**Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I**
**per il corso di laurea in Matematica**
**18 Settembre 2012**

**Tema d'esame:** Studio di alcune caratteristiche del *problema circolare di Sitnikov*; calcolo del periodo di oscillazione (tramite opportuni integrali) e dell'orbita (applicando opportunamente il *metodo di Heun* per integrare numericamente il corrispondente *sistema di equazioni differenziali* di Newton).

### Descrizione del metodo di calcolo

Il *problema di Sitnikov* viene studiato in *meccanica celeste*, perché (pur essendo irrealistico) è un caso a due gradi di libertà (e, quindi, abbastanza semplice) del più generale (e assai più arduo) *problema a tre corpi*. In realtà, in questo esercizio, ci limitiamo a considerare un ulteriore semplificazione, cioè il cosiddetto *problema circolare di Sitnikov*, che è a un solo grado di libertà e, in quanto tale, è integrabile. In tale problema, si studia il moto *sull'asse* $z$ (in un riferimento cartesiano $Oxyz$) di un corpo puntiforme $P$ di massa $m$ sotto l'influenza gravitazionale esercitata da due altri corpi di massa $1/2$. Questi altri due corpi (che sono detti *primari*) si muovono sulla circonferenza orizzontale che ha centro nell'origine e raggio uguale a $1$; inoltre, essi ruotano in modo che in ogni istante essi si trovano sempre in posizioni diametralmente opposte. Per semplicità, si assume che il punto $P$ non *influenza in nessun modo il moto dei corpi primari* e si "normalizzano" i valori di alcune costanti ponendo

$$G = 1 \ , \qquad m = 1 \ ,$$

dove, ovviamente, si intende che $G$ è la costante gravitazionale. Si dimostra facilmente che, nel *problema circolare di Sitnikov* definito come descritto precedentemente, l'equazione differenziale di Newton (che governa il moto del corpo puntiforme $P$) si scrive come segue:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}} \ , \tag{1}$$

dove, ovviamente, $\ddot{z}$ denota la derivata seconda rispetto al tempo della coordinata *verticale* di $P$. Esiste ed è unica la legge di moto $t \mapsto z(t)$ che risolve il *problema di Cauchy* costituito dall'equazione differenziale (1) e dalle seguenti *condizioni iniziali*:

$$z(0) = z_0 \ , \qquad \dot{z}(0) = v_0 \ . \tag{2}$$

*Il problema circolare di Sitnikov* è integrabile proprio perché lungo ciascuna soluzione $t \mapsto z(t)$ si conserva l'*energia totale meccanica*

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U(z) \ , \tag{3}$$

dove, ovviamente, $v = \dot{z}$ denota la velocità del punto $P$ in direzione verticale e

$$U(z) = -\frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}} \tag{4}$$

altro non è che l'*energia potenziale*.

Si ricordi che, in questo contesto, l'*orbita* è il luogo dei punti descritto da $P$ durante il suo moto. In particolare, nel *problema circolare di Sitnikov*, le *orbite limitate* sono caratterizzate dall'avere valori negativi dell'energia $E$ e sono comprese tra due estremi di oscillazione $z_+ > 0$ e $z_- = -z_+$, tali che

$$E = U(z_+) \ . \tag{5}$$

Inoltre, siccome stiamo considerando un problema meccanico con forze conservative e a un grado di libertà, si dimostra facilmente che tutte le *orbite limitate* sono percorse con moto periodico (cioè esse ammettono un valore $T > 0$ tale che $z(t+T) = z(t)\ \forall\ t \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \tau \in (0,T)\ \exists\ t \in \mathbf{R}$ tale che $z(t+\tau) \neq z(t)$). Nel caso del *problema circolare di Sitnikov*, il periodo del moto relativo a un'*orbita limitata* con energia $E$ si calcola tramite la seguente formula:

$$T = 4\int_0^{z_+} \frac{\mathrm{d}z}{v(z)} \ , \qquad \text{dove} \quad v(z) = \sqrt{2\big(E - U(z)\big)} \ . \tag{6}$$

L'integrale che compare in (6) non è agevole da calcolare numericamente, perché la funzione integranda (che altro non è che l'inverso della velocità del punto $P$) presenta un asintoto verticale in corrispondenza a un estremo di integrazione; infatti, utilizzando le formule (4), (5) e (6), si verifica facilmente che $v(z) = \mathcal{O}\big(\sqrt{z_+ - z}\big)$ quando $z$ tende (da sinistra verso destra) a $z_+$. La convergenza al risultato corretto di un metodo numerico è molto più veloce se nell'algoritmo di calcolo viene considerato anche un potenziale quadratico del tipo

$$\mathcal{U}(z) = \frac{k}{2}z^2 + c \ , \tag{7}$$

che approssima bene la funzione $U$ (cioè il potenziale relativo al *problema circolare di Sitnikov*) nei pressi dell'estremo di oscillazione $z_+$, cioè si determinano i parametri $k$ e $c$ in modo tale che

$$\mathcal{U}(z_+) = E \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}'(z_+) = U'(z_+) \ , \tag{8}$$

da cui quindi si deduce che

$$k = -E^3 \qquad \text{e} \qquad c = E + \frac{E^3\, z_+^2}{2} \ . \tag{9}$$

Nel caso del *problema circolare di Sitnikov*, si può esprimere il periodo del moto di un'*orbita limitata* con energia $E$ anche nel modo seguente

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} + 4\int_0^{z_+} \left(\frac{1}{v(z)} - \frac{1}{\mathcal{V}(z)}\right) \mathrm{d}z \ , \qquad \text{dove} \quad \mathcal{V}(z) = \sqrt{2\big(E - \mathcal{U}(z)\big)} \ ; \tag{10}$$

ovviamente, nell'integrale precedente, l'espressione della velocità $v(z)$ è la stessa che compare in formula (6). Inoltre, in (10) è stata utilizzata la ben nota formula che da il periodo di oscillazione per un potenziale quadratico, cioè $4\int_0^{z_+} \mathrm{d}z/\mathcal{V}(z) = 2\pi/\sqrt{k}$.

Per poter tracciare l'orbita del *problema circolare di Sitnikov*, si può utilizzare uno dei ben noti metodi di integrazione numerica di tipo *Runge–Kutta* per ottenere una soluzione approssimata del *problema di Cauchy* costituito dall'equazione differenziale (1) e dalle *condizioni iniziali* (2). Qui di seguito riassumiamo brevemente uno tra i più elementari *metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali*, cioè quello di *Heun.*

Abitualmente, la famiglia di schemi di integrazione numerica del tipo Runge–Kutta tratta sistemi autonomi di equazioni differenziali del primo ordine, cioè

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ , \tag{11}$$

dove $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è un *campo vettoriale.* Per fissare le idee, torniamo a considerare l'equazione differenziale del secondo ordine in formula (1), essa può essere posta nella forma del sistema (11), identificando le varie componenti del vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ come segue

$$x_1 \leftrightarrow z \ , \qquad x_2 \leftrightarrow v \ ; \tag{12}$$

inoltre, si definisca il *campo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ in modo tale che

$$f_1(\mathbf{x}) = x_2 \ , \qquad f_2(\mathbf{x}) = -\frac{x_1}{\left(x_1^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}} \ . \tag{13}$$

Al fine di studiare un *problema di Cauchy* perfettamente equivalente a quello costituito dalle formule (1)–(2), assieme alle *equazioni differenziali* (11) (con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$ rispettivamente date da (12) e (13)) occorre considerare le seguenti *condizioni iniziali*:

$$\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{X}} \qquad \text{tale che} \qquad \tilde{X}_1 = z_0 \ , \quad \tilde{X}_2 = v_0 \ . \tag{14}$$

Supponiamo di conoscere la soluzione $\mathbf{x}(\tau)$ a un fissato istante $\tau$ (o almeno una sua approssimazione) e ci proponiamo di calcolarla anche al tempo $\tau + h$ (dove si intende che il valore di $h$ è piccolo in valore assoluto). A tal fine, determiniamo i vettori $\mathbf{k}_1$ , $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{x}^*$ in modo tale che

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) \ , \qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\tau) + h\mathbf{k}_1 \ , \qquad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \ . \tag{15}$$

Sussiste quindi la seguente relazione:

$$\mathbf{x}(\tau + h) \simeq \mathbf{x}(\tau) + h\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \ . \tag{16}$$

Più esattamente, supponiamo di essere interessati a calcolare numericamente la soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ per un intervallo di tempo $\left[0, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\right]$ , che suddividiamo in $N$ sottointervalli $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ di ampiezza $h = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}/N$ ; il *metodo di Heun* fornisce dei valori approssimati di $\mathbf{x}(\tau_j)$ $\forall \ j = 1, \ldots, N$ , applicando ripetutamente la formula (16). Si dimostra che alla fine di tale procedimento, il calcolo di $\mathbf{x}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ è corretto a meno di un errore $\mathcal{O}(h^2)$ . In questo senso il metodo di Heun è di tipo Runge–Kutta di ordine 2.

**Obiettivo (intermedio) 1:**
si scriva un programma in linguaggio **C** che *permette di studiare la legge di convergenza (al risultato atteso) del calcolo numerico del periodo di oscillazione, così come definito dalla formula (6).* Il programma deve contenere:

(A) una *function* che ha un solo argomento: la variabile $z$ , di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il corrispondente valore dell'energia potenziale $U(z)$ , così come essa è definita dall'equazione (4);

(B) una *function* che ha due argomenti: l'estremo di oscillazione $z_+$ e la "variabile di integrazione" $z$ ; tutti e due questi argomenti siano di tipo `double`; *(alla fine della* *chiamata)* tale *function* deve restituire il valore della funzione integranda $1/v(z)$ che compare nella formula (6); a questo scopo, all'inizio della *function* deve essere calcolato il corrispondente valore dell'energia $E$ (grazie a *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da utilizzare l'equazione (5));

(C) una *function* che ha cinque argomenti: gli estremi $a$ e $b$ di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numsubint`, un parametro reale $p$, e infine un *puntatore a una function f*, la quale, a sua volta, dipenderà da altri due argomenti di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(p,u)\,\mathrm{d}u$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;

(D) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

- (D1) l'*input da tastiera* del valore dell'estremo di oscillazione $z_+$; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $z_+$ *non è maggiore* di zero, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (D2) un ciclo che esegue le istruzioni descritte ai seguenti punti (D21)–(D23), quando un *contatore* intero $i$ va da $\texttt{IMIN} = 2$ a $\texttt{IMAX} = 6$;
- (D21) si effettui *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (C)*, in modo da calcolare il periodo di oscillazione $T = 4\int_0^{z_+} \frac{\mathrm{d}z}{v(z)}$; il valore di tale integrale deve essere approssimato utilizzando $10^i$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, z_+]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (C)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato $z_+$ anche come parametro e l'indirizzo della *function* descritta al punto (B) (la quale, a sua volta, richiede proprio $z_+$ come parametro);
- (D22) quando $i > \texttt{IMIN}$, si effettui la stampa sul video del numero di sotto-intervalli utilizzati nell'ultima *chiamata della function descritta al punto (C)* e, *in formato esponenziale*, del valore di $|T - \bar{T}|$;
- (D23) si ponga $\bar{T} = T$ (in modo tale che quando viene eseguito il punto (D22), $T - \bar{T}$ altro non è che la differenza tra l'*ultimo* valore del periodo calcolato numericamente e il *penultimo*);
- (D3) la stampa dell'ultimo valore del periodo $T$ tra quelli che sono stati calcolati nel ciclo di istruzioni descritte ai precedenti punti (D21)–(D23).

**Alcuni consigli**

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* dei parametri `IMIN` e `IMAX` per mezzo di due opportune direttive `#define`.

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

**Obiettivo (intermedio) 2:**

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da poter *studiare la nuova legge di convergenza (che* **deve essere migliore** *rispetto a quella precedentemente considerata nell'obiettivo 1) del calcolo numerico del periodo di oscillazione, così come definito dalla formula (10).* A tal fine, si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha due argomenti: l'estremo di oscillazione $z_+$ e la "variabile di integrazione" $z$; tutti e due questi argomenti siano di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore della funzione integranda $1/v(z) - 1/\mathcal{V}(z)$ che compare nella formula (10); a questo scopo, all'inizio della *function* devono essere calcolati il corrispondente livello dell'energia[⊗] $E$, oltre ai valori dei parametri $k$ e $c$, i quali sono definiti in (9); tali calcoli preliminari consentiranno poi di poter determinare $\mathcal{V}(z)$ usando le definizioni riportate nelle formule (7) e (10);

(B) all'interno della *main function*, si proceda nuovamente come nell'obiettivo 1, allo scopo di poter *studiare la nuova legge di convergenza del calcolo numerico del periodo di oscillazione $T$, così come definito dalla formula (10)*; in maggior dettaglio, si effettui un ciclo che esegue le istruzioni descritte ai seguenti punti (B1)–(B3), quando un *contatore* intero $i$ va da `IMIN` a `IMAX`;

(B1) con *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (C) dell'obiettivo 1*, si calcoli il periodo di oscillazione $T = 4\int_0^{z_+} \frac{\mathrm{d}z}{v(z)}$; il valore di tale integrale deve essere approssimato utilizzando $10^i$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, z_+]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (C) dell'obiettivo 1* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato $z_+$ anche come parametro e l'indirizzo della *function* descritta al punto (A) (la quale, a sua volta, richiede proprio $z_+$ come parametro);

(B2) quando $i >$ `IMIN`, si effettui la stampa sul video del numero di sotto-intervalli utilizzati nell'ultima *chiamata della function descritta al punto (C) dell'obiettivo 1* e, *in formato esponenziale*, del valore di $|T - \bar{T}|$;

(B3) si ponga $\bar{T} = T$ (in modo tale che quando viene eseguito il punto (B2), $T - \bar{T}$ altro non è che la differenza tra l'*ultimo* valore del periodo calcolato numericamente e il *penultimo*);

(C) sempre all'interno della *main function*, si stampi l'ultimo valore del periodo $T$ tra quelli che sono stati calcolati nel ciclo di istruzioni descritte ai precedenti punti (B1)–(B3).

**Obiettivo (intermedio) 3:**
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere la soluzione numerica del *problema di Cauchy* costituito dal sistema di *equazioni differenziali* (11) (con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$ rispettivamente date da (12) e (13)) e dalle *condizioni iniziali* (14); inoltre, si effettui la verifica che il valore dell'energia $E$ (che è una costante del moto) è ben conservato da tale soluzione numerica del *problema di Cauchy.* A tali scopi si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* con due argomenti, che sono il vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e il vettore $\mathbf{f}$; il vettore $\mathbf{x}$ è da intendersi come la variabile di *input*; la *function* deve essere scritta in modo tale che *(alla fine della chiamata)* i valori delle componenti del vettore $\mathbf{f}$ sono uguali a quelle del campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, così come esse sono definite nella formula (13);

(B) si scriva una *function* con tre argomenti, che sono l'intervallo di tempo $h$, il vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e infine un *puntatore a una function* $\mathbf{f}$, la quale effettua il calcolo del campo

[⊗] Anche in questo caso, dovrà essere effettuata *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*, in modo da utilizzare l'equazione (5).

vettoriale e, a sua volta, dipenderà da altri due argomenti (che sono, entrambi, due array di tipo `double`); la *function* deve essere scritta in modo tale che, *se all'inizio della chiamata* supponiamo che nel vettore $\mathbf{x}$ siano memorizzati i valori corrispondenti alla soluzione $\mathbf{x}(\tau)$ a un certo istante $\tau$, allora, *alla fine della chiamata*, nello stesso vettore $\mathbf{x}$ saranno presenti i valori corrispondenti all'approssimazione di $\mathbf{x}(\tau+h)$ che è definita nel membro di destra della formula (16), dove i valori dei vettori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{x}^*$ sono dati in (15);

(C) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* del valore del tempo totale $\mathcal{T_F}$ fino al quale vogliamo calcolare la soluzione numerica del *problema di Cauchy*; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $\mathcal{T_F}$ *non è maggiore* di zero, esso deve essere *reinserito correttamente*;

(D) all'interno della *main function*, si iteri l'esecuzione delle istruzioni descritte ai seguenti punti (D1)–(D5), quando un *contatore* intero $i$ va da `IMIN` a `IMAX`;
  - (D1) si ponga $N = 10^i$ e $h = \mathcal{T_F}/N$;
  - (D2) si ponga il vettore $\mathbf{x}$ uguale alle condizioni iniziali, che sono scelte in modo tale da essere in corrispondenza all'estremo superiore di oscillazione quando $t = 0$, cioè si ponga $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}}$, con $\tilde{\mathbf{X}}_1 = z_+$ e $\tilde{\mathbf{X}}_2 = 0$;
  - (D3) *si effettuino $N$ chiamate consecutive della function descritta al punto (B)*; inoltre, le suddette chiamate devono essere tali che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A); si osservi che l'effetto di ciascuna di queste $N$ chiamate consecutive è quello di produrre il calcolo approssimato di $\mathbf{x}(\tau_j)$ a partire da $\mathbf{x}(\tau_{j-1})$, dove $\tau_j = jh \ \forall\ j = 0, \ldots\ N$;
  - (D4) si calcoli la variazione finale dell'energia $\Delta E = \left| v^2/2 - (z^2+1/4)^{-1/2} - E \right|$; dove qui si intende che $(z,v) = \mathbf{x}(\mathcal{T_F})$ con $\mathbf{x}(\mathcal{T_F})$ che *non è la soluzione esatta* al tempo $\mathcal{T_F}$, ma la sua *approssimazione* calcolata come spiegato al precedente punto (D3);
  - (D5) si stampi sul video una riga che reca al suo interno il valore attuale di $N$ e il corrispondente *errore* sulla conservazione dell'energia, cioè $\Delta E$; tutti e due i valori che compariranno su tale riga di caratteri devono essere *in formato esponenziale.*

**Qualche osservazione sui risultati**

Ovviamente, la verifica del fatto che il metodo di Heun è di ordine 2 deve considerarsi ben riuscita, se si osserva che *ogni qualvolta che il numero di sottointervalli $N$ viene aumentato di un fattore* 10, *allora l'errore $\Delta E$ diminuisce* **circa** *di un fattore* 100.

**Obiettivo (intermedio) 4:**

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di coppie di valori $\big(x_1(\tau_j), x_2(\tau_j)\big)\ \forall\ j = 0, \ldots, N$ (dove $N$ è scelto in modo opportuno), a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico di un'orbita associata alla soluzione del *problema di Cauchy* costituito dalle formule (1)–(2). A tale scopo si può procedere come segue:

(A) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* del valore di $N$; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $N$ *non è una potenza intera di* 10 *compresa tra* 100 *e* 1 000 000, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(B) si ponga ora $h = T/N$, dove per $T$ si intende l'ultima approssimazione *stampata (sul video)* del periodo di oscillazione, così come richiesto alla fine dell'obiettivo 2;

(C) si apra un **file** che è destinato a contenere le coppie dei punti della soluzione approssimata delle equazioni differenziali;

(D) si stampino le posizioni iniziali sulla prima riga del **file**, in modo che all'inizio di tale riga compaia il valore di $\tilde{X}_1 = z_+$ e poi quello di $\tilde{X}_2 = 0$ ;

(E) si eseguano ancora le istruzioni descritte ai precedenti punti (D2)–(D3) dell'obiettivo 3, ma facendo attenzione alla modifica richiesta al punto seguente;

(F) si modifichi il punto (D3) dell'obiettivo 3, in modo tale che all'interno del ciclo che è implicitamente richiesto proprio dal punto (D3) si proceda alla stampa su **file**; tale stampa deve essere effettuata di modo che sulla $j$–esima riga del **file** compaia prima il valore di $x_1(\tau_j)$ e poi quello corrispondente di $x_2(\tau_j)$ ;

(G) si chiuda il **file** che era stato aperto al punto (C);

(H) si stampi sul video il valore assoluto della differenza (rispetto a ciascuna singola componente) tra il vettore "finale" $\mathbf{x}(T)$ e quello corrispondente alle condizioni iniziali, cioè $\left|x_1(T) - z_+\right|$ e $\left|x_2(T)\right|$ ; tali stampe devono risultare esteticamente apprezzabili e devono riportare i valori delle differenze *in formato esponenziale.* Ovviamente, la verifica della soluzione numerica del *problema di Cauchy è da considerarsi ben riuscita* se i valori stampati (su video) di tali differenze sono *piccoli.*

**Obiettivo (finale) 5:**

si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) dell'orbita che rappresenta la soluzione del *problema circolare di Sitnikov*, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dal precedente obiettivo 4.