Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
15 Febbraio 2012

Tema d'esame: Calcolo dell'orbita nel *problema di Calogero* applicando opportunamente il *metodo di Heun* per integrare numericamente il corrispondente *sistema di equazioni differenziali* di Newton.

Descrizione del metodo di calcolo

La soluzione del problema dei *moti centrali* (essenzialmente dovuto a Newton) fu un successo fondamentale nella storia della *meccanica analitica* e in quella della *meccanica celeste*. In tale problema, si studia il moto *nel piano* di un corpo puntiforme P di massa m sotto l'influenza esercitata da un altro corpo di massa M (posto nell'origine del sistema di riferimento), che lo attrae con una forza conservativa corrispondente a un'energia potenziale $U = U(\varrho)$. L'espressione funzionale del potenziale U mette appunto in evidenza che esso dipende dalla sola distanza $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ tra il punto P e l'origine.

Il problema dei *moti centrali* è un esempio di *sistema integrabile*, ovvero un sistema tale che la sua evoluzione in funzione del tempo t è descritta dalle equazioni differenziali di Newton, la cui soluzione può essere scritta *in forma chiusa* per ogni tempo t e per ogni condizione iniziale. Tale soluzione può essere espressa in forma particolarmente elegante quando si considera il caso del potenziale di Calogero U_C, che è definito come segue:

$$U_C(\varrho) = -G\frac{Mm}{\varrho} + \frac{\varepsilon m}{\varrho^2} \ , \tag{1}$$

dove il primo addendo è evidentemente il potenziale gravitazionale di Keplero (ovviamente, G è la costante gravitazionale) e, per quanto riguarda il secondo termine di correzione che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, tradizionalmente ci si limita a considerare il caso con $\varepsilon > 0$. Siccome la soluzione del problema di Calogero non dipende dal valore della massa m, senza perdita di generalità, la "normalizziamo" ponendo

$$m = 1 \ .$$

Le equazioni differenziali di Newton (o *equazioni del moto*) per il corpo puntiforme P soggetto all'azione del potenziale U_C si scrivono come segue:

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}\,U_C}{\mathrm{d}\varrho}\,\frac{x}{\varrho} \ , \qquad\qquad \ddot{y} = -\frac{\mathrm{d}\,U_C}{\mathrm{d}\varrho}\,\frac{y}{\varrho} \ , \tag{2}$$

dove, ovviamente, $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ denotano le derivate seconde rispetto al tempo delle coordinate cartesiane di P, cioè la x e la y. Esiste ed è unica la legge di moto $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ che risolve il *problema di Cauchy* costituito dalle equazioni differenziali (2) e dalle seguenti *condizioni iniziali*:

$$x(0) = x_0 \ , \qquad y(0) = y_0 \ , \qquad \dot{x}(0) = v_{x;0} \ , \qquad \dot{y}(0) = v_{y;0} \ . \tag{3}$$

Il problema di Calogero è integrabile proprio perché lungo ciascuna soluzione $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ si conservano le due seguenti *costanti del moto*:

$$E = \frac{1}{2}\big(v_x^2 + v_y^2\big) - G\frac{M}{\varrho} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \ , \qquad J = x v_y - y v_x \ ; \tag{4}$$

esse sono rispettivamente l'*energia* e il *momento angolare*. Ovviamente, nella formula precedente $v_x = \dot{x}$ e $v_y = \dot{y}$ denotano rispettivamente le velocità in direzione x e y.

Si ricordi che, in questo contesto, l'*orbita* è il luogo dei punti descritto da P durante il suo moto. Nel problema dei moti centrali, è particolarmente interessante lo studio delle *orbite limitate*, che sono caratterizzate dall'avere valori negativi dell'energia E. Inoltre, si è soliti considerare a parte il caso dei moti rettilinei, i quali sono tali che $J = 0$, quindi si impone[⊙] che il momento angolare sia $J > 0$.

La soluzione del problema di Calogero si esprime in modo particolarmente elegante quando si studiano le *orbite limitate* con le coordinate *polari* (ϱ, ϑ) che sono legate a quelle cartesiane dalle seguenti relazioni:

$$x = \varrho \cos\vartheta \ , \qquad y = \varrho \sin\vartheta \ . \tag{5}$$

La soluzione del problema di Calogero è allora espressa in termini dell'equazione orbitale

$$\varrho = \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e}\cos\left(\frac{\bar{J}}{J}\vartheta\right)} \ , \tag{6}$$

dove i parametri $\bar{J}$, $\bar{p}$ e $\bar{e}$ sono definiti come segue:

$$\bar{J} = \sqrt{J^2 + 2\varepsilon} \ , \qquad \bar{p} = \frac{\bar{J}^2}{GM} \ , \qquad \bar{e} = \sqrt{1 + \frac{2\bar{J}^2 E}{(GM)^2}} \ . \tag{7}$$

Inoltre, la legge temporale con cui viene percorsa l'orbita si ricava dalla velocità angolare relativa a ϑ, la quale è legata al momento angolare dalla seguente relazione:

$$J = \varrho^2 \dot{\vartheta} \ . \tag{8}$$

L'orbita descritta dall'equazione (6) è del tipo *"a rosetta"* e, evidentemente, oscilla tra una distanza minima $\bar{p}/(1+\bar{e})$ e una massima $\bar{p}/(1-\bar{e})$ (che sono dette, rispettivamente, *pericentro* e *apocentro*). Inoltre, la legge del moto radiale $t \mapsto \varrho(t)$ è *periodica* con periodo di oscillazione T_ϱ tra il *pericentro* e l'*apocentro* (e ritorno). Una volta noti i valori dei parametri introdotti nelle formule (4) e (7), utilizzando opportunamente le equazioni (6) e (8), si può ricavare il periodo T_ϱ, che si calcola nel modo seguente:

$$T_\varrho = \frac{\bar{p}^2}{J} \int_0^{2\pi J/\bar{J}} \mathrm{d}\vartheta \left[1 + \bar{e}\cos\left(\frac{\bar{J}}{J}\vartheta\right)\right]^{-2} \ . \tag{9}$$

Si può utilizzare anche uno dei ben noti metodi di integrazione numerica di tipo *Runge–Kutta* per ottenere una soluzione approssimata del *problema di Cauchy* costituito dalle equazioni differenziali (2) e dalle *condizioni iniziali* (3). Una tale *soluzione numerica* approssimata può essere confrontata (e, quindi, verificata) con quella analitica, la quale è descritta dalle equazioni (6) e (8). Qui di seguito riassumiamo brevemente uno tra i

---

[⊙] In effetti, si può facilmente dimostrare che i problemi di Cauchy con condizioni iniziali tali che i valori delle costanti del moto sono $(E, -J)$ hanno come soluzioni dei moti che descrivono le stesse orbite di quelle corrispondenti a (E, J), con l'unica differenza che tali orbite vengono percorse in senso opposto quando cambia il segno del momento angolare.

più elementari *metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali*, cioè quello di *Heun*.

Abitualmente, la famiglia di schemi di integrazione numerica del tipo Runge–Kutta tratta sistemi autonomi di equazioni differenziali del primo ordine, cioè

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \ , \tag{10}$$

dove $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ è un *campo vettoriale*. Per fissare le idee, torniamo a considerare le due equazioni differenziali del secondo ordine in formula (2), esse possono essere poste nella forma del sistema (10), identificando le varie componenti del vettore $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^4$ come segue

$$z_1 \leftrightarrow x \ , \qquad z_2 \leftrightarrow y \ , \qquad z_3 \leftrightarrow v_x \ , \qquad z_4 \leftrightarrow v_y \ ; \tag{11}$$

inoltre, si definisca il *campo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}^4$ in modo tale che

(12)

$$f_1(\mathbf{z}) = z_3 \ , \quad f_2(\mathbf{z}) = z_4 \ , \quad f_3(\mathbf{z}) = \left(-\frac{GM}{\varrho^2} + \frac{2\varepsilon}{\varrho^3} \right) \frac{z_1}{\varrho} \ , \quad f_4(\mathbf{z}) = \left(-\frac{GM}{\varrho^2} + \frac{2\varepsilon}{\varrho^3} \right) \frac{z_2}{\varrho} \ ,$$

dove, ovviamente, $\varrho = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Inoltre, al fine di studiare un *problema di Cauchy* perfettamente equivalente a quello costituito dalle formule (2)–(3), assieme alle *equazioni differenziali* (10) (con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{f}$ rispettivamente date da (11) e (12)) occorre considerare le seguenti *condizioni iniziali*:

$$\mathbf{z}(0) = \tilde{\mathbf{Z}} \qquad \text{tale che} \qquad \tilde{Z}_1 = x_0 \ , \quad \tilde{Z}_2 = y_0 \ , \quad \tilde{Z}_3 = v_{x;0} \ , \quad \tilde{Z}_4 = v_{y;0} \ . \tag{13}$$

Supponiamo di conoscere la soluzione $\mathbf{z}(\tau)$ a un fissato istante τ (o almeno una sua approssimazione) e ci proponiamo di calcolarla anche al tempo $\tau + h$ (dove si intende che il valore di h è piccolo in valore assoluto). A tal fine, determiniamo i vettori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{z}^*$ in modo tale che

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) \ , \qquad \mathbf{z}^* = \mathbf{z}(\tau) + h\mathbf{k}_1 \ , \qquad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{z}^*) \ . \tag{14}$$

Sussiste quindi la seguente relazione:

$$\mathbf{z}(\tau + h) \simeq \mathbf{z}(\tau) + h\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \ . \tag{15}$$

Più esattamente, supponiamo di essere interessati a calcolare numericamente la soluzione $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ per un intervallo di tempo $[0, T]$, che suddividiamo in N sottointervalli $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ di ampiezza $h = T/N$; il *metodo di Heun* fornisce dei valori approssimati di $\mathbf{z}(\tau_j)\ \forall\ j = 1, \ldots, N$, applicando ripetutamente la formula (15). Si dimostra che alla fine di tale procedimento, il calcolo di $\mathbf{z}(T)$ è corretto a meno di un errore $\mathcal{O}(h^2)$. In questo senso il metodo di Heun è di tipo Runge–Kutta di ordine 2.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che *permette di introdurre delle condizioni iniziali per il problema di Calogero e verifica che siano corrispondenti a un'orbita non rettilinea (cioè con momento angolare J diverso da zero) e limitata (energia E negativa).* Il programma deve contenere:

(A) un'opportuna direttiva `#define` che fissa il valore del prodotto delle due *costanti* G e M in modo tale che $GM = (2\pi)^2$;

(B) una *function* che ha quattro argomenti: i primi due consentono, rispettivamente, di accedere ai *valori* (di ciascuna delle componenti) del vettore $\mathbf{z}$ e del parametro ε , mentre i secondi due *devono essere tali da restituire all'ambiente chiamante* i corrispondenti valori dell'energia E e del momento angolare J ; si ricordi che le costanti del moto E e J si calcolano utilizzando le due equazioni in formula (4), dove x , y , v_x e v_y , possono essere sostituite dalle corrispondenti componenti del vettore $\mathbf{z}$ grazie alle identificazioni descritte in formula (11);

(C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

(C1) le opportune definizioni del vettore di condizioni iniziali $\tilde{\mathbf{Z}} \in \mathbf{R}^4$, in modo tale che le sue prime tre componenti siano fissate come segue: $\tilde{Z}_1 = 1$, $\tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_3 = 0$;

(C2) l'*input da tastiera* del valore iniziale della velocità verticale $\tilde{Z}_4$; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $\tilde{Z}_4$ *non è maggiore* di zero, esso deve essere *reinserito correttamente*;

(C3) l'*input da tastiera* del valore del rapporto $\bar{J}/J$; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $\bar{J}/J$ *non è maggiore o uguale* a 1 , esso deve essere *reinserito correttamente*;

(C4) il calcolo del valore del parametro ε , utilizzando la seguente formula[⊘] esplicita: $\varepsilon = \tilde{Z}_4^2\big[(\bar{J}/J)^2 - 1\big]/2$;

(C5) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare i valori dell'energia E e del momento angolare J corrispondenti alle condizioni iniziali $\tilde{\mathbf{Z}}$ e al parametro ε, i quali a loro volta sono stati determinati come descritto ai precedenti punti (C1)–(C4);

(C6) un blocco di opportune istruzioni congegnate in modo tale che, quando il valore calcolato dell'energia E risulta *maggiore o uguale zero*, allora si stampi su video un messaggio di errore e *si ritorni al punto (C1)*;

(C7) la stampa sul video dei valori dell'energia E e del momento angolare J .

Alcuni consigli

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di `duepigreco` per mezzo di un'opportuna direttiva #`define` .

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da effettuare il calcolo del periodo di oscillazione T_ϱ tra il *pericentro* e l'*apocentro* (e ritorno). A tal fine, si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: la "variabile di integrazione" ϑ , il parametro $\bar{e}$ e il rapporto $\bar{J}/J$; tutti e tre questi argomenti siano di tipo `double`;

[⊘] L'equazione $\varepsilon = \tilde{Z}_4^2\big[(\bar{J}/J)^2 - 1\big]/2$ si ricava confrontando le definizioni di J e $\bar{J}$ nelle formule (4) e (7), per poi fare uso delle condizioni iniziali su $\mathbf{z}(0) = \tilde{\mathbf{Z}}$ (cioè $\tilde{Z}_1 = 1$, $\tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_3 = 0$) e delle identificazioni descritte in formula (11).

(alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore di $\big[1+\bar{e}\cos(\vartheta\bar{J}/J)\big]^{-2}$, cioè proprio la funzione integranda che compare nell'equazione (9);

(B) si scriva una *function* che ha 6 argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numsubint`, due parametri reali p_1, p_2 e infine un *puntatore a una function f*, la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(u,p_1,p_2)\,\mathrm{d}u$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;

(C) all'interno della *main function*, si calcolino i valori dei parametri $\bar{J}$, $\bar{p}$ e $\bar{e}$, utilizzando le equazioni in formula (7);

(D) all'interno della *main function*, si effettui *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi J/\bar{J}} \mathrm{d}\vartheta\,\big[1+\bar{e}\cos(\vartheta\bar{J}/J)\big]^{-2}$; il valore di tale integrale deve essere approssimato utilizzando $100\,000$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 2\pi J/\bar{J}]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(E) all'interno della *main function*, si determini il valore del periodo T_ϱ utilizzando l'equazione (9) e il calcolo dell'integrale che è stato descritto al precedente punto (D); inoltre, si stampi sul video proprio il valore ottenuto di T_ϱ.

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere la soluzione numerica del *problema di Cauchy* costituito dal sistema di *equazioni differenziali* (10) (con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{f}$ rispettivamente date da (11) e (12)) e dalle *condizioni iniziali* (13); inoltre, si effettui la verifica che i valori delle costanti del moto (cioè l'energia E e il momento angolare J) sono ben conservati da tale soluzione numerica del *problema di Cauchy.* A tali scopi si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* con tre argomenti, che sono il vettore $\mathbf{z}\in\mathbf{R}^4$, il parametro ε e il vettore $\mathbf{f}$; il vettore $\mathbf{z}$ e il parametro ε sono da intendersi come le variabili di *input*; la *function* deve essere scritta in modo tale che *(alla fine della chiamata)* i valori delle componenti del vettore $\mathbf{f}$ sono uguali a quelle del campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{z})$, così come esse sono definite nella formula (12);

(B) si scriva una *function* con quattro argomenti, che sono l'intervallo di tempo h, il vettore $\mathbf{z}\in\mathbf{R}^4$, il parametro ε e infine un *puntatore a una function* $\mathbf{f}$, la quale effettua il calcolo del campo vettoriale e, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti (che sono, nell'ordine, un array di tipo `double`, un `double` e un altro array di tipo `double`); la *function* deve essere scritta in modo tale che, *se all'inizio della chiamata* supponiamo che nel vettore $\mathbf{z}$ siano memorizzati i valori corrispondenti alla soluzione $\mathbf{z}(\tau)$ a un certo istante τ, *allora, alla fine della chiamata*, nello stesso vettore $\mathbf{z}$ saranno presenti i valori corrispondenti all'approssimazione di $\mathbf{z}(\tau+h)$ che è definita nel membro di destra della formula (15), dove i valori dei vettori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{z}^*$ sono dati in (14);

(C) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* del valore del numero di lobi che vogliamo tracciare; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se tale numero di lobi *non è maggiore o uguale a* 1, esso deve essere *reinserito correttamente*; in questo contesto, per “lobo” intendiamo il tratto di orbita che comprende l’itinerario da un *pericentro* a un *apocentro* e viceversa (per capire la definizione di “lobo”, può essere utile guardare il grafico dell’orbita, che è reperibile in rete);

(D) all’interno della *main function*, si definisca il tempo totale T fino al quale vogliamo calcolare la soluzione numerica del *problema di Cauchy*, ponendo T uguale al prodotto di T_ϱ per il numero dei lobi (introdotto al precedente punto (C));

(E) all’interno della *main function*, si memorizzino i valori iniziali delle costanti del moto, ponendo $E_0 = E$ e $J_0 = J$;

(F) all’interno della *main function*, si iteri l’esecuzione delle istruzioni descritte ai seguenti punti (F1)–(F5), quando un *contatore* intero i va da $IMIN$ a $IMAX$;

  (F1) si ponga $N = 10^i$ e $h = T/N$;

  (F2) si ponga il vettore $\mathbf{z}$ uguale alle condizioni iniziali, in modo tale che $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{Z}}$;

  (F3) *si effettuino N chiamate consecutive della function descritta al punto (B)*; inoltre, le suddette chiamate devono essere tali che, tra gli argomenti, viene passato anche l’indirizzo della *function* descritta al punto (A); si osservi che l’effetto di ciascuna di queste N chiamate consecutive è quello di produrre il calcolo approssimato di $\mathbf{z}(\tau_j)$ a partire da $\mathbf{z}(\tau_{j-1})$, dove $\tau_j = jh \ \forall\ j = 0, \ldots\ N$;

  (F4) per mezzo di *un’opportuna chiamata della function descritta al punto (B) dell’obiettivo 1*, si calcolino i valori “finali” dell’energia e del momento angolare (che nel seguito denotiamo rispettivamente con E_T e J_T) corrispondenti al vettore $\mathbf{z}(T)$ e al parametro ε ; si noti che qui si deve intendere che $\mathbf{z}(T)$ *non è la soluzione esatta* al tempo T , ma la sua *approssimazione* calcolata come spiegato al precedente punto (F3);

  (F5) si stampi sul video una riga che reca al suo interno il valore attuale di N e i corrispondente *errori* sulle costanti del moto, cioè $\Delta E = \left|E_T - E_0\right|$ e $\Delta J = \left|J_T - J_0\right|$; tutti e tre i valori che compariranno su tale riga di caratteri devono essere *in formato esponenziale.*

Alcuni altri consigli

Al fine di far funzionare il programma in modo da effettuare dei test che siano contemporaneamente significativi e che terminino in tempi ragionevoli, è bene stabilire che il valore dei due parametri interi $IMIN$ e $IMAX$ sono rispettivamente uguali a 3 e a 7 , per mezzo di due opportune direttive `#define` . Sarà così possibile modificare rapidamente e in modo coerente il programma, a seconda delle proprie esigenze e della velocità della *CPU* a disposizione.

Ovviamente, la verifica del fatto che il metodo di Heun è di ordine 2 deve considerarsi ben riuscita, se si osserva che *ogni qualvolta che il numero di sottointervalli N viene aumentato di un fattore* 10 *, gli errori* $\Delta E = \left|E_T - E_0\right|$ *e* $\Delta J = \left|J_T - J_0\right|$ *diminuiscono* **circa**[⊗] *di un fattore* 100 .

[⊗] In verità, il problema di Calogero presenta delle simmetrie particolari, grazie alle quali la conservazione delle costanti del moto lungo le soluzioni approssimate prodotte dal metodo di Heun si comporta anche meglio del previsto; in particolare si osserva che sia $\Delta E = \left|E_T - E_0\right|$ che $\Delta J = \left|J_T - J_0\right|$ sono addirittura $\mathcal{O}(h^3)$ per valori “grandi abbastanza”

Obiettivo (intermedio) 4:
al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di coppie di valori $\big(z_1(\tau_j), z_2(\tau_j)\big)\ \forall\ j = 0, \ldots, N$ (dove N è scelto in modo opportuno), a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico di un'orbita associata alla soluzione del *problema di Cauchy* costituito dalle formule (2)–(3). A tale scopo si può procedere come segue:

(A) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* del valore di N; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se N *non è una potenza intera di* 10 *compresa tra* 100 *e* 1 000 000, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(B) si ponga nuovamente $h = T/N$;

(C) si apra un **file** che è destinato a contenere le coppie dei punti della soluzione approssimata delle equazioni differenziali;

(D) si stampino le posizioni iniziali sulla prima riga del **file**, in modo che all'inizio di tale riga compaia il valore di $\tilde{Z}_1$ e poi quello di $\tilde{Z}_2$;

(E) si eseguano ancora le istruzioni descritte ai precedenti punti (F2)–(F3) dell'obiettivo 3, ma facendo attenzione alla modifica richiesta al punto seguente;

(F) si modifichi il punto (F3) dell'obiettivo 3, in modo tale che all'interno del ciclo che è implicitamente richiesto proprio dal punto (F3) si proceda alla stampa su **file**; tale stampa deve essere effettuata di modo che sulla j–esima riga del **file** compaia prima il valore di $z_1(\tau_j)$ e poi quello corrispondente di $z_2(\tau_j)$;

(G) si chiuda il **file** che era stato aperto al punto (C);

(H) si stampi sul video il valore assoluto della differenza (rispetto a ciascuna singola componente) tra il vettore "finale" $\mathbf{z}(T)$ e quello corrispondente alle condizioni iniziali, cioè $\big|z_1(T) - \tilde{Z}_1\big|, \ldots, \big|z_4(T) - \tilde{Z}_4\big|$; tali stampe devono risultare esteticamente apprezzabili e devono riportare i valori delle differenze *in formato esponenziale*. Questi confronti possono essere utili come ulteriore verifica della correttezza della soluzione numerica del *problema di Cauchy* (si vedano le osservazioni finali che concludono il testo).

Obiettivo (finale) 5:
si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) dell'orbita che rappresenta la soluzione del problema di Calogero, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dal precedente obiettivo (4).

Alcune osservazioni finali
La soluzione del problema di Calogero (riassunta dalla formula (6)) è tale che se il rapporto $\bar{J}/J$ è un numero razionale m/n, allora dopo aver percorso m lobi l'orbita torna esattamente al punto di partenza. Questa osservazione fornisce un primo criterio "visivo" per controllare la correttezza del programma. Infatti, se ad esempio in *input* al punto (C3) dell'obiettivo 1 è stato posto $\bar{J}/J = 1.25$, allora il grafico richiesto dall'obiettivo 5 dovrà

di $N = T/h$ (nel senso che *non* sono talmente grandi che il contributo principale agli errori è dato dall'accumulo di quelli numerici di `round-off`).

evidenziare solo 5 lobi anche quando il numero di lobi (che è stato introdotto in *input* al punto (C) dell'obiettivo 3) è ben superiore a 5 .

Al contrario, l'orbita riempie densamente una corona circolare compresa tra la distanza minima dall'origine e la distanza massima (cioè, rispettivamente, $\bar{p}/(1+\bar{e})$ e $\bar{p}/(1-\bar{e})$), quando il rapporto $\bar{J}/J$ è un numero irrazionale (o almeno è una buona approssimazione di un irrazionale; è ben noto che non si può fare meglio a causa dei limiti imposti dalla rappresentazione dei numeri sul calcolatore). Anche quest'ultima osservazione fornisce un criterio "visivo" per controllare la correttezza del programma. Si ponga ad esempio $\bar{J}/J \simeq \sqrt{5}-1$ (che è un numero diofanteo e quindi "molto lontano" dai razionali, nel senso della teoria dei numeri, che non è certo il caso di affrontare in questo contesto) e si definisca il numero dei lobi in modo che esso sia un numero abbastanza grande (ad esempio, 200), la corrispondente orbita assumerà l'aspetto di una ciambella dove gli spazi bianchi saranno sempre più difficili da scorgere al crescere del numero dei lobi.