Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
19 Settembre 2011

Tema d'esame: studio di alcune proprietà delle funzioni di Bessel di prima specie.

Descrizione del metodo di calcolo

Le funzioni di Bessel di prima specie $J_\alpha(x)$ risolvono l'equazione differenziale seguente (che ha per incognita la funzione $y = y(x)$):

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}x} + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0 \ , \tag{1}$$

dove $\alpha \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$. Tali soluzioni sono *analitiche* e possono essere espresse in serie di Taylor centrate rispetto all'origine; a tale scopo, trattiamo prima separatamente il caso $\alpha = n \in \mathbf{N}$, allora si ha che

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} \quad . \tag{2}$$

Sempre limitatamente al caso $\alpha = n \in \mathbf{N}$, sussiste la seguente identità

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}t \ \cos\left[nt - x\sin(t)\right] \ , \tag{3}$$

che può costituire una definizione alternativa (tramite il calcolo di un integrale) della funzione di Bessel di prima specie.

La definizione (2) viene estesa in modo naturale al caso di numeri $\alpha \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$, facendo ricorso alla funzione gamma di Eulero nel modo seguente:

$$J_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\alpha} \quad . \tag{4}$$

Inoltre, dalla formula precedente si possono ricavare facilmente le espansioni in serie delle derivate prima e seconda delle funzioni di Bessel di prima specie; infatti, esse sono date dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+\alpha)}{2\big(j!\,\Gamma(j+\alpha+1)\big)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\alpha-1} \quad , \\ J''_\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+\alpha)(2j+\alpha-1)}{4\big(j!\,\Gamma(j+\alpha+1)\big)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\alpha-2} \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Nelle formule (4)–(5) compare il simbolo Γ, che si riferisce proprio alla funzione gamma di Eulero; essa estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi, nel senso che per ogni numero intero non negativo n si ha

$$\Gamma(n+1) = n! \ . \tag{6}$$

La funzione Γ è definita come segue:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1} \exp(-t) \ . \tag{7}$$

Usando l'integrazione per parti, si può dimostrare che:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ . \tag{8}$$

Quest'ultima relazione (unita all'ovvia osservazione che $\Gamma(1) = 1$) consente di provare facilmente l'equazione (6). Per una descrizione più esauriente di alcune proprietà della funzione gamma di Eulero si rimanda al tema d'esame del mese di settembre 2009.

Le funzioni di Bessel compaiono nelle soluzioni di importanti problemi riguardanti la propagazione delle onde e i potenziali statici. Nel seguito di queste brevi note, consideriamo in particolare un problema che interviene spesso nella scrittura di alcuni sviluppi classici in meccanica celeste, cioè l'espansione del rapporto a/r . Per comprendere di cosa si tratta, ricordiamo brevemente che con r si intende la distanza di un punto P dall'origine e che in meccanica celeste è abituale descrivere i moti con gli *elementi orbitali*, che a un fissato istante descrivono la cosiddetta "ellisse osculatrice". Essa è definita in modo tale che su tale ellisse si svolge un moto virtuale in accordo con la seconda legge di Keplero e che ha *in quel fissato istante* uguali posizioni e velocità rispetto al moto di P che si sta considerando. Gli elementi orbitali relativi a moti *all'interno di un piano* sono quattro: $(a,\, e,\, \omega,\, l)$. a ed e sono rispettivamente il semiasse maggiore e l'eccentricità della "ellisse osculatrice". Nella nostra breve trattazione, non importa definire l'angolo ω, mentre l è l'anomalia media, cioè un opportuno angolo virtuale grazie al quale si può determinare in modo univoco la posizione del punto P sulla "ellisse osculatrice". Al fine di poter determinare le coordinate cartesiane nel piano corrispondenti a certi valori $(a,\, e,\, \omega,\, l)$ degli elementi orbitali, bisogna per prima cosa risolvere la seguente equazione di Keplero:

$$x - e\sin x - l = 0 \tag{9}$$

rispetto all'incognita x . Sia inoltre

$$\mathcal{K}(x) = x - e\sin x - l \tag{10}$$

la mappa che restituisce il valore del membro di sinistra dell'equazione (9) in funzione della sola x per valori fissati di e e di l . Per ulteriori approfondimenti riguardo ad alcune proprietà degli *elementi orbitali* si rimanda al precedente tema d'esame, cioè quello del mese di luglio 2011. In questa sede ci limitiamo a ricordare che se l'eccentricità $e < 1$ (come accade ogni qualvolta che la conica osculatrice è proprio un'ellisse) la soluzione dell'equazione (9) esiste ed è unica. Inoltre, si dimostra facilmente che tale soluzione appartiene all'intervallo $(l-e, l+e)$. La soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione (9) prende il nome di *anomalia eccentrica.*

Il rapporto a/r si esprime facilmente in funzione dell'*anomalia eccentrica*, poiché $r/a = 1 - e\cos\mathcal{E}$. Infine, sussiste la seguente identità

$$\frac{1}{1-e\cos\mathcal{E}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[2J_j(je)\cos(jl)\right] \ , \tag{11}$$

dove l'angolo $x = \mathcal{E}$ è legato al corrispondente valore dell'anomalia media l dall'equazione di Keplero (9) e J_j è proprio la funzione di Bessel di prima specie, che risolve l'equazione differenziale (1), quando $\alpha = j$.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola il valore della funzione di Bessel di prima specie, come dato dalla definizione (2). Il programma deve contenere:

(A) una *function* che ha come argomenti due variabili di tipo `double` α e x ; essa deve restituire il valore di $J_\alpha(x)$, definito come nella formula (2) quando $\alpha = n \in \mathbf{N}$; all'interno di tale *function*, il calcolo approssimato della serie che compare nel secondo membro di (2) *deve* essere effettuato (così com'è abituale) tramite le somme parziali $s_{\bar{j}} = \sum_{j=0}^{\bar{j}} \left[(-1)^j \, (x/2)^{2j+n} \,/\, (j! \, (j+n)!)\right]$; inoltre, il calcolo delle somme parziali *deve* essere arrestato quando avviene che $s_{\bar{j}} = s_{\bar{j}-1}$ (ovviamente, s'intende che questa condizione è soddisfatta a partire da un certo valore finito di $\bar{j}$, a causa degli *errori di arrotondamento* commessi dal *computer*, durante l'esecuzione del programma);

(B) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

  (B1) l'*input da tastiera* del valore del parametro α ; nel programma, la variabile α deve essere di tipo `double`; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se α *non è un intero maggiore o uguale a* 0 , allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

  (B2) l'*input da tastiera* del valore della variabile x ; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se x *non è maggiore o uguale a* 0 , allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

  (B3) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da calcolare numericamente il valore di $J_\alpha(x)$;

  (B4) la stampa sul video del valore della funzione di Bessel di prima specie calcolato così come è stato richiesto al precedente punto (B3).

Alcuni consigli
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Per verificare che il parametro α è un intero, così come richiesto al precedente punto (B1), è conveniente utilizzare le *function* `floor` e `ceil`, che fanno parte della libreria matematica standard del linguaggio **C**.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da effettuare la verifica numerica dell'equazione (3). A tal fine, si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: la "variabile di integrazione" t , il parametro α e la variabile x ; tutti e tre questi argomenti siano di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore di $\cos\left[\alpha t - x\sin(t)\right]$, cioè proprio la funzione integranda che compare nell'equazione (3);

(B) si scriva una *function* che ha 6 argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numsubint` , due parametri reali p_1 , p_2 e infine un *puntatore a una function f*, la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti di tipo `double`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(t, p_1, p_2)\, \mathrm{d}t$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;

(C) all'interno della *main function*, si effettui *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare l'integrale $\int_0^\pi \mathrm{d}t \cos\left[\alpha t - x\sin(t)\right]$, dove i valori di α e x sono ancora quelli inseriti in *input* così come richiesto ai punti (B1) e (B2) dell'obiettivo 1; il valore di tale integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, \pi]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(D) all'interno della *main function*, si stampi sul video *in formato esponenziale* la differenza tra il primo e il secondo membro dell'equazione (3).

Ovviamente, la determinazione numerica della funzione di Bessel di prima specie e dell'integrale che compare in formula (3) *può considerarsi ben riuscita* quando la suddetta differenza tra primo e secondo membro di (3) è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*

Alcuni altri consigli

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di `pigreco` e del numero di sotto-intervalli di integrazione per mezzo di due opportune direttive `#define`.

Il numero proposto di sotto-intervalli dell'insieme di integrazione è stato fissato indicativamente al valore di 100 000 e può essere aumentato al fine di diminuire l'errore numerico finale. Ovviamente, aumentando il numero di intervallini, il tempo necessario al computer per eseguire il programma potrebbe crescere in modo inaccettabile, specie se il processore non è molto potente.

Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, allo scopo di calcolare il valore della funzione di Bessel di prima specie $J_\alpha(x)$ anche quando $\alpha \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$, usando la definizione (4). A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: la "variabile di integrazione" t, la variabile z e un terzo argomento (dal nome autoesplicativo) `nonserve`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore di $t^{z-1}\exp(-t)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nell'equazione (7);

(B) si scriva una *function* che ha come argomento la variabile indipendente z e restituisce il valore di $\Gamma(z)$; questa *function* deve essere realizzata in modo tale da utilizzare ripetutamente la relazione (8) così da ricondurre il calcolo dell'integrale che compare nell'equazione (7) al solo caso in cui la variabile $z \in [2, 3]$ (in tali condizioni, il *metodo del punto medio* può essere applicato in modo che sia affetto da un errore numerico estremamente piccolo); pertanto, si traduca in linguaggio di programmazione la procedura descritta ai seguenti punti (B1)–(B5);

  (B1) si ponga inizialmente $\varrho = 1$; per evitare di fare confusione, introduciamo il simbolo $\bar{z} = z$, dove per $\bar{z}$ si intende il valore dell'argomento con cui la *function* (che viene descritta proprio in questi punti (B)–(B5)) è stata chiamata;

(B2) se $\bar{z} < 2$, si iteri un breve ciclo *mentre* è verificato che $z < 2$; all'interno di questo ciclo, si compiono le seguenti operazioni: (B21) il valore di ϱ viene aggiornato, moltiplicandolo per il fattore $1/z$, (B22) si incrementa di 1 il valore di z;

(B3) se invece $\bar{z} > 3$, si iteri un breve ciclo *mentre* è verificato che $z > 3$; all'interno di questo ciclo, si compiono le seguenti operazioni: (B31) si decrementa di 1 il valore di z, (B32) il valore di ϱ viene aggiornato, moltiplicandolo per il fattore z;

(B4) si effettui una *chiamata della function descritta al punto (B) dell'obiettivo 2*, in modo tale che il valore dell'integrale $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} \exp(-t)$ viene approssimato utilizzando $100\,000$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 200]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B) dell'obiettivo 2* deve essere tale che negli ultimi tre argomenti vengono passati anche il valore di z, 0 (poiché il penultimo argomento qui non serve) e l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(B5) si restituisca all'ambiente chiamante il valore richiesto di $\Gamma(\bar{z})$ (cioè il "risultato della *function*"), il quale si ottiene moltiplicando ϱ per il fattore $\Gamma(z)$, il cui valore è stato calcolato così come descritto al punto (B4);

(C) si modifichi la *function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*, in modo tale che essa sia capace di calcolare $J_\alpha(x)$ non solo se $\alpha = n \in \mathbf{N}$, ma anche quando $\alpha \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$; è particolarmente apprezzabile una riscrittura di tale *function*, in cui si differenzia il caso $\alpha = n \in \mathbf{N}$ da $\alpha \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$, *solo per il calcolo dei primi termini* delle serie che compaiono a secondo membro delle equazioni (2) e (4): nel primo di questi due casi, verrà calcolato il fattoriale di n, mentre nel secondo caso, si calcolerà il valore di $\Gamma(\alpha + 1)$ grazie ad un'opportuna chiamata della *function descritta al punto (B)*; si osservi che altre chiamate della *function descritta al punto (B)* non sono necessarie perché il denominatore del generico termine j–esimo della serie che compare in (4) *può essere calcolato* a partire dal denominatore del termine $j-1$–esimo, utilizzando la relazione iterativa (8) e quella analoga che riguarda il fattoriale;

(D) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

(D1) *un secondo input da tastiera* del valore del parametro α; stavolta α *può non essere un intero*, ma deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se α *non è maggiore o uguale a* 0, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(D2) *un secondo input da tastiera* del valore della variabile x; anche stavolta, il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se x *non è maggiore o uguale a* 0, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(D3) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1 e modificata così come richiesto al punto (C)*, in modo da calcolare numericamente il valore di $J_\alpha(x)$;

(D4) la stampa sul video del nuovo valore della funzione di Bessel di prima specie calcolato così come è stato richiesto al precedente punto (D3).

Obiettivo (intermedio) 4:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da effettuare la verifica numerica che l'equazione differenziale (1) è soddisfatta, quando si sostituisce la funzione incognita $y(x)$ con la funzione di Bessel di prima specie $J_\alpha(x)$. A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: i primi due sono costituiti dai valori delle variabili α e x, mentre i secondi due *devono essere tali da restituire all'ambiente chiamante* i valori delle derivate prima e seconda della funzione di Bessel di prima specie che qui di seguito indichiamo rispettivamente con `d1J` e `d2J`; allo scopo di determinare i valori di `d1J` e `d2J` all'interno di tale *function* si proceda così come descritto come ai seguenti punti (A1)–(A7);

(A1) se α è un intero (i test effettuati nella fase di *input* della *main function* ci assicurano che α non può essere negativo), allora poniamo il valore iniziale di una *variabile locale* γ uguale a $\alpha!$, altrimenti poniamo inizialmente $\gamma = \Gamma(\alpha + 1)$ grazie ad un'opportuna chiamata della *function descritta al punto (B) dell'obiettivo 3*;

(A2) azzeriamo inizialmente sia il valore di `d1J` che quello di `d2J`;

(A3) se $\alpha \neq 0$, poniamo inizialmente `d1J` $= \alpha(x/2)^{\alpha-1}/(2\gamma)$;

(A4) se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, poniamo inizialmente `d2J` $= \alpha(\alpha - 1)(x/2)^{\alpha-2}/(4\gamma)$;

(A5) effettuiamo le definizioni iniziali di alcune *variabili locali* in modo tale che $j = 0$, $\sigma = 1$, $\mathcal{F} = 1$ e $\mathcal{P} = (x/2)^{\alpha}$;

(A6) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A61)–(A68) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A7);

(A61) si (ri)aggiornino i valori di `d1Jprec` e `d2Jprec` in modo tale che siano posti uguali rispettivamente a `d1J` e `d2J`, in altri termini nelle *variabili locali* `d1Jprec` e `d2Jprec` vengono memorizzati i valori delle derivate prima e seconda della funzione di Bessel così come sono stati calcolati prima della corrente iterazione del ciclo;

(A62) si incrementi di 1 il valore del contatore j; si cambi il segno della variabile σ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\sigma = (-1)^j$);

(A63) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{F}$ moltiplicandolo per j (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{F} = j!$);

(A64) si aggiorni il valore della variabile γ moltiplicandolo per $j+\alpha$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\gamma = \Gamma(j + \alpha + 1)$);

(A65) si aggiorni il valore di `d2J`, aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J''_\alpha(x)$ in formula (5); tale contributo altro non è che $(-1)^j(2j + \alpha)(2j + \alpha - 1)\big(x/2\big)^{2j+\alpha-2}/\big[4\big(j!\,\Gamma(j + \alpha + 1)\big)\big]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ e γ;

(A66) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{P}$ moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = \big(x/2\big)^{2j+\alpha-1}$);

(A67) si aggiorni il valore di `d1J`, aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J'_\alpha(x)$ in formula (5); tale contributo altro non è che $(-1)^j(2j+\alpha)\big(x/2\big)^{2j+\alpha-1}/\big[2\big(j!\,\Gamma(j+\alpha+1)\big)\big]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ e γ;

(A68) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{P}$ moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = \big(x/2\big)^{2j+\alpha}$);

(A7) *se* il valore di `d1J` è diverso da quello di `d1Jprec` *oppure* il valore di `d2J` è diverso da quello di `d2Jprec`, allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A61)–(A68);

(B) all'interno della *main function*, si effettui *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da calcolare $J'_\alpha(x)$ e $J''_\alpha(x)$, dove i valori di α e x sono ancora quelli inseriti in *input* così come richiesto ai punti (D1) e (D2) dell'obiettivo 3;

(C) all'interno della *main function*, si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore che assume il membro di sinistra dell'equazione (1), quando si sostituisce la funzione incognita $y(x)$ con la funzione di Bessel di prima specie $J_\alpha(x)$.

Ovviamente, la verifica numerica che l'equazione (1) è soddisfatta dalla funzione di Bessel di prima specie *può considerarsi ben riuscita* quando il suddetto valore del membro di sinistra di (1) è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Obiettivo (finale) 5:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 4, in modo tale da effettuare la verifica numerica che l'equazione (11) è soddisfatta, quando l'angolo $x = \mathcal{E}$ è legato al corrispondente valore dell'anomalia media l dall'equazione di Keplero (9). A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i valori di x, e ed l; tale *function* restituisce il valore $\mathcal{K}(x, e, l) = x - e \sin x - l$, cioè il membro di destra dell'equazione di Keplero (9);

(B) si includa una *function* che ha cinque argomenti: i valori di a, b, e, l, infine, un *puntatore a una function* g, la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti (che indichiamo con i simboli x, e, l per variabili che sono di tipo `double`); *alla fine della chiamata*, la *function* che stiamo descrivendo (cioè quella con cinque argomenti) deve restituire il valore approssimato di x che risolve l'equazione $g(x, e, l) = 0$ dove i valori di e ed l sono fissati all'atto della *chiamata della function* e il valore di x viene determinato all'interno dell'intervallo (a, b) *utilizzando il metodo di bisezione*;

(C) si scriva una *function* che ha due argomenti: i valori dell'eccentricità e e dell'anomalia media l; tale *function* deve restituire il valore approssimato della serie che compare nel secondo membro di (11); questo calcolo *deve* essere effettuato (così com'è abituale) tramite le somme parziali $s_{\bar{j}} = 1 + \sum_{j=1}^{\bar{j}} \left[2 J_j(je) \cos(jl) \right]$; inoltre, il calcolo delle somme parziali *deve* essere arrestato quando *per cinque valori consecutivi di* $\bar{j}$ avviene che $s_{\bar{j}} = s_{\bar{j}-1}$ (ovviamente, s'intende che questa condizione è soddisfatta a cominciare da un certo valore finito di $\bar{j}$, a causa degli *errori di arrotondamento* commessi dal *computer*, durante l'esecuzione del programma);

(D) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

 (D1) l'*input da tastiera* del valore dell'eccentricità e; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se *e non è compreso* nell'intervallo $[0, 1/2]$, esso deve essere *reinserito correttamente*;

 (D2) l'*input da tastiera* del valore dell'anomalia media l; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se *l non è compreso* nell'intervallo $[0, 2\pi]$, esso deve essere *reinserito correttamente*;

 (D3) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da calcolare numericamente la soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (9); tale soluzione deve essere determinata nell'intervallo (a, b) dove $a = l - e$ e $b = l + e$ (essendo e ed l i valori inseriti in *input* così come richiesto ai punti (D1) e (D2)); inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(D4) la stampa sul video del valore approssimato della soluzione $x = \mathcal{E}$ dell'equazione di Keplero (9), determinata così come descritto al precedente punto (D3);

(D5) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (C)*, in modo da calcolare numericamente il secondo membro dell'equazione (11);

(D6) la stampa sul video *in formato esponenziale* della differenza tra il primo e il secondo membro dell'equazione (11).
Ovviamente, l'espansione in serie del rapporto a/r *può considerarsi ben eseguita* quando la suddetta differenza tra primo e secondo membro di (11) è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*.

Un'osservazione finale

Sia il primo che il secondo membro dell'equazione (11) sono ben definiti per ogni valore dell'eccentricità $e \in [0, 1)$ e per ogni valore dell'anomalia media $l \in [0, 2\pi]$. Ciò nonostante, nella fase di *input* del valore di e (così come descritto al punto (D1)) è opportuno limitare e all'intervallo $[0, 1/2]$, al fine di accelerare la convergenza a zero del termine generale della serie che compare nella formula (11). Questo consente di evitare qualche problema nel calcolo numerico dell'espansione in serie del rapporto a/r , la cui soluzione richiederebbe una scrittura assai più sofisticata del programma in linguaggio **C**.