Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
22 Giugno 2012

Tema d'esame: Soluzione di sistemi di equazioni lineari tramite la *decomposizione* QR, dove R è un matrice triangolare superiore e Q è una matrice ortogonale che si ottiene come prodotto di alcune opportune *matrici di Givens*.

Descrizione del metodo di calcolo

Consideriamo il tipico problema costituito da un sistema di n equazioni lineari della forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

dove $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ è il cosiddetto "vettore noto", mentre $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è quello incognito e la matrice $A \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. In modo simile al *metodo di eliminazione di Gauss*, tramite opportune combinazioni lineari delle equazioni, ci proponiamo di condurre il sistema (1) nella forma $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$, dove U è una matrice triangolare alta e $\mathbf{d}$ è un altro "vettore noto". A differenza del *metodo di eliminazione di Gauss*, intendiamo utilizzare una sequenza (finita!) di matrici *ortogonali*, le quali lasciano invariate $n-2$ variabili e effettuano una rotazione nel piano costituito dalle due rimanenti coordinate in $\mathbf{R}^n$. Tali matrici ortogonali sono dette "matrici di Givens" e sono abitualmente denotate con il simbolo $G_{i,j}(\vartheta)$, dove $0 \le i < j < n$; in dettaglio, esse sono del tipo:

(2)

$$G_{i,j}(\vartheta) = \Big(g_{l,m}\Big)_{\substack{0\le l\le n-1\\ 0\le m\le n-1}}\ , \quad \text{dove} \quad g_{l,m} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ l = m \ \text{ e } \ l \neq i\,,\, j\ ; \\ 0 & \text{se } \ l \neq m \ \text{ e } \ (l,m) \neq (i,j)\,,\,(j,i)\ ; \\ \cos\vartheta & \text{se } \ l = m\,,\ l = i \ \text{ oppure } \ l = j\ ; \\ \sin\vartheta & \text{se } \ l \neq m\,,\ l = i \ \text{ e } \ m = j\ ; \\ -\sin\vartheta & \text{se } \ l \neq m\,,\ l = j \ \text{ e } \ m = i\ . \end{cases}$$

Si ricordi che nella scrittura matematica delle componenti di un/una vettore/matrice gli indici partono da 1, mentre nella scrittura in linguaggio **C** essi partono da 0. Per cercare di evitare possibili confusioni, in tutto il testo del presente del presente tema d'esame, la scrittura matematica delle formule è stata adeguata alle convenzioni del linguaggio **C**.

Per fissare le idee, sia $\mathcal{A}$ la matrice che vogliamo trasformare in una triangolare alta grazie alla composizione delle rotazioni indotte da opportune matrici di Givens. L'angolo di rotazione $\vartheta_{i,j}$ viene determinato in modo da azzerare l'elemento sotto–diagonale che compare in corrispondenza alla riga j e colonna i (dove si ricordi che $0 \le i < j < n$) della matrice prodotto $\mathcal{A}' = G_{i,j}(\vartheta_{i,j}) \cdot \mathcal{A}$. In realtà, dal punto di vista dell'algoritmo di soluzione numerica del problema, la determinazione dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ richiede alcuni inutili passaggi aggiuntivi, mentre ciò che effettivamente serve sono i valori di $\cos\vartheta_{i,j}$ e di $\sin\vartheta_{i,j}$, che indichiamo rispettivamente con c e s (in questa fase, si sottintende che gli indici i e j siano fissati). I valori di $c = \cos\vartheta_{i,j}$ e di $s = \sin\vartheta_{i,j}$ si determinano procedendo come segue:

(i) si ponga α uguale all'elemento (diagonale) corrispondente alla i–esima riga e i–esima colonna della matrice $\mathcal{A}$; si ponga β uguale all'elemento (sotto–diagonale) che corrisponde alla j–esima riga e i–esima colonna della matrice $\mathcal{A}$;

(ii) se $\beta = 0$, si ponga $c = 1$ e $s = 0$;

(iii) se $|\beta| > |\alpha|$, si ponga, prima, la variabile ausiliaria $t = -\alpha/\beta$, poi, $s = 1/\sqrt{1+t^2}$ e $c = s \cdot t$;

(iv) se entrambe le condizioni richieste ai punti (ii)–(iii) **non** sono verificate, si ponga, prima, la variabile ausiliaria $t = -\beta/\alpha$, poi, $c = 1/\sqrt{1+t^2}$ e $s = c \cdot t$.

Le prescrizioni (i)–(iv) permettono la determinazione di c e s (in un modo che minimizza gli errori numerici) per tutti i possibili valori di α e β. Ciò può essere facilmente giustificato risolvendo un opportuno sistema di due equazioni lineari nelle due incognite c e s.

Utilizzando le *matrici di Givens*, la *decomposizione* QR della matrice di partenza A si può descrivere con una sola lunga formula che è però concettualmente abbastanza semplice:

$$
\begin{aligned}
R = {} & G_{n-2,n-1}(\vartheta_{n-2,n-1}) \cdot \\
& G_{n-3,n-2}(\vartheta_{n-3,n-2}) \cdot G_{n-3,n-1}(\vartheta_{n-3,n-1}) \cdot \\
& \ldots \cdot \\
& G_{0,1}(\vartheta_{0,1}) \cdot \ldots \cdot G_{0,n-2}(\vartheta_{0,n-2}) \cdot G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot A \quad ,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dove (procedendo per induzione) si dimostra facilmente che R è una matrice *triangolare superiore* quando i valori di $c = \cos\vartheta_{i,j}$ e $s = \sin\vartheta_{i,j}$ sono determinati *seguendo le prescrizioni (i)–(iv)* e procedendo *a ritroso*. In maggior dettaglio, ciò significa che, per primi, si calcolano i valori di $c = \cos\vartheta_{0,n-1}$ e di $s = \sin\vartheta_{0,n-1}$ applicando l'algoritmo descritto ai punti (i)–(iv) alla matrice $\mathcal{A} = A$; successivamente, si calcolano $c = \cos\vartheta_{0,n-2}$ e di $s = \sin\vartheta_{0,n-2}$, utilizzando nuovamente le prescrizioni (i)–(iv) quando la matrice $\mathcal{A} = G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot A$; quindi, si itera questo procedimento fino a determinare $c = \cos\vartheta_{n-2,n-1}$ e $s = \sin\vartheta_{n-2,n-1}$.

Ovviamente, la matrice ortogonale Q (che permette di realizzare la decomposizione QR) è data dalla formula seguente:

$$
\begin{aligned}
Q = {} & G_{0,n-1}(-\vartheta_{0,n-1}) \cdot G_{0,n-2}(-\vartheta_{0,n-2}) \cdot \ldots \cdot G_{0,1}(-\vartheta_{0,1}) \cdot \\
& G_{1,n-1}(-\vartheta_{1,n-1}) \cdot G_{1,n-2}(-\vartheta_{1,n-2}) \cdot \ldots \cdot G_{1,2}(-\vartheta_{1,2}) \cdot \\
& \ldots \cdot \\
& G_{n-2,n-1}(-\vartheta_{n-2,n-1}) \quad .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Dopo aver calcolato la decomposizione QR, possiamo facilmente determinare il vettore incognito $\mathbf{x}$ che risolve il sistema lineare in formula (1). Infatti, proprio come ci eravamo proposti di fare, possiamo ricondurre il problema alla soluzione di un sistema del tipo:

$$
U\mathbf{x} = \mathbf{d} \ , \tag{5}
$$

dove U è una matrice triangolare alta e $\mathbf{d}$ è un "vettore noto"; nel nostro caso, $U = Q^{-1} \cdot A = R$ e $\mathbf{d} = Q^{-1} \cdot \mathbf{b}$. La soluzione del precedente sistema lineare è la parte finale del *metodo di eliminazione di Gauss* e, pertanto, è ben nota; essa si può riassumere con la formula seguente:

$$
x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} u_{i,j} x_j}{u_{i,i}} \qquad \forall\ i = n-1, \ldots, 0 \ , \tag{6}
$$

dove i coefficienti $u_{i,j}$ sono gli elementi della matrice triangolare alta U, ovvero $U = \left(u_{i,j}\right)_{0\le i,j\le n-1}$. Infine, si ricordi che anche la formula precedente va interpretata *a ritroso*: ciò significa che prima si deve determinare x_{n-1}, poi x_{n-2} (perché nell'equazione risolvente per x_{n-2}, nel membro di destra, compare un'unica componente del vettore incognito, che è però la già nota x_{n-1}), quindi si itera il procedimento che termina con il calcolo di x_0.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che, *dopo aver letto da un dato file una matrice e un vettore noto, determina i valori del coseno e del seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$, dove i valori degli indici i e j sono inseriti da tastiera*. Il programma deve contenere:

(A) si includa nel programma una *function* che ha cinque argomenti: una matrice A, due indici i, j e due *puntatori* alle variabili c e s; tale *function* calcola i valori di $c = \cos\vartheta_{i,j}$ e $s = \sin\vartheta_{i,j}$, applicando l'algoritmo descritto ai punti (i)–(iv) alla matrice $\mathcal{A} = A$;

(B) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

- (B1) *l'apertura di un file di input* che si chiama `givens.inp`, il quale deve essere preliminarmente scaricato dalla rete e posizionato nella stessa cartella contenente il programma che stiamo descrivendo; il file `givens.inp` contiene i dati relativi alla matrice A e al vettore noto $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema (1);
- (B2) la lettura dal *file di input* della dimensione effettiva n delle matrici; si effettui un *test*, in modo tale che se $n > NDIM$ l'esecuzione del programma deve essere immediatamente arrestata; il significato del parametro $NDIM$ sarà discusso in seguito nella sezione *"alcuni consigli"*;
- (B3) la lettura dal *file di input* dei valori degli elementi che compongono la matrice A e il vettore noto b; essi sono disposti in modo tale ciascun elemento è il solo occupante di una linea del file; inoltre, gli elementi della prima riga della matrice A occupano le righe del file che vanno dalla seconda alla $n+1$–esima, quelli della seconda dalla $n+2$–esima alla $2n+1$-esima e così via; infine, gli elementi del vettore noto sono disposti sulle ultime n linee del file (cioè quelle che vanno dalla n^2+2–esima alla n^2+n+1-esima);
- (B4) l'*input da tastiera* dei valori degli indici i e j; essi devono essere sottoposti a test in modo tale che siano soddisfatte le limitazioni $0 \le i < j < n$; qualora queste condizioni non saranno verificate, tali valori dovranno essere reinseriti correttamente;
- (B5) il calcolo dei valori del coseno e del seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;
- (B6) la stampa sul video *(in modo esteticamente non disprezzabile)* dei valori del coseno e del seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$, che sono stati determinati così come spiegato al precedente punto (B5).

Alcuni consigli
È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di $NDIM$ per mezzo di una direttiva `#define`.
La scrittura del programma è enormemente facilitata se si ricorre al seguente "trucco":

quando si deve decidere quanta parte della memoria deve essere destinata ad ospitare i vari elementi dei vettori e delle matrici, si effettuino dei "sovradimensionamenti" in modo tale da allocare sempre, rispettivamente, $NDIM$ e $NDIM \times NDIM$ celle di memoria. Ciò nonostante, le istruzioni che permettono il calcolo dei valori dei componenti dei vettori e delle matrici verranno effettuate tenendo conto che la *dimensione effettiva* dello spazio vettoriale che stiamo considerando è $n \le NDIM$.
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).
Il *file di input* `givens.inp` è esattamente uguale a quello che è stato utilizzato durante una lezione del corso, al fine di risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo di Cramer. Ovviamente, la soluzione basata sulla *decomposizione* QR (che viene descritta nel presente tema d'esame) dovrà coincidere, a meno degli inevitabili errori numerici, con quella ottenuta con il metodo di Cramer. Quest'ultima banale osservazione può permettere di fare alcuni confronti per verificare la correttezza del programma.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da calcolare la prima matrice intermedia tra quelle che servono a determinare la decomposizione QR, cioè $G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot A$, e anche il corrispondente vettore noto $G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot \mathbf{b}$. A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha sei argomenti: due indici i e j, il valore della dimensione effettiva n, i valori c e s (rispettivamente uguali al coseno e al seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens) e una matrice R; tale *function* restituisce (attraverso il sesto argomento) la matrice R ricalcolata in modo che essa sia uguale al prodotto matriciale tra $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$ e la stessa matrice R, così com'era **prima** della chiamata della *function*; al fine di ottimizzare i tempi di calcolo, è conveniente limitarsi al calcolo delle componenti che vengono effettivamente mutate dall'azione dell'operatore $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})\,\cdot$, in modo da evitare il prodotto matriciale completo; a tale scopo, si proceda così come descritto come ai seguenti punti (A1)–(A3);
  - (A1) si pongano due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispettivamente uguali alla i–esima e j–esima riga della matrice R;
  - (A2) si ridefiniscano gli elementi della i–esima riga di R in modo tale che essa (cioè la i–esima riga di R) divenga uguale a $c\mathbf{u} - s\mathbf{v}$;
  - (A3) si ridefiniscano gli elementi della j–esima riga di R in modo tale che essa (cioè la j–esima riga di R) divenga uguale a $s\mathbf{u} + c\mathbf{v}$;

(B) si scriva una *function* che ha cinque argomenti: due indici i e j, i valori c e s (rispettivamente uguali al coseno e al seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens) e un vettore $\mathbf{d}$; tale *function* restituisce (attraverso il quinto argomento) il vettore $\mathbf{d}$ ricalcolato in modo che esso sia uguale al prodotto matrice per vettore tra $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$ e lo stesso vettore $\mathbf{d}$, così com'era **prima** della chiamata della *function*; al fine di ottimizzare i tempi di calcolo, è conveniente limitarsi al calcolo delle componenti che vengono effettivamente mutate dall'azione dell'operatore $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})\,\cdot$, in modo da evitare il prodotto matrice per vettore nella sua completezza; a tale scopo, si proceda così come descritto come ai seguenti punti (B1)–(B3);

(B1) si pongano due variabili temporanee γ e δ rispettivamente uguali all'i–esimo e j–esimo elemento del vettore $\mathbf{d}$;

(B2) si ridefinisca l'i–esimo elemento del vettore $\mathbf{d}$, in modo tale che esso divenga uguale a $c\gamma - s\delta$;

(B3) si ridefinisca il j–esimo elemento del vettore $\mathbf{d}$, in modo tale che esso divenga uguale a $s\gamma + c\delta$;

(C) all'interno della *main function*, si allochi la memoria per una nuova matrice R e si *inizializzino* i valori dei suoi elementi in modo tale che $R = A$; inoltre, si allochi la memoria per un nuovo vettore $\mathbf{d}$ e si *inizializzino* i valori dei suoi elementi in modo tale che $\mathbf{d} = \mathbf{b}$;

(D) all'interno della *main function*, si calcolino i valori del coseno e del seno dell'angolo $\vartheta_{0,n-1}$ associato alla $(0\,,\, n-1)$–esima matrice di Givens $G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1})$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*;

(E) all'interno della *main function*, si ricalcoli la matrice R in modo che essa sia uguale al prodotto $G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot A$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)* del presente obiettivo;

(F) all'interno della *main function*, si ricalcoli il vettore $\mathbf{d}$ in modo che esso sia uguale al prodotto $G_{0,n-1}(\vartheta_{0,n-1}) \cdot \mathbf{b}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (B)* del presente obiettivo;

(G) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video della matrice R e del vettore $\mathbf{d}$ in modo che questa stessa stampa sia *esteticamente non disprezzabile.*

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da determinare la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare (1), dopo aver calcolato gli elementi della matrice R che compare nella decomposizione $A = QR$. A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: una matrice U , un vettore noto $\mathbf{d}$, il valore della dimensione effettiva n e un altro vettore $\mathbf{x}$; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare (5), dove U è una matrice triangolare alta; il calcolo degli elementi di $\mathbf{x}$ deve essere effettuato traducendo in linguaggio **C** la formula (6);

(B) si includa nel programma una *function* che ha quattro argomenti: una matrice A , un vettore $\mathbf{v}$, il valore della dimensione effettiva n e un vettore $\mathbf{w}$; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il vettore risultato del seguente prodotto matrice per vettore $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$;

(C) all'interno della *main function*, si calcolino la matrice R (la quale è definita dalla formula (3) e compare nella decomposizione $A = QR$) e il corrispondente vettore noto $\mathbf{d} = Q^{-1} \cdot \mathbf{b}$; a tale scopo, si proceda così come descritto come ai seguenti punti (C1)–(C13);

(C1) si scrivano due cicli annidati: il primo (e più esterno) di questi due cicli viene iterato mentre l'indice "contatore" i va da 0 a $n-1$, il secondo viene iterato mentre l'indice "contatore" j va da $n-1$ a $i+1$, procedendo *a ritroso*; all'interno di questi due cicli si ripetano le istruzioni descritte ai seguenti punti (C11)–(C13);

(C11) si calcolino i valori del coseno e del seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*;

(C12) per mezzo di un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 2*, si ricalcoli la matrice R in modo che essa sia uguale al prodotto matriciale tra $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$ e la stessa matrice R, così com'era **prima** della chiamata della *function*;

(C13) per mezzo di un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (B) dell'obiettivo 2*, si ricalcoli il vettore $\mathbf{d}$ in modo che esso sia uguale al prodotto matrice per vettore tra $G_{i,j}(\vartheta_{i,j})$ e lo stesso vettore $\mathbf{d}$, così com'era **prima** della chiamata della *function*;

(D) all'interno della *main function*, si effettui una nuova stampa sul video della matrice R e del vettore $\mathbf{d}$ in modo che questa stessa stampa sia *esteticamente non disprezzabile*; ovviamente, la decomposizione QR della matrice A di partenza *deve considerarsi ben riuscita* se la stampa su video evidenzia che ora R ha la struttura di una matrice di tipo triangolare superiore;

(E) all'interno della *main function*, si calcoli il vettore $\mathbf{x}$ in modo che esso sia uguale alla soluzione del sistema $R\mathbf{x} = \mathbf{d}$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)* del presente obiettivo;

(F) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video del vettore $\mathbf{x}$ in modo che questa stessa stampa sia *esteticamente non disprezzabile*;

(G) all'interno della *main function*, si calcoli il vettore $\mathbf{c} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$; tale calcolo deve essere effettuato anche grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (B)* del presente obiettivo;

(H) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video del valore di $\sum_{j=1}^{n} |c_j|$ *in formato esponenziale*; ovviamente, la determinazione del vettore incognito $\mathbf{x}$ *deve considerarsi ben riuscita* se $\sum_{j=1}^{n} |c_j|$ è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*

Obiettivo (finale) 4:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da determinare gli elementi della matrice Q che compare nella decomposizione $A = QR$, per poi controllare che effettivamente $A = QR$. A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha sei argomenti: due indici i e j, il valore della dimensione effettiva n, i valori c e s (rispettivamente uguali al coseno e al seno dell'angolo $\vartheta_{i,j}$ associato alla $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens) e una matrice Q ; tale *function* restituisce (attraverso il sesto argomento) la matrice Q ricalcolata in modo che essa sia uguale al prodotto matriciale tra la stessa matrice Q (così com'era **prima** della chiamata della *function*) e la matrice $G_{i,j}(-\vartheta_{i,j})$ (che è l'inversa della $(i\,,\,j)$–esima matrice di Givens); al fine di ottimizzare i tempi di calcolo, è conveniente limitarsi al calcolo delle componenti che vengono effettivamente mutate dall'azione dell'operatore $\cdot\, G_{i,j}(-\vartheta_{i,j})$, in modo da evitare il prodotto matriciale completo; a tale scopo, si proceda così come descritto come ai seguenti punti (A1)–(A3);

(A1) si pongano due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispettivamente uguali alla i–esima e j–esima colonna della matrice Q ;

(A2) si ridefiniscano gli elementi della i–esima colonna di Q in modo tale che essa (cioè la i–esima colonna di Q) divenga uguale a $c\mathbf{u} - s\mathbf{v}$;

(A3) si ridefiniscano gli elementi della j–esima colonna di Q in modo tale che essa (cioè la j–esima colonna di Q) divenga uguale a $s\mathbf{u} + c\mathbf{v}$;

(B) si includa nel programma una *function* che ha quattro argomenti: due matrici A e B , il valore della dimensione effettiva n e, infine, una terza matrice C ; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il risultato del prodotto matriciale $C = A \cdot B$;

(C) all'interno della *main function*, in un opportuno punto del programma che corrisponde all'inizio della descrizione dell'obiettivo 2, si allochi la memoria per una nuova matrice Q e si *inizializzino* i valori dei suoi elementi in modo tale che $Q = \mathbf{I}$ dove $\mathbf{I}$ è l'identità;

(D) all'interno della *main function*, in corrispondenza ad alcuni punti del programma che sono già stati descritti dagli obiettivi 2 e 3 e che *devono essere accuratamente scelti*, per mezzo di opportune *chiamate della function descritta al punto (A)* del presente obiettivo, si ricalcoli varie volte la matrice Q , in modo che alla fine delle iterazioni descritte nell'obiettivo 3 essa sia proprio uguale a quella descritta dalla formula (4);

(E) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video della matrice Q in modo che questa stessa stampa sia *esteticamente non disprezzabile*;

(F) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice $QR - A$; tale calcolo deve essere effettuato anche grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)* del presente obiettivo;

(G) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video *in formato esponenziale* del valore del massimo elemento *in valore assoluto* della matrice $QR - A$; ovviamente, la determinazione della matrice *ortogonale Q deve considerarsi ben riuscita* se il suddetto massimo elemento (*in valore assoluto*) è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*