

Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
5 Febbraio 2013

Tema d'esame: Studio di alcune caratteristiche di una delle *funzioni ellittiche di Jacobi*.

Descrizione del metodo di calcolo

Le *funzioni ellittiche di Jacobi* vennero introdotte (da Jacobi stesso), allo scopo di scrivere una soluzione esplicita del problema del *corpo rigido*. Inoltre, esse compaiono in alcune espansioni interessanti in vari campi dell'*analisi matematica*, della *fisica matematica* e, in particolare, in *meccanica celeste*.

Sia $m \in [0, 1)$ un parametro reale *fissato*, per un qualsiasi $u \in \mathbf{R}$ è possibile determinare il corrispondente valore $\varphi = \varphi(u)$ tale che

$$(1) \quad u = F(\varphi(u); m)$$

dove la funzione a secondo membro dell'equazione precedente altro non è che l'*integrale ellittico incompleto di prima specie*, cioè

$$(2) \quad F(\varphi; m) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\vartheta)}} ,$$

allora la *funzione ellittica di Jacobi sn* è definita in modo tale che

$$(3) \quad \operatorname{sn}(u) = \sin(\varphi(u)) .$$

Dalla sua definizione, è evidente perché la funzione sn viene comunemente detta il *seno ellittico*. Per inciso, il *coseno ellittico* è definito in modo tale che $\operatorname{cn} u = \cos \varphi(u)$; inoltre, esistono varie altre *funzioni ellittiche di Jacobi*.

È abbastanza evidente che il seno ellittico è una funzione periodica di periodo $4\mathcal{K}(m)$, dove $\mathcal{K}(m)$ è il ben noto *integrale ellittico completo di prima specie*, cioè

$$(4) \quad \mathcal{K}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\vartheta)}} .$$

Tale *integrale ellittico completo di prima specie* può essere espresso tramite delle espansioni in serie, cioè

$$(5) \quad \mathcal{K}(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 m^n + \dots \right\}$$

Il seno ellittico soddisfa la seguente interessante proprietà: $y(t) = \operatorname{sn}(t)$ è soluzione dell'*equazione differenziale*

$$(6) \quad \ddot{y} = -(1 + m)y + 2my^3 ,$$

con le *condizioni iniziali*

$$(7) \quad y(0) = 0 , \quad \dot{y}(0) = 1 .$$

Di fatto, il *problema di Cauchy* che è appena stato descritto (ed è costituito dall'*equazione differenziale* (6) e dalle *condizioni iniziali* (7)) fornisce una definizione della funzione *seno ellittico* che è equivalente a quella data dalle equazioni (1)–(3). Questo spiega perché i valori del seno ellittico possono essere calcolati in modo molto efficiente utilizzando uno dei ben noti metodi di integrazione numerica di tipo *Runge–Kutta* per ottenere una soluzione approssimata del *problema di Cauchy* (6)–(7). Qui di seguito riassumiamo brevemente uno tra i più elementari *metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali*, cioè quello di *Heun*.

Abitualmente, la famiglia di schemi di integrazione numerica del tipo Runge–Kutta tratta sistemi autonomi di equazioni differenziali del primo ordine, cioè

$$(8) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ,$$

dove $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è un *campo vettoriale*. Per fissare le idee, torniamo a considerare l'equazione differenziale del secondo ordine in formula (6), essa può essere posta nella forma del sistema (8), identificando le varie componenti del vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ come segue

$$(9) \quad x_1 \leftrightarrow y , \quad x_2 \leftrightarrow \dot{y} ;$$

inoltre, si definisca il *campo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ in modo tale che

$$(10) \quad f_1(\mathbf{x}) = x_2 , \quad f_2(\mathbf{x}) = -(1 + m)x_1 + 2mx_1^3 .$$

Al fine di studiare un *problema di Cauchy* perfettamente equivalente a quello costituito dalle formule (6)–(7), assieme alle *equazioni differenziali* (8) (con \mathbf{x} e \mathbf{f} rispettivamente date da (9) e (10)) occorre considerare le seguenti *condizioni iniziali*:

$$(11) \quad \mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{X}} \quad \text{tale che} \quad \tilde{X}_1 = 0 , \quad \tilde{X}_2 = 1 .$$

Supponiamo di conoscere la soluzione $\mathbf{x}(\tau)$ a un fissato istante τ (o almeno una sua approssimazione) e ci proponiamo di calcolarla anche al tempo $\tau + h$ (dove si intende che il valore di h è piccolo in valore assoluto). A tal fine, determiniamo i vettori \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{x}^* in modo tale che

$$(12) \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) , \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\tau) + h\mathbf{k}_1 , \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) .$$

Sussiste quindi la seguente relazione:

$$(13) \quad \mathbf{x}(\tau + h) \simeq \mathbf{x}(\tau) + h \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} .$$

Più esattamente, supponiamo di essere interessati a calcolare numericamente la soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ per un intervallo di tempo $[0, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}]$, che suddividiamo in N sottointervalli $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ di ampiezza $h = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}/N$; il *metodo di Heun* fornisce dei valori approssimati di $\mathbf{x}(\tau_j) \forall j = 1, \dots, N$, applicando ripetutamente la formula (13). Si dimostra che alla fine di tale procedimento, il calcolo di $\mathbf{x}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ è corretto a meno di un errore $\mathcal{O}(h^2)$. In questo senso il metodo di Heun è di tipo Runge–Kutta di ordine 2.

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio C che *permette di effettuare il calcolo numerico dell'integrale ellittico incompleto di prima specie, così come definito dalla formula (2)*. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha due argomenti: la “variabile di integrazione” ϑ e il parametro m ; tutti e due questi argomenti siano di tipo `double`; (*alla fine della chiamata*) tale *function* deve restituire il valore della funzione integranda $1/\sqrt{1 - m \sin^2(\vartheta)}$ che compare nella formula (2);
- (B) una *function* che ha cinque argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numintervalli`, un parametro reale p , e infine un *puntatore a una function* f , la quale, a sua volta, dipenderà da altri due argomenti di tipo `double`; (*alla fine della chiamata*) tale *function* deve restituire il valore approssimato dell’integrale definito $\int_a^b f(u, p) du$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numintervalli` sotto-intervalli;
- (C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
- (C1) l’*input da tastiera* del valore dell’estremo di integrazione φ ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se φ non è maggiore di zero, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C2) l’*input da tastiera* del valore del parametro m ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se m non è compreso nell’intervallo $[0, 1)$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C3) l’*input da tastiera* del valore del numero di sotto-intervalli `numintervalli`; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se `numintervalli` non è maggiore di zero, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C4) si effettui un’*opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare il valore dell’integrale ellittico incompleto di prima specie $F(\varphi; m) = \int_0^\varphi d\vartheta (1 - m \sin^2(\vartheta))^{-1/2}$; il valore di tale integrale deve essere approssimato utilizzando `numintervalli` sotto-intervalli dell’insieme di integrazione $[0, \varphi]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato m come parametro e l’indirizzo della *function* descritta al punto (A) (la quale, a sua volta, richiede proprio un parametro p posto uguale al valore di m);
- (C5) la stampa del valore dell’integrale ellittico incompleto di prima specie $F(\varphi; m)$ calcolato così come descritto ai precedenti punti (C1)–(C4).

Alcuni consigli

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall’obiettivo 2, in modo tale da *poter effettuare il calcolo del valore dell’integrale ellittico completo di prima specie*, per mezzo della sua espansione in serie (5). A tal fine si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha come argomento il solo parametro m ; (*alla fine della chiamata*) tale *function* deve restituire il valore approssimato dell’integrale ellittico completo di prima specie $\mathcal{K}(m)$ calcolato utilizzando la formula (5), che può essere tradotta in un algoritmo così come descritto ai seguenti punti (D1)–(D9);

- (B) all'interno della *main function*, si effettui un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo tale che essa effettui il calcolo dei valori dell'integrale ellittico completo di prima specie quando l'argomento è proprio il parametro m ;
- (C) si stampi sul video il valore di $\mathcal{K}(m)$, calcolato così come indicato al punto (B).

Per quanto riguarda la *function* richiesta al punto (A), precisiamo che, per fissare le idee, $\mathcal{K}(m)$ sarà (quasi) uguale al valore “finale” ospitato in una variabile, detta K . Inoltre, verranno utilizzate anche alcune variabili “temporanee”, cioè il contatore j , la potenza (del parametro m) **potm**, il coefficiente c e l'approssimazione “al passo precedente” \bar{K} . La *function* richiesta al punto (A) traduce in linguaggio **C** il seguente algoritmo di calcolo:

- (D1) si ponga inizialmente $K = 1$, $j = 0$, **potm** = 1, $c = 1$;
- (D2) si eseguano le seguenti istruzioni (D3)–(D7), mentre è verificata la condizione di permanenza nel ciclo che verrà enunciata al punto (D8);
- (D3) si aggiorni il valori dell'approssimazione “al passo precedente”, ponendo $\bar{K} = K$;
- (D4) si incrementi di due il valore del contatore j ;
- (D5) si aggiorni il valore di **potm**, moltiplicandolo per m ;
- (D6) si aggiorni il valore del coefficiente c , moltiplicandolo per $[(j - 1)/j]^2$ (si faccia attenzione a scrivere questa istruzione in modo che **non** venga calcolato solo il *quoziente intero* della divisione);
- (D7) si aggiorni il valore di K , aggiungendogli il termine $c \cdot \text{potm}$;
- (D8) qualora $K \neq \bar{K}$ si rieseguo le istruzioni descritte ai punti (D3)–(D7), altrimenti si vada al seguente punto (D9);
- (D9) si esegua l'“aggiornamento finale” del valore di K , moltiplicandolo per il fattore $\pi/2$.

Per confronto con la formula (5), non dovrebbe essere difficile rendersi conto che l'algoritmo descritto ai precedenti punti (D1)–(D9) fornisce proprio una buona approssimazione di $\mathcal{K}(m)$.

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere la soluzione numerica (con metodo di Newton) dell'equazione implicita (1) nell'incognita φ , quando sono noti i valori della variabile u e del parametro m . A tal fine si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i valori di u e m (che sono entrambi di tipo **double**) e, infine, il valore di **numintervalli** (che è evidentemente di tipo **int**); *alla fine della chiamata*, la *function* che stiamo descrivendo deve restituire il valore approssimato di φ che risolve l'equazione integrale $F(\varphi; m) - u = 0$ *utilizzando il metodo di Newton* così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A4);
- (A1) inizialmente, si assegni alla variabile *locale* **phi** il valore $u\sqrt{1-m}$ come prima approssimazione della soluzione $\varphi(u)$ dell'equazione (1);
- (A2) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A21)–(A24) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A3);
- (A21) si assegni alla variabile *locale* **vF** il valore approssimato di $F(\text{phi}; m)$; tale valore deve essere determinato calcolando l'integrale che compare a secondo membro dell'equazione (2) tramite *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B) dell'obiettivo 1*, in modo tale che l'estremo superiore di integrazione sia proprio **phi** e il numero di sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, \text{phi}]$

sia uguale al valore `numintervalli` che compare tra gli argomenti della *function* che stiamo descrivendo;

- (A22) si assegni alla variabile *locale* `dF` il valore della derivata dell'integrale ellittico incompleto di prima specie, *calcolata quando il primo argomento è proprio* `phi` tramite un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (A) dell'obiettivo 1;
- (A23) si assegni alla variabile *locale* `dphi` il valore del rapporto tra la differenza $vF - u$ e `dF`;
- (A24) si calcoli una nuova approssimazione della soluzione seguendo il metodo di Newton; a questo scopo si modifichi la variabile *locale* `phi` sottraendo al suo valore precedente la quantità `dphi`;
- (A3) se il *valore assoluto dello scostamento relativo* `dphi/phi` (che sostanzialmente descrive l'imprecisione (relativa) con la quale è stata determinata la soluzione `phi`) è maggiore di alcuni ordini di grandezza rispetto all'*errore di macchina*, cioè se si verifica che

$$|dphi/phi| > 10^{-12} ,$$

allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A21)–(A24);

- (A4) si restituisca all'ambiente chiamante (della *function* che stiamo descrivendo) il valore di `phi`;
- (B) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* del valore della variabile *u*; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se *non è compreso nell'intervallo* $(0, 4K(m))$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C) all'interno della *main function*, si effettui un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (A), in modo tale che essa effettui il calcolo approssimato del valore della variabile $\varphi = \varphi(u)$ che risolve l'equazione implicita (1);
- (D) si stampi sul video il valore di $\varphi(u)$, calcolato così come indicato al punto (C).

Obiettivo (intermedio) 4:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da aggiungere la soluzione numerica del *problema di Cauchy* costituito dall'*equazione differenziale* (6) e dalle *condizioni iniziali* (7), in modo da poter effettuare agevolmente il calcolo della funzione *seno ellittico*. A tali scopi si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* con tre argomenti, che sono il vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, il parametro *m* e il vettore \mathbf{f} ; il vettore \mathbf{x} e il parametro *m* sono da intendersi come le variabili di *input*; la *function* deve essere scritta in modo tale che (*alla fine della chiamata*) i valori delle due componenti del vettore \mathbf{f} sono uguali a quelle del campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, così come esse sono definite nella formula (10);
- (B) si scriva una *function* con quattro argomenti, che sono l'intervallo di tempo *h*, il vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, il parametro *m* e infine un *puntatore a una function* \mathbf{f} , la quale effettua il calcolo del campo vettoriale *e*, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti (che sono un array di tipo `double`, un parametro `double` *e*, infine, un altro array di tipo `double`); la *function* deve essere scritta in modo tale che, *se all'inizio della chiamata* supponiamo che nel vettore \mathbf{x} siano memorizzati i valori corrispondenti alla soluzione $\mathbf{x}(\tau)$ a un certo istante τ , allora, *alla fine della chiamata*, nello stesso vettore \mathbf{x} saranno presenti

i valori corrispondenti all'approssimazione di $\mathbf{x}(\tau + h)$ che è definita nel membro di destra della formula (13), dove i valori dei vettori \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{x}^* sono dati in (12);

- (C) siccome la variabile u “gioca il ruolo di tempo totale $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ dell'intervallo di integrazione”, all'interno della *main function*, si ponga $h = u/\text{numintervalli}$;
- (D) all'interno della *main function*, si ponga il vettore \mathbf{y} uguale alle condizioni iniziali, cioè si ponga $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{X}}$, con $\tilde{\mathbf{X}}_1 = 0$ e $\tilde{\mathbf{X}}_2 = 1$;
- (E) all'interno della *main function*, si effettuino numintervalli chiamate consecutive della *function* descritta al punto (B); inoltre, le suddette chiamate devono essere tali che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A); si osservi che l'effetto di ciascuna di queste numintervalli chiamate consecutive è quello di produrre il calcolo approssimato di $\mathbf{y}(\tau_j) = \mathbf{x}(\tau_j)$ a partire da $\mathbf{y}(\tau_{j-1}) = \mathbf{x}(\tau_{j-1})$, dove $\tau_j = jh \forall j = 0, \dots, \text{numintervalli}$;
- (F) all'interno della *main function*, in formato esponenziale si stampi sul video il valore assoluto della differenza tra $\sin(\varphi)$ e la prima componente del vettore \mathbf{y} .

Per come sono stati sinora descritti i vari algoritmi di calcolo richiesti, $\varphi = \varphi(u)$ è la soluzione dell'equazione implicita (1) (determinata così come richiesto nell'obiettivo 3); inoltre, la prima componente del vettore \mathbf{y} deve essere uguale a $y_1(u) = \text{sn}(u)$; pertanto, in questo stesso punto (F), viene richiesto di stampare su video il *valore assoluto* di due quantità, le quali (per la definizione (3)) *devono proprio essere uguali a meno degli inevitabili errori numerici*. Ovviamente, la soluzione numerica del *problema di Cauchy* (costituito dall'equazione differenziale (6) e dalle *condizioni iniziali* (7)) è da considerarsi *ben riuscita* se il valore stampato (su video) del valore assoluto della suddetta differenza è *piccolo*.

Obiettivo (intermedio) 5:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di $2N + 2$ coppie di valori (dove, per brevità, sia $N = 10\,000$), a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico della funzione *seno ellittico* e di confrontarlo con quello della ben nota funzione *seno trigonometrico*. A tale scopo si può modificare la *main function*, procedendo come segue:

- (A) si ponga ora $h = 4\mathcal{K}(m)/N$;
- (B) si apra un **file** che è destinato a contenere le coppie dei punti dei grafici delle funzioni seno (sia quello *ellittico* che quello *trigonometrico*);
- (C) si stampino le posizioni iniziali sulla prima riga del **file**, in modo che all'inizio di tale riga compaia il valore 0 e poi quello di $\tilde{\mathbf{X}}_1 = 0$;
- (D) si eseguano ancora le istruzioni descritte al precedente punto (E) dell'obiettivo 4, ma facendo attenzione alla modifica richiesta al punto seguente;
- (E) si modifichi il punto (E) dell'obiettivo 4, in modo tale che all'interno del ciclo che è implicitamente richiesto proprio dal punto (E) si proceda alla stampa su **file**; tale stampa deve essere effettuata di modo che sulla $j+1$ -esima riga del **file** compaia prima il valore di $\tau_j = jh$ e poi quello corrispondente di $y_1(\tau_j) = \text{sn}(jh)$; inoltre, tale ciclo deve essere iterato N volte;
- (F) si ponga ora $h = 2\pi/N$ e si effettui un ulteriore ciclo sul contatore j che va da $j = 0$ fino a $j = N$, all'interno del quale si proceda a delle ulteriori operazioni di stampa su **file** in modo tale che sulla $N + 1 + j$ -esima riga di tale **file** compaia prima il valore di

$\tau_j = jh$ e poi quello corrispondente di $\sin(\tau_j) = \sin(jh)$;
(G) si chiuda il **file** che era stato aperto al punto (B).

Obiettivo (finale) 6:

si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un confronto (esteticamente apprezzabile) tra il grafico della funzione *seno ellittico* e quello della ben nota funzione *seno trigonometrico*, in modo tale che il suddetto confronto sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dal precedente obiettivo 5.