

Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
18 Luglio 2011

Tema d'esame: Calcolo delle coordinate cartesiane nel piano a partire dagli elementi orbitali (comunemente utilizzati in *meccanica celeste*) e calcolo dell'orbita nel problema di Calogero.

Descrizione del metodo di calcolo

La soluzione del problema dei *moti centrali* (essenzialmente dovuto a Newton) fu un successo fondamentale nella storia della *meccanica analitica* e in quella della *meccanica celeste*. In tale problema, si studia il moto di un corpo puntiforme P di massa m sotto l'influenza esercitata da un altro corpo di massa M (posto nell'origine del sistema di riferimento), che lo attrae con la forza gravitazionale corrispondente all'energia potenziale

$$(1) \quad U(\varrho) = -G \frac{Mm}{\varrho} ,$$

dove G è la costante gravitazionale e ϱ è la distanza di P dall'origine. Come ben noto, la soluzione del problema è descritta dalle leggi di Keplero (originariamente dedotte da osservazioni sperimentali!); la prima delle quali afferma che ogni soluzione corrispondente a un'orbita limitata descrive un'ellisse di cui l'origine occupa uno dei due fuochi.

In meccanica celeste è abituale descrivere i moti con gli *elementi orbitali*, che a un fissato istante descrivono la cosiddetta "ellisse osculatrice". Essa è definita in modo tale che su tale ellisse si svolge un moto virtuale in accordo con la seconda legge di Keplero e che ha *in quel fissato istante* uguali posizioni e velocità rispetto al moto di P che si sta considerando. Gli elementi orbitali relativi a moti *all'interno di un piano* sono quattro: (a, e, ω, l) . a ed e sono rispettivamente il semiasse maggiore e l'eccentricità della "ellisse osculatrice". ω è la longitudine del pericentro, cioè l'angolo formato dall'asse delle x (di un prefissato riferimento cartesiano) con la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto dell'ellisse più vicino all'origine stessa. Infine, l è l'anomalia media, cioè un opportuno angolo virtuale grazie al quale si può determinare in modo univoco la posizione del punto P sulla "ellisse osculatrice".

Al fine di poter determinare le coordinate (x, y) del punto P corrispondenti a certi valori (a, e, ω, l) degli elementi orbitali, bisogna per prima cosa risolvere la seguente equazione di Keplero:

$$(2) \quad x - e \sin x - l = 0$$

rispetto all'incognita x . Sia

$$(3) \quad \mathcal{K}(x) = x - e \sin x - l$$

la mappa che restituisce il valore del membro di sinistra dell'equazione (2) in funzione della sola x per valori fissati di e e di l . Si osservi che quando l'eccentricità $e < 1$ (come accade ogni qualvolta che la conica osculatrice è proprio un'ellisse) allora la derivata

$$\mathcal{K}'(x) = 1 - e \cos x$$

è sicuramente positiva per ogni $x \in \mathbf{R}$, quindi la soluzione dell'equazione (2) esiste ed è unica. Inoltre, si dimostra facilmente che tale soluzione appartiene all'intervallo $(l-e, l+e)$. La soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione (2) prende il nome di *anomalia eccentrica*. Una volta noti \mathcal{E} , a ed e , si possono calcolare le coordinate (ξ, η) del punto P in un sistema di riferimento tale che il pericentro giace sulla parte positiva dell'asse delle ascisse. Una semplice rotazione di angolo ω permette allora di determinare le coordinate cartesiane (x, y) a partire da (ξ, η) . Il procedimento appena descritto è riassunto dalle due coppie di definizioni seguenti:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = a(\cos \mathcal{E} - e) \\ \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin \mathcal{E} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega \\ y = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega \end{cases}.$$

Per inciso, ricordiamo che a partire dagli elementi orbitali è possibile determinare anche la velocità istantanea del punto P e non solo la sua posizione, ma negli esercizi che verranno proposti qui di seguito la velocità non verrà considerata.

Il potenziale di Calogero U_C oltre al termine gravitazionale (1) include anche una correzione che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, cioè esso è definito come segue:

$$(5) \quad U_C(\varrho) = -G \frac{Mm}{\varrho} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2},$$

dove ci limitiamo a considerare il caso $\varepsilon > 0$. Quando il punto P si muove sotto l'influenza del campo di forze corrispondente al potenziale (5), esso descrive un'orbita "a rosetta" che è determinata dalle semplici formule descritte qui di seguito. Siccome la soluzione del problema di Calogero non dipende dal valore della massa m , senza perdita di generalità, la "normalizziamo" ponendo

$$m = 1.$$

Introduciamo ora le formule che consentono di calcolare il momento angolare

$$(6) \quad J = \sqrt{GM a (1 - e^2)}$$

e l'energia

$$(7) \quad \bar{E} = -\frac{GM}{2a} + \frac{\varepsilon}{x^2 + y^2}.$$

È conveniente esprimere la soluzione del problema di Calogero in funzione del parametro \bar{J} tale che

$$(8) \quad \varepsilon = \frac{\bar{J}^2 - J^2}{2}.$$

Inoltre, introduciamo le seguenti definizioni dei parametri \bar{p} e \bar{e} :

$$(9) \quad \bar{p} = \frac{\bar{J}^2}{GM}, \quad \bar{e} = \sqrt{1 + \frac{2\bar{J}^2 \bar{E}}{(GM)^2}}.$$

La soluzione del problema di Calogero è espressa in termini della seguente equazione orbitale

$$(10) \quad \varrho = \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e} \cos\left(\frac{\bar{J}}{J} \vartheta\right)},$$

dove $(\varrho, \vartheta) \in (\mathbf{R}_+ \cup \{0\}) \times (-\pi, \pi]$ sono le ben note coordinate polari nel piano che sono definite in modo tale che

$$(11) \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}.$$

Al fine di poter tracciare il luogo dei punti visitati dal punto P quando esso si muove sotto l'influenza del campo di forze corrispondente al potenziale di Calogero (5), è conveniente utilizzare anche la seguente formula inversa che fornisce le coordinate cartesiane in funzione di quelle polari:

$$(12) \quad x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta.$$

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che *risolve opportunamente l'equazione di Keplero (2) utilizzando il metodo di bisezione*. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha tre argomenti: i valori di x , e ed l ; tale *function* restituisce il valore $f(x, e, l) = x - e \sin x - l$, cioè il membro di destra dell'equazione di Keplero (2);
- (B) una *function* che ha sei argomenti: il valore (che può essere considerato uguale solo a 0 oppure a 1) di una variabile "flag", i valori di a , b , e , l , infine, un *puntatore a una function* g , la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti (che indichiamo con i simboli x , e , l per variabili che sono di tipo **double**); *alla fine della chiamata*, la *function* che stiamo descrivendo (cioè quella con sei argomenti) deve restituire il valore approssimato di x che risolve l'equazione $g(x, e, l) = 0$ dove i valori di e ed l sono fissati all'atto della *chiamata della function* e il valore di x viene determinato all'interno dell'intervallo (a, b) *utilizzando il metodo di bisezione*; inoltre, se il valore della variabile "flag" è uguale a 1, allora *dall'interno della function* si stampino sul video i valori di x e, in formato esponenziale, di $g(x, e, l)$, ogni qual volta che il metodo di bisezione determina una nuova approssimazione x della soluzione;
- (C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (C1) l'*input da tastiera* del valore dell'eccentricità e ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se e non è compreso nell'intervallo $[0, 1)$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
 - (C2) l'*input da tastiera* del valore dell'anomalia media l ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se l non è compreso nell'intervallo $[0, 2\pi]$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
 - (C3) un'*opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare numericamente la soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (2); tale soluzione deve essere determinata nell'intervallo (a, b) dove $a = l - e$ e $b = l + e$ (essendo e

ed l i valori inseriti in *input* così come richiesto ai punti (C1) e (C2)); inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A); infine, *all'atto della chiamata della function descritta al punto (B)*, il valore della variabile “flag” (che corrisponde al primo argomento) deve essere scelto in modo tale che le approssimazioni successive *vengano stampate*;

- (C4) la stampa sul video del valore approssimato della soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (2), determinata così come descritto al precedente punto (C3); inoltre, si stampi anche, in formato esponenziale, il corrispondente valore di $f(\mathcal{E}, e, l) = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - l$. Ovviamente, la determinazione numerica della soluzione dell'equazione di Keplero *deve considerarsi ben riuscita* se il valore di $f(\mathcal{E}, e, l)$ è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Alcuni consigli

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di `duepigreco` per mezzo di una opportuna direttiva `#define`.

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da risolvere nuovamente l'equazione di Keplero (2), stavolta *utilizzando un metodo di Newton modificato in modo da essere opportunamente abbinato al metodo di bisezione*. A tal fine si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i valori di x , e ed l ; tale *function* restituisce il valore $\frac{\partial f}{\partial x}(x, e, l) = \mathcal{K}'(x) = 1 - e \cos x$, cioè la derivata rispetto ad x del membro di destra dell'equazione di Keplero (2);
- (B) si scriva una *function* che ha sette argomenti: il valore (che può essere considerato uguale solo a 0 oppure a 1) di una variabile “flag”, i valori di a , b , e , l , infine, *due puntatori, il primo dei quali a una function g e il secondo a un'altra function g'* ; ciascuna di queste ultime due *function*, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti (che indichiamo con i simboli x , e , l per variabili che sono di tipo `double`); *alla fine della chiamata*, la *function* che stiamo descrivendo (cioè quella con sette argomenti) deve restituire il valore approssimato di x che risolve l'equazione $g(x, e, l) = 0$ dove i valori di e ed l sono fissati all'atto della *chiamata della function* e il valore di x viene determinato all'interno dell'intervallo (a, b) *utilizzando il metodo di Newton combinato con quello di bisezione* così come descritto ai seguenti punti (B1)–(B5);
- (B1) si assegnino alle variabili *locali* `ga` e `gb` rispettivamente i valori $g(a, e, l)$ e $g(b, e, l)$ con due opportune *chiamate della function g corrispondente al primo dei due puntatori che compaiono tra gli argomenti*;
- (B2) inizialmente, si assegni alla variabile *locale* `x` il valore del punto medio dell'intervallo $[a, b]$; inoltre, si ponga `gx` uguale al corrispondente valore $g(x, e, l)$ con un'altra opportuna *chiamata della function g corrispondente al primo dei due puntatori che compaiono tra gli argomenti*;
- (B3) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (B31)–(B382) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (B4);

- (B31) si assegni alla variabile *locale* \mathbf{dx} il valore del *rapporto* tra \mathbf{gx} e $g'(x, e, l)$ (dove quest'ultimo viene calcolato con un'opportuna *chiamata della function* g' *corrispondente al secondo dei due puntatori che compaiono tra gli argomenti*);
- (B32) si calcoli una nuova approssimazione della soluzione seguendo il metodo di Newton; a questo scopo si modifichi la variabile *locale* \mathbf{x} sottraendo al suo valore precedente la quantità \mathbf{dx} ;
- (B33) si aggiorni il valore della variabile locale \mathbf{gx} ponendola uguale a $g(x, e, l)$ con un'altra opportuna *chiamata della function* g *corrispondente al primo dei due puntatori che compaiono tra gli argomenti*;
- (B34) si ponga σ uguale al valore assoluto di \mathbf{dx} ;
- (B35) **se e solo se** si verifica che $\sigma > 10^{-15}$ e la nuova approssimazione \mathbf{x} *non appartiene* all'intervallo (a, b) , **allora** assumiamo che tale approssimazione si stia allontanando dalla soluzione vera anziché avvicinarsi e, pertanto, ricalcoliamo la nuova approssimazione effettuando un singolo passo del metodo di bisezione, così come descritto nei seguenti punti (B351)–(B352);
- (B351) si assegni alla variabile *locale* \mathbf{x} il valore del punto medio dell'intervallo $[a, b]$; inoltre, si ponga \mathbf{gx} uguale al corrispondente valore $g(x, e, l)$ con un'altra opportuna *chiamata della function* g *corrispondente al primo dei due puntatori che compaiono tra gli argomenti*;
- (B352) si ponga σ uguale al valore assoluto di $(b - a)/4$;
- (B36) **se e solo se** il valore della variabile “flag” che compariva come primo argomento della *function* è uguale a 1, **allora** si stampino sul video i valori di \mathbf{x} e, in formato esponenziale, di \mathbf{gx} ;
- (B37) **se e solo se** il valore della variabile locale \mathbf{gx} è proprio uguale a zero, **allora** si esca immediatamente dal ciclo, la condizione di permanenza all'interno del quale è espressa al punto (B4), in modo da passare subito ad eseguire l'istruzione descritta al punto (B5);
- (B38) si proceda ora ad aggiornare i valori degli estremi a e b all'interno dei quali esiste sicuramente una soluzione; a questo scopo, si proceda seguendo le classiche prescrizioni del metodo di bisezione, ovvero **se e solo se** il prodotto di \mathbf{ga} per \mathbf{gx} è negativo **allora** si esegua ciò che è descritto al punto (B381), **altrimenti** si passi al punto (B382);
- (B381) si ponga b uguale ad \mathbf{x} e, quindi, si aggiorni il valore della variabile locale \mathbf{gb} in modo che risulti uguale a \mathbf{gx} ;
- (B382) si ponga a uguale ad \mathbf{x} e, quindi, si aggiorni il valore della variabile locale \mathbf{ga} in modo che risulti uguale a \mathbf{gx} ;
- (B4) se il valore della variabile locale σ (che sostanzialmente descrive l'imprecisione con la quale è stata determinata la soluzione \mathbf{x}) è significativamente maggiore dell'*errore di macchina*, cioè se si verifica che

$$\sigma > 10^{-15} ,$$

- allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (B31)–(B382);
- (B5) si restituisca all'ambiente chiamante (della *function*) il valore di \mathbf{x} ;

- (C) all'interno della *main function*, si effettui un'opportuna chiamata della *function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare numericamente la soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (2); tale soluzione deve essere determinata nell'intervallo (a, b) dove $a = l - e$ e $b = l + e$ (essendo e ed l i valori inseriti in *input* così come richiesto ai punti (C1) e (C2) dell'obiettivo 1); inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, vengono passati anche gli indirizzi delle *function* descritte al punto (A) dell'obiettivo 1 e del presente obiettivo; infine, *all'atto della chiamata della function descritta al punto (B)*, il valore della variabile "flag" (che corrisponde al primo argomento) deve essere scelto in modo tale che le approssimazioni successive *vengano stampate*;
- (D) all'interno della *main function* si effettui la stampa sul video del valore approssimato della soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (2), determinata così come descritto al precedente punto (C); inoltre, si stampi anche, in formato esponenziale, il corrispondente valore di $f(\mathcal{E}, e, l) = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - l$. Ovviamente, la determinazione numerica della soluzione dell'equazione di Keplero *deve considerarsi ben riuscita* se il valore di $f(\mathcal{E}, e, l)$ è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*. Si osservi inoltre che il numero di righe stampate con i valori di x e di gx (così come richiesto al precedente punto (B36)) *deve essere nettamente inferiore* al corrispondente numero di righe stampate durante l'esecuzione del metodo di bisezione, perché è ben noto che il *metodo di Newton converge molto più rapidamente*.

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da determinare le coordinate (x, y) corrispondenti ad alcuni valori dati degli elementi orbitali (a, e, ω, l) . A tal fine si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha sei argomenti: i valori degli elementi orbitali a, e, ω, l ; inoltre, gli ultimi due argomenti devono essere tali che grazie ad essi tale *function* restituisce le corrispondenti coordinate x e y ; a questo scopo, all'interno di tale *function* si determini dapprima il valore dell'*anomalia eccentrica* \mathcal{E} grazie a un'opportuna *chiamata della function che utilizza il metodo di Newton combinato con quello di bisezione, questa chiamata deve essere effettuata in modo analogo a quanto descritto al punto (C) dell'obiettivo (2)* (ma questa volta si evitino le stampe dall'interno della *function* richiesta al punto (B) dell'obiettivo (2)); infine, si calcolino i valori di ξ, η, x e y così come prescritto dalla formula (4);
- (B) all'interno della *main function* si effettui l'*input da tastiera* del valore del semiasse maggiore a ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se a non è strettamente positivo, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (C) all'interno della *main function* si effettui nuovamente l'*input da tastiera* del valore dell'eccentricità e ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se e non è compreso nell'intervallo $[0, 1)$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (D) all'interno della *main function* si effettui l'*input da tastiera* del valore della longitudine del perielio ω ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se ω non è compreso nell'intervallo $[0, 2\pi]$, esso deve essere *reinserito correttamente*;

- (E) all'interno della *main function* si effettui nuovamente l'*input da tastiera* del valore dell'anomalia media l ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se l non è compreso nell'intervallo $[0, 2\pi]$, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (F) all'interno della *main function*, si calcolino le coordinate (x, y) corrispondenti ai valori dati degli elementi orbitali (a, e, ω, l) grazie a un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (A);
- (G) all'interno della *main function*, si stampino sul video i valori trovati di x e y .

Obiettivo (intermedio) 4:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da calcolare numericamente e da scrivere su un *file di output* l'orbita che rappresenta la soluzione del problema di Calogero. A tal fine si proceda come segue:

- (A) si scriva nel programma una *function* che ha quattro argomenti: i valori delle coordinate cartesiane x e y ; inoltre, gli ultimi due argomenti devono essere tali che grazie ad essi tale *function* restituisce le corrispondenti coordinate polari ρ e ϑ ; a questo scopo, all'interno di tale *function* si traduca in \mathbf{C} la formula (11) (può essere molto comodo l'utilizzo della *function atan2*);
- (B) si scriva nel programma una *function* che ha quattro argomenti: i valori delle coordinate polari ρ e ϑ ; inoltre, gli ultimi due argomenti devono essere tali che grazie ad essi tale *function* restituisce le corrispondenti coordinate cartesiane x e y ; a questo scopo, all'interno di tale *function* si traduca in \mathbf{C} la formula (12);
- (C) si scriva nel programma una *function* che ha sei argomenti: i valori del rapporto \bar{J}/J e di \bar{p} , \bar{e} e ϑ ; inoltre, gli ultimi due argomenti devono essere tali che grazie ad essi tale *function* restituisce le corrispondenti coordinate cartesiane x e y ; a questo scopo, all'interno di tale *function* si traduca in \mathbf{C} la formula (10) (che fornisce l'orbita nel problema di Calogero) e si effettui un'opportuna *chiamata della function* descritta al punto (B);
- (D) all'interno della *main function* si effettui l'*input da tastiera* del valore del rapporto \bar{J}/J ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se \bar{J}/J non è maggiore o uguale a 1, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (E) all'interno della *main function* si effettui l'*input da tastiera* del valore del numero di lobi che vogliamo tracciare; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se tale numero di lobi non è maggiore o uguale a 1, esso deve essere *reinserito correttamente*; in questo contesto, per "lobo" intendiamo il tratto di orbita che comprende l'itinerario da un punto alla distanza minima dall'origine (che è uguale a $\bar{p}/(1 + \bar{e})$) a uno a distanza massima (cioè $\bar{p}/(1 - \bar{e})$) e anche il successivo itinerario opposto (per capire la definizione di "lobo", può essere utile guardare il grafico dell'orbita, che è reperibile in rete);
- (F) all'interno della *main function* si effettui l'*input da tastiera* del valore del numero di punti per ciascun lobo che vogliamo tracciare; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se tale numero di punti non è maggiore o uguale a 100, esso deve essere *reinserito correttamente*;
- (G) all'interno della *main function*, si calcolino i valori di J , \bar{J} , ε , \bar{E} , \bar{p} , \bar{e} , utilizzando opportunamente le definizioni (6)–(9), dopo aver posto $GM = (2\pi)^2$; a scanso di

equivoci, nelle formule (6)–(7) vanno utilizzati i valori *iniziali* di a , e , x e y che sono quelli definiti dall’obiettivo (3);

- (H) all’interno della *main function*, si calcoli $\Delta\vartheta$ dividendo ulteriormente la quantità $2\pi/(\bar{J}/J)$ per il numero di punti per ciascun lobo introdotto in *input* così come descritto al punto (F); inoltre, si definiscano i valori iniziali di ϱ e ϑ in modo che siano corrispondenti alle coordinate cartesiane iniziali (x, y) (che sono ancora quelle definite all’interno dell’obiettivo (3)), grazie un’opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;
- (I) all’interno della *main function*, si effettui un ciclo all’interno del quale si eseguono le seguenti istruzioni (I1)–(I3); tale ciclo deve essere eseguito un numero di volte uguale al prodotto tra il numero di lobi (introdotto in *input* così come descritto al punto (E)) e il numero di punti per ciascun lobo (introdotto in *input* così come descritto al punto (F));
 - (I1) il valore di ϑ deve essere incrementato della quantità $\Delta\vartheta$;
 - (I2) i valori delle coordinate cartesiane (x, y) devono essere aggiornati grazie ad un’opportuna *chiamata della function descritta al punto (C)*;
 - (I3) si deve procedere alla stampa sul **file** di *output* (che deve essere preliminarmente aperto, prima di entrare nel ciclo), in modo tale che su ciascuna delle sue righe compaia prima il valore di x e poi quello corrispondente di y .

Obiettivo (finale) 5:

si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) dell’orbita che rappresenta la soluzione del problema di Calogero, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dal precedente obiettivo (4).

Alcune osservazioni finali

La soluzione del problema di Calogero (riassunta dalla formula (10)) è tale che se il rapporto \bar{J}/J è un numero razionale m/n , allora dopo aver percorso m lobi l’orbita torna esattamente al punto di partenza. Questa osservazione fornisce un primo criterio “visivo” per controllare la correttezza del programma. Infatti, se ad esempio in *input* al punto (D) dell’obiettivo 4 è stato posto $\bar{J}/J = 1.25$, allora il grafico richiesto dall’obiettivo 5 dovrà evidenziare solo 5 lobi anche quando il numero di lobi (che è stato introdotto in *input* al punto (D) dell’obiettivo 4) è ben superiore a 5.

Al contrario, l’orbita riempie densamente una corona circolare compresa tra la distanza minima dall’origine e la distanza massima (cioè, rispettivamente, $\bar{p}/(1 + \bar{e})$ e $\bar{p}/(1 - \bar{e})$), quando il rapporto \bar{J}/J è un numero irrazionale (o almeno è una buona approssimazione di un irrazionale; è ben noto che non si può fare meglio a causa dei limiti imposti dalla rappresentazione dei numeri sul calcolatore). Anche quest’ultima osservazione fornisce un criterio “visivo” per controllare la correttezza del programma. Si ponga ad esempio $\bar{J}/J \simeq \sqrt{5} - 1$ (che è un numero diofanteo e quindi “molto lontano” dai razionali, nel senso della teoria dei numeri, che non è certo il caso di affrontare in questo contesto) e si definisca il numero dei lobi in modo che esso sia un numero abbastanza grande (ad esempio, 200), la corrispondente orbita assumerà l’aspetto di una ciambella dove gli spazi bianchi saranno sempre più difficili da scorgere al crescere del numero dei lobi.