_n(x)$ risolvono l'equazione differenziale seguente (che ha per incognita la funzione $y = y(x)$):

$$(1) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 ,$$

dove $n \in \mathbf{N}$. Tali soluzioni sono *analitiche* e possono essere espresse in serie di Taylor centrate rispetto all'origine. Infatti, $\forall n \in \mathbf{N}$ possiamo dare la seguente definizione esplicita:

$$(2) \quad J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} .$$

Inoltre, dalla formula precedente si possono ricavare facilmente le espansioni in serie della derivata della generica funzione di Bessel di prima specie; infatti, essa è data dalle seguenti equazioni:

$$(3) \quad J'_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+n)}{2(j!(j+n)!)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j-1} ,$$

È facile dimostrare che le serie che compaiono nei membri di destra delle formule (2)–(3) convergono $\forall x \in \mathbf{R}$, quindi sia J_n che J'_n sono ben definite dalle equazioni (2)–(3) *su tutta l'asse dei numeri reali* e per ogni indice $n \in \mathbf{N}$.

Le funzioni di Bessel compaiono nelle soluzioni di alcuni importanti problemi fisici. Nel seguito di queste brevi note, consideriamo in particolare la scrittura di alcuni sviluppi classici in meccanica celeste. Per comprendere di cosa si tratta, ricordiamo brevemente che in meccanica celeste è abituale descrivere i moti con gli *elementi orbitali*, che a un fissato istante descrivono la cosiddetta “ellisse osculatrice”. Essa è definita in modo tale che su tale ellisse si svolge un moto virtuale in accordo con la seconda legge di Keplero e che ha *in quel fissato istante* uguali posizioni e velocità rispetto al moto di P che si sta considerando. Gli elementi orbitali relativi a moti *all'interno di un piano* sono quattro: (a, e, ω, M) . a , e e ω sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'*eccentricità* e un angolo che individua il pericentro della “ellisse osculatrice”, mentre M è l'*anomalia media*, cioè un opportuno angolo virtuale grazie al quale si può determinare in modo univoco la posizione del punto P sulla “ellisse osculatrice”. Al fine di poter localizzare un punto, le cui coordinate cartesiane nel piano sono corrispondenti a certi valori (a, e, ω, M) degli elementi orbitali, bisogna per prima cosa risolvere la seguente equazione di Keplero:

$$(4) \quad \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - M = 0$$

rispetto all'incognita \mathcal{E} , che prende il nome di *anomalia eccentrica*. Sia inoltre

$$(5) \quad \mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - M$$

la mappa che restituisce il valore del membro di sinistra dell'equazione (4) in funzione della sola \mathcal{E} per valori fissati di e e di M . In queste brevi note, ci limitiamo a ricordare che se l'eccentricità $0 < e < 1$ (come accade ogni qualvolta che la conica osculatrice è proprio un'ellisse), allora si prova facilmente che la soluzione dell'equazione (4) esiste, è unica e appartiene all'intervallo $(l - e, l + e)$. L'angolo che effettivamente localizza il punto P sulla "ellisse osculatrice" (sia pure a partire dal pericentro) è l'*anomalia vera* v che è espressa in funzione di \mathcal{E} grazie alla seguente relazione:

$$(6) \quad v = 2 \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left(\frac{\mathcal{E}}{2} \right) \right) .$$

Molti problemi fondamentali in meccanica celeste richiedono l'utilizzo delle seguenti espansioni in serie di potenze dell'eccentricità e :

$$(7) \quad \begin{aligned} \cos v &= -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(ne) \cos(nM)] \\ \sin v &= 2\sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} [J'_n(ne) \sin(nM)] \end{aligned} ,$$

dove, evidentemente, appaiono le funzioni di Bessel di prima specie J_n e le loro derivate J'_n , come definite dalle formule (2)–(3). Le equazioni nella formula precedente evidenziano che entrambe le funzioni $M \mapsto \cos(v(M; e))$ e $M \mapsto \sin(v(M; e))$ sono evidentemente periodiche di periodo 2π , per ogni fissato valore del parametro $e \in (0, 1)$. Interpretando queste ultime equazioni come *serie di Fourier*, tramite il calcolo di opportuni integrali, possiamo facilmente determinare i coefficienti che moltiplicano, rispettivamente, i termini $\cos(nM)$ e $\sin(nM)$. Infatti, sussistono le seguenti relazioni

$$(8) \quad \begin{aligned} J_n(ne) &= \frac{e}{2\pi(1-e^2)} \int_0^{2\pi} dM [\cos(v(M; e)) \cos(nM)] \\ J'_n(ne) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} dM [\sin(v(M; e)) \sin(nM)] \end{aligned} .$$

Si noti che queste ultime due equazioni possono fungere da definizioni alternative delle funzioni di Bessel di prima specie J_n e delle loro derivate J'_n . Ovviamente, in (8) sia $\cos(v(M; e))$ che $\sin(v(M; e))$ sono da interpretare come funzioni dell'*anomalia media* M (con valore *fissato* del parametro *eccentricità* e), perché il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M; e)$ viene determinato usando le equazioni (4) e (6).

Siccome le funzioni di Bessel di prima specie $J_n(x)$ risolvono l'equazione differen-

ziale (1), allora esse sono soluzioni del seguente *problema di Cauchy*:

$$(9) \quad \begin{cases} y'' = -\frac{y'}{x} - \left(\frac{x^2 - n^2}{x^2}\right) y \\ y(x_0) = J_n(x_0) \\ y'(x_0) = J'_n(x_0) \end{cases} ,$$

dove, come al solito, il simbolo $'$ denota la derivata rispetto alla variabile indipendente (cioè in questo caso la x) e le ultime due equazioni rappresentano le cosiddette *condizioni iniziali*. Una soluzione approssimata del *problema di Cauchy* (9) può essere calcolata in modo efficiente utilizzando uno dei ben noti metodi di integrazione numerica di tipo *Runge–Kutta*. Qui di seguito riassumiamo brevemente uno tra i più elementari *metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali*, cioè quello di *Heun*.

Abitualmente, la famiglia di schemi di integrazione numerica del tipo Runge–Kutta tratta sistemi di equazioni differenziali del primo ordine che possono dipendere da uno o più parametri, cioè

$$(10) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \alpha, \mathbf{y}) ,$$

dove $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, \alpha, \mathbf{y})$ è un *campo vettoriale*, che dipende anche da un generico parametro α . Per fissare le idee, torniamo a considerare l'equazione differenziale del secondo ordine in formula (9), essa può essere posta nella forma del sistema (10), identificando le varie componenti del vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ come segue

$$(11) \quad y_1 \leftrightarrow y , \quad y_2 \leftrightarrow y' ;$$

inoltre, si definisca il *campo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbf{R} \times \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ in modo tale che

$$(12) \quad f_1(x, n, \mathbf{y}) = y_2 , \quad f_2(x, n, \mathbf{y}) = -\frac{y_2}{x} - \left(\frac{x^2 - n^2}{x^2}\right) y_1 .$$

Al fine di studiare un *problema di Cauchy* perfettamente equivalente a quello descritto dalla formula (9), assieme alle *equazioni differenziali* (10) (con \mathbf{y} e \mathbf{f} rispettivamente date da (11) e (12)) occorre considerare le seguenti *condizioni iniziali*:

$$(13) \quad \mathbf{y}(x_0) = \tilde{\mathbf{Y}} \quad \text{tale che} \quad \tilde{Y}_1 = J_n(x_0) , \quad \tilde{Y}_2 = J'_n(x_0) .$$

Supponiamo di conoscere la soluzione $\mathbf{y}(\xi)$ in una fissata posizione ξ (o almeno una sua approssimazione) e ci proponiamo di calcolarla anche in $\xi + h$ (dove si intende che il valore assoluto $|h|$ è *piccolo*). A tal fine, determiniamo i vettori \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{y}^* in modo tale che

$$(14) \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\xi, n, \mathbf{y}(\xi)) , \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{y}(\xi) + h\mathbf{k}_1 , \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\xi + h, n, \mathbf{y}^*) .$$

Sussiste quindi la seguente relazione:

$$(15) \quad \mathbf{y}(\xi + h) \simeq \mathbf{y}(\xi) + h \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} .$$

Più esattamente, supponiamo di essere interessati a calcolare numericamente la soluzione $x \mapsto \mathbf{y}(x)$ in un intervallo $[x_0, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}]$, che suddividiamo in N sottointervalli $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ di ampiezza $h = (\mathcal{X}_{\mathcal{F}} - x_0)/N$, tale che, ponendo $\xi_0 = x_0$, si ha $\xi_N = \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. In definitiva,

il *metodo di Heun* fornisce dei valori approssimati di $\mathbf{y}(\xi_j) \forall j = 1, \dots, N$, applicando ripetutamente la formula (15). Si dimostra che alla fine di tale procedimento, il calcolo di $\mathbf{y}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}})$ è corretto a meno di un errore $\mathcal{O}(h^2)$. In questo senso il metodo di Heun è di tipo Runge–Kutta di ordine 2.

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che, per dati valori dell'eccentricità e e dell'anomalia media M , determina il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M; e)$. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha come argomenti tre variabili di tipo **double**, che qui denotiamo con i simboli M , e e σ ; essa deve restituire il corrispondente valore di $v(M; e)$, definito dalle equazioni (4) e (6); all'interno di tale *function*, il calcolo approssimato di $v(M; e)$ deve essere effettuato *utilizzando il metodo di Newton* (adattato all'equazione implicita (4)) così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A5);
 - (A1) inizialmente, si assegni alla variabile *locale* \mathcal{E} il valore M come prima approssimazione della soluzione dell'equazione (4);
 - (A2) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A21)–(A24) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A3);
 - (A21) si assegni alla variabile *locale* KE il valore di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, cioè il secondo membro della formula (5);
 - (A22) si assegni alla variabile *locale* dK il valore di $\mathcal{K}'(\mathcal{E})$, dove è ovvio che la derivata è tale che $\mathcal{K}'(\mathcal{E}) = 1 - e \cos \mathcal{E}$;
 - (A23) si assegni alla variabile *locale* dE il valore del *rapporto* tra KE e dK ;
 - (A24) si calcoli una nuova approssimazione della soluzione seguendo il metodo di Newton; a questo scopo si modifichi la variabile *locale* \mathcal{E} sottraendo al suo valore precedente la quantità dE ;
 - (A3) se il *valore assoluto dello scostamento* dE (che, in pratica, descrive l'imprecisione con la quale è stata determinata la soluzione \mathcal{E}) è maggiore della *soglia di tolleranza* σ , cioè se si verifica che

$$|\text{dE}| > \sigma ,$$

allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A21)–(A24);

- (A4) si assegni alla variabile *locale* v il valore del secondo membro della formula (6);
- (A5) si restituisca all'ambiente chiamante (della *function* che stiamo descrivendo) il valore di v ;
- (B) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (B1) l'*input da tastiera* del valore dell'eccentricità e ; nel programma, la variabile e deve essere di tipo **double**; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se e non appartiene all'intervallo $[0, 1)$, allora esso deve essere *reinserto correttamente*;
 - (B2) l'*input da tastiera* del valore dell'anomalia media M ; nel programma, la variabile M deve essere di tipo **double**; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se M non appartiene all'intervallo $[0, \pi]$, allora esso deve essere *reinserto correttamente*;

- (B3) un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A), in modo da calcolare numericamente il corrispondente valore dell'anomalia vera $v(M; e)$ con una soglia di tolleranza $\sigma = 10^{-15}$ (per quanto concerne la soluzione dell'equazione implicita (4));
- (B4) la stampa sul video del valore dell'anomalia vera $v(M; e)$, calcolato così come è stato richiesto al precedente punto (B3);
- (B5) al fine di verificare la correttezza del calcolo dell'anomalia vera, dapprima, si assegni alla variabile locale \mathcal{E} il corrispondente valore dell'anomalia eccentrica, ponendo

$$\mathcal{E} = 2 \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{v(M; e)}{2} \right) \right) ;$$

successivamente, si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore assoluto di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, cioè

$$|\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - M| .$$

Ovviamente, la determinazione numerica dell'anomalia vera $v(M; e)$ può considerarsi ben riuscita, quando quest'ultima quantità visualizzata sullo schermo (cioè il valore assoluto di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$) è circa dell'ordine di grandezza dell'errore di macchina.

Alcuni consigli

È sicuramente comodo (e prudente) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da poter calcolare il valore della funzione di Bessel di prima specie J_n e della sua derivata J'_n , usando le equazioni contenute nella formula (8). A tal fine, si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: la “variabile di integrazione” M , i parametri n ed e ; siano il primo e il terzo di questi tre argomenti (cioè M ed e) di tipo **double**, mentre il secondo (cioè n) sia di tipo **int**; *all'interno di questa nuova function*, si calcoli numericamente il corrispondente valore dell'anomalia vera $v(M; e)$ con un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1; (alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore di $\cos(v(M; e)) \cos(nM)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nella prima equazione della formula (8);
- (B) si scriva un'altra *function* che è molto simile a quella richiesta al punto (A) ed ha anch'essa tre argomenti: la “variabile di integrazione” M , i parametri n ed e ; siano il primo e il terzo di questi tre argomenti (cioè M ed e) di tipo **double**, mentre il secondo (cioè n) sia di tipo **int**; *all'interno di questa nuova function*, si calcoli numericamente il corrispondente valore dell'anomalia vera $v(M; e)$ con un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1; (alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore di $\sin(v(M; e)) \sin(nM)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nella prima equazione della formula (8);
- (C) si scriva una *function* che ha 6 argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli **numsubint**, un parametro intero p_1 , un altro

parametro reale p_2 e infine un *puntatore a una function* f , la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti di cui il primo e il terzo sono di tipo `double`, mentre il secondo è di tipo `int`; (alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(t, p_1, p_2) dt$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;

- (D) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
- (D1) *l'input da tastiera* del valore dell'indice n ; tale valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se n non è maggiore di 0, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (D2) il calcolo della quantità $e/[2\pi(1 - e^2)] \int_0^{2\pi} dM [\cos(v(M; e)) \cos(nM)]$ grazie a un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (C) e utilizzando il valore dell'eccentricità che è stato inserito in *input* così come richiesto al punto (B1) dell'obiettivo 1; il valore del suddetto integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 2\pi]$; inoltre, la *chiamata della function relativa al punto (C)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);
- (D3) il calcolo della quantità $1/[2\pi\sqrt{1 - e^2}] \int_0^{2\pi} dM [\sin(v(M; e)) \sin(nM)]$ grazie a un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (C) e utilizzando il valore dell'eccentricità che è stato inserito in *input* così come richiesto al punto (B1) dell'obiettivo 1 (procedendo, quindi, in modo simile a quanto richiesto al precedente punto (D2)); il valore del suddetto integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 2\pi]$; inoltre, la *chiamata della function relativa al punto (C)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (B);
- (D4) la stampa sul video dei valori delle due quantità appena calcolate così come è stato richiesto ai precedenti punti (D2) e (D3); esse sono rispettivamente uguali a $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, proprio a causa delle equazioni contenute nella formula (8).

Alcuni altri consigli

Il numero proposto di sotto-intervalli dell'insieme di integrazione è stato fissato indicativamente al valore di 100 000 e può essere aumentato al fine di diminuire l'errore numerico finale. Ovviamente, aumentando il numero di intervallini, il tempo necessario al computer per eseguire il programma potrebbe crescere in modo inaccettabile, specie se il processore non è molto potente.

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da effettuare il calcolo "simultaneo" della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$ e della sua derivata $J'_n(x)$, utilizzando le espansioni in serie in (2) e (3) quando $x = ne$. Inoltre, si verifichi che tale calcolo "simultaneo" è corretto eseguendo gli opportuni confronti con i valori di $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, che sono già stati ottenuti in precedenza così come richiesto all'interno dell'obiettivo 2. A tal fine, si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: il primo è un indice intero n , il secondo è un valore x di tipo `double`, mentre gli ultimi due *devono essere tali da restituire all'ambiente chiamante* il valore della n -esima funzione di Bessel di prima specie valu-

tata in corrispondenza a x e della sua derivata (cioè, rispettivamente, $J_n(x)$ e $J'_n(x)$); qui di seguito indichiamo rispettivamente con **Jn** e **derJn** le variabili che alla fine dell'esecuzione di tale *function* conterranno, rispettivamente, i valori di approssimati di $J_n(x)$ e $J'_n(x)$; allo scopo di calcolarli, si proceda così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A7);

- (A1) si effettuino le definizioni iniziali di alcune *variabili locali*, in modo che **fatt1** = 1, **fatt2** = $n!$, $j = 0$, $\sigma = 1$ e $\mathcal{P} = (x/2)^{n-1}$;
- (A2) si ponga inizialmente **derJn** = $((n\mathcal{P})/2)/\mathbf{fatt2}$;
- (A3) si aggiorni il valore della variabile \mathcal{P} moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^n$);
- (A4) si ponga inizialmente **Jn** = $\mathcal{P}/\mathbf{fatt2}$;
- (A5) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A51)–(A58) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A6);
- (A51) si (ri)aggiornino i valori di **Jnprec** e **derJnprec** in modo tale che siano posti uguali rispettivamente a **Jn** e **derJn**, in altri termini nelle *variabili locali* **Jnprec** e **derJnprec** vengono memorizzati i valori della funzione di Bessel di prima specie e della sua derivata così come sono stati calcolati prima della corrente iterazione del ciclo;
- (A52) si incrementi di 1 il valore del contatore j ; si cambi il segno della variabile σ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\sigma = (-1)^j$);
- (A53) si aggiorni il valore della variabile **fatt1** moltiplicandolo per j (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che **fatt1** = $j!$);
- (A54) si aggiorni il valore della variabile **fatt2** moltiplicandolo per $n + j$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che **fatt2** = $(n + j)!$);
- (A55) si aggiorni il valore della variabile \mathcal{P} moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^{n+2j-1}$);
- (A56) si aggiorni il valore di **derJn**, aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J'_n(x)$ in formula (3); tale contributo altro non è che $(-1)^j(2j+n)(x/2)^{n+2j-1}/[2(j!(j+n)!)]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ , \mathcal{P} , **fatt1** e **fatt2**;
- (A57) si aggiorni il valore della variabile \mathcal{P} moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^{n+2j}$);
- (A58) si aggiorni il valore di **Jn**, aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J_n(x)$ in formula (2); tale contributo altro non è che $(-1)^j(x/2)^{n+2j}/[j!(j+n)!]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ , \mathcal{P} , **fatt1** e **fatt2**;
- (A6) *se* il valore di **Jn** è diverso da quello di **Jnprec** oppure il valore di **derJn** è diverso da quello di **derJnprec**, allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A51)–(A58);
- (B) all'interno della *main function*, si effettui un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (A), in modo da calcolare $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, dove i valori di n e e sono ancora quelli inseriti in *input* così come richiesto, rispettivamente, ai punti (D1)

dell'obiettivo 2 e (B1) dell'obiettivo 1;

- (C) all'interno della *main function*, si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore assoluto della differenza tra il valore di $J_n(ne)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B) e quello calcolato così come al punto (D2) dell'obiettivo 2; in modo simile, si stampi sul video *in formato esponenziale* anche il valore assoluto della differenza tra il valore di $J'_n(ne)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B) e quello calcolato così come al punto (D3) dell'obiettivo 2.

Ovviamente, la verifica numerica del calcolo (in due diversi modi) della funzione di Bessel di prima specie e della sua derivata *può considerarsi ben riuscita* quando entrambi i valori assoluti delle suddette differenze sono circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Obiettivo (intermedio) 4:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da aggiungere la soluzione numerica del *problema di Cauchy* (9), così da poter effettuare agevolmente il calcolo della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$, quando x appartiene a una griglia di punti equidistanziati all'interno di un dato intervallo. A tali scopi si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* con quattro argomenti, che sono la variabile reale "indipendente" x , il vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$, l'indice intero n e il vettore $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^2$; x , \mathbf{y} e n sono da intendersi come le variabili di *input*; la *function* deve essere scritta in modo tale che (*alla fine della chiamata*) i valori delle due componenti del vettore \mathbf{f} sono uguali a quelle del campo vettoriale $\mathbf{f}(x, n, \mathbf{y})$, così come esse sono definite nella formula (12);
- (B) si scriva una *function* con cinque argomenti, che sono la variabile reale "indipendente" ξ , il "piccolo intervallo" h , il vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$, l'indice intero n e infine un *puntatore a una function* \mathbf{f} , la quale effettua il calcolo del campo vettoriale e, a sua volta, dipenderà da altri quattro argomenti (che sono una variabile di tipo `double`, un array di tipo `double`, un parametro di tipo `int` e, infine, un altro array di tipo `double`); la *function* deve essere scritta in modo tale che, *se all'inizio della chiamata* supponiamo che nel vettore \mathbf{y} siano memorizzati i valori corrispondenti alla soluzione $\mathbf{y}(\xi)$ in una certa posizione ξ , allora, *alla fine della chiamata*, nello stesso vettore \mathbf{y} saranno presenti i valori corrispondenti all'approssimazione di $\mathbf{y}(\xi + h)$ che è definita nel membro di destra della formula (15), dove i valori dei vettori \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{y}^* sono dati in (14);
- (C) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
- (C1) un nuovo *input da tastiera* del valore dell'indice n ; tale nuovo valore di n inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se n non è maggiore di 0, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C2) *l'input da tastiera* del valore dell'estremo sinistro dell'intervallo di integrazione, cioè x_0 ; tale valore (di tipo `double`) inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se x_0 non è maggiore di 0, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C3) *l'input da tastiera* del valore dell'estremo destro dell'intervallo di integrazione, cioè $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$; tale valore (di tipo `double`) inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ non è maggiore di x_0 oppure è maggiore di 40, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C4) *l'input da tastiera* del valore `npassi` del numero di intervalli in cui verrà suddiviso

l'intervallo $[x_0, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}]$, allo scopo di effettuare l'integrazione numerica del *problema di Cauchy* (9) con il metodo di Heun; tale valore di `npassi` inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se *n non è compreso tra 0 e 1 000 000*, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

- (C5) il calcolo del piccolo intervallo di integrazione h , il cui valore deve essere definito in modo tale che $h = (\mathcal{X}_{\mathcal{F}} - x_0)/\text{npassi}$;
- (C6) la determinazione delle condizioni iniziali, $\mathbf{y}(x_0) = \tilde{\mathbf{Y}}$, con $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = J_n(x_0)$ e $\tilde{\mathbf{Y}}_2 = J'_n(x_0)$; ovviamente, la definizione di entrambi i valori delle condizioni iniziali $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ e $\tilde{\mathbf{Y}}_2$ può essere effettuata simultaneamente con *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 3*;
- (C7) l'integrazione numerica del *problema di Cauchy* (9) con il metodo di Heun all'interno dell'intervallo $[x_0, \mathcal{X}_{\mathcal{F}}]$; a tale scopo *si effettuino npassì chiamate consecutive della function descritta al punto (B)*; inoltre, le suddette chiamate devono essere tali che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A); si osservi che l'effetto di ciascuna di queste `npassi` chiamate consecutive è quello di produrre il calcolo approssimato di $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi_j)$ a partire da $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi_{j-1})$, dove $\xi_j = x_0 + jh \forall j = 0, \dots, \text{npassi}$;
- (C8) il confronto tra $y_1 = y_1(\mathcal{X}_{\mathcal{F}})$, così come calcolato alla fine del ciclo richiesto nel precedente punto (C7) e il valore di $J_n(\mathcal{X}_{\mathcal{F}})$, il quale può essere facilmente determinato con *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 3*; a questo scopo, *in formato esponenziale* si stampi sul video il *valore assoluto* della differenza tra $J_n(\mathcal{X}_{\mathcal{F}})$ e la prima componente del vettore \mathbf{y} . Per come sono stati sinora descritti i vari algoritmi di calcolo richiesti, la prima componente del vettore \mathbf{y} deve essere tale che $y_1(\xi) = J_n(\xi)$; pertanto, in questo stesso punto (C8), viene richiesto di stampare su video il *valore assoluto* di due quantità, le quali *devono proprio essere uguali a meno degli inevitabili errori numerici*. Ovviamente, la soluzione numerica del *problema di Cauchy* (9) è *da considerarsi ben riuscita* se il valore stampato (su video) del valore assoluto della suddetta differenza è *piccolo*.

Obiettivo (finale) 5:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di un'opportuna successione finita di coppie di valori, a partire dalla quale si tracci, inoltre, il grafico della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$. A tale scopo si può ampliare la *main function*, procedendo come segue:

- (A) si apra un **file** che è destinato a contenere le coppie dei punti del grafico della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$;
- (B) si ridefiniscano le condizioni iniziali proprio così come richiesto al punto (C6) dell'obiettivo 4;
- (C) si stampino le posizioni iniziali sulla prima riga del **file**, in modo che all'inizio di tale riga compaia prima il valore x_0 e poi quello di $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = J_n(x_0)$;
- (D) si eseguano ancora le istruzioni descritte al punto (C7) dell'obiettivo 4, ma facendo attenzione alla modifica richiesta al punto seguente;
- (E) si modifichi il precedente punto (D), in modo tale che all'interno del ciclo che è implicitamente richiesto proprio dal punto (D) (e, prima ancora, dal punto (C7))

dell'obiettivo 4) si proceda alla stampa su **file**; tale stampa deve essere effettuata solo quando, all'interno del suddetto ciclo, il contatore j assume un valore che è multiplo di 10 e di modo che sulla $1 + j/10$ -esima riga del **file** compaia prima il valore di $\xi_j = x_0 + jh$, seguito poi da quello corrispondente di $y_1 = y_1(\xi_j)$;

- (F) si chiuda il **file** che era stato aperto al punto (A);
- (G) si scriva un altro **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** che è stato creato così come richiesto ai precedenti punti (A)–(F).