Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
24 Giugno 2011

Tema d'esame: Calcolo di opportuni autospazi che sono utili per effettuare il procedimento di diagonalizzazione in *geometria simplettica.*

Descrizione del metodo di calcolo

La *geometria simplettica* nasce naturalmente nell'ambito della *meccanica Hamiltoniana* e, in particolare, ha strette relazioni con l'argomento delle *trasformazioni canoniche* per le variabili coordinate-momenti. In questo ambito, un problema classico è quello della *linearizzazione delle equazioni del moto vicino a un punto di equilibrio stabile* e della loro espressione in "forma normale" (o diagonale), che è quella associata a *un sistema di oscillatori armonici.* Nel seguito, accenneremo a come possono essere calcolate alcune quantità che sono utili per portare a termine la "diagonalizzazione" (o, più estesamente, il calcolo della forma normale per un sistema di oscillatori armonici).

In termini molto rozzi, esiste una profonda analogia tra la geometria euclidea e quella simplettica, una volta che si sostituisce la matrice identità $n \times n$–dimensionale $\mathbf{I}_n$ con la "matrice fondamentale della geometria simplettica" J . In ambito n–dimensionale, essa è definita come segue:

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n/2} & -\,\mathbf{I}_{n/2} \\ \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{0}_{n/2} \end{pmatrix} \ , \tag{1}$$

dove la scrittura precedente deve essere intesa "a blocchi", cioè $\mathbf{I}_{n/2}$ è la matrice identità $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$–dimensionale e, analogamente, $\mathbf{0}_{n/2}$ è la matrice $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$–dimensionale le cui componenti sono tutte uguali a zero. Ovviamente, le definizioni precedenti hanno senso se e solo se n è un numero pari.

Si dice che una matrice $n \times n$–dimensionale U é simplettica se essa è tale che

$$U^T J U = J \ . \tag{2}$$

Da quest'ultima definizione, si capisce che possiamo considerare le matrici simplettiche come l'analogo di quelle "ortogonali".

In ambito Hamiltoniano, la dinamica nei pressi di un punto di equilibrio stabile è abitualmente rappresentata (a meno di termini di ordini superiori) da una forma quadratica (nelle variabili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ che sono entrambe $n/2$–dimensionali) del tipo

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{n/2}\sum_{j=1}^{n/2} q_{i,j}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n/2}\sum_{j=n/2+1}^{n} q_{i,j}x_i y_{j-n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n}\sum_{j=1}^{n/2} q_{i,j}y_{i-n/2}x_j + \sum_{i=n/2+1}^{n}\sum_{j=n/2+1}^{n} q_{i,j}y_{i-n/2}y_{j-n/2} \Bigg] \ ,$$

dove la matrice

$$Q = \Big(q_{i,j} \Big)_{i,j=1,\,\ldots\,,\,n}$$

è *simmetrica* e soddisfa altre proprietà su cui ora non ci soffermiamo (anche perché saranno implicitamente enunciate in seguito).

Il procedimento di "diagonalizzazione" si propone di determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$, tale che nelle nuove coordinate $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}'$ la forma quadratica h si trasforma in quella seguente:

$$h'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n/2}\left[\omega_j\left(\left(x'_j\right)^2 + \left(y'_{j-n/2}\right)^2\right)\right] \ ,$$

dove le "velocità angolari di oscillazione" ω_j sono positive $\forall\ 1 \le j \le n/2$ e il legame tra le vecchie e le nuove coordinate è dato dall'equazione $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')$. In altre parole, bisogna determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$, tale che

$$\mathcal{U}^T Q\,\mathcal{U} = D \ , \tag{3}$$

dove

$$D = \mathrm{diag}\big\{\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{n/2}\,,\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{n/2}\big\} \ , \tag{4}$$

cioè D è la matrice i cui elementi sono tutti uguali a zero, eccetto quelli lungo la diagonale, dove compaiono in sequenza gli elementi del vettore $n/2$–dimensionale $\big(\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_{n/2}\big)$ ripetuti due volte.

Per determinare la suddetta matrice $\mathcal{U}$ che è simplettica e "diagonalizza" la forma quadratica associata a Q , è utile calcolare dapprima gli autovalori della matrice JQ che sono gli stessi di JD e quindi sono tutti immaginari puri e a coppie complesse coniugate; cioè

$$\sigma(JQ) = \big\{\pm\,\mathrm{i}\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\pm\mathrm{i}\omega_{n/2}\big\} \ , \tag{5}$$

dove $\sigma(JQ)$ indica lo spettro degli autovalori della matrice JQ . È ben noto che, in generale, il calcolo di tutti gli autovalori non è affatto agevole. Per semplicità, *ci limitiamo al caso particolare con* $n = 4$. I coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico $\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{j=0}^{4}\alpha_j\lambda^j$ associato alla matrice JQ sono allora dati dalle seguenti formule:

$$\alpha_0 = \det(JQ)\,,\quad \alpha_1 = -\sum_{i=1}^{4}\det M_i\,,\quad \alpha_2 = \sum_{1\le i\le j<4}\det\mathcal{M}_{i,j}\,,\quad \alpha_3 = -\mathrm{Tr}(JQ)\,,\quad \alpha_4 = 1\,, \tag{6}$$

dove M_i è la matrice 3×3–dimensionale che si ottiene togliendo a JQ la i–esima riga e la i–esima colonna; mentre, $\mathcal{M}_{i,j}$ è la matrice 2×2–dimensionale che si ottiene togliendo ad M_i la j–esima riga e la j–esima colonna. Inoltre, comè abituale, gli operatori determinante e traccia sono stati rispettivamente denotati con det e Tr . La particolare struttura della matrice JQ (e dei suoi autovalori) è tale che $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, cioè il *polinomio caratteristico* $\mathcal{P}(\lambda)$ *è pari.* Di conseguenza, lo spettro $\sigma(JQ)$ degli autovalori può essere determinato risolvendo innazitutto l'equazione di secondo grado

$$t^2 + \alpha_2 t + \alpha_0 = 0 \ ; \tag{7}$$

siano $t_{1,2}$ le radici dell'equazione precedente, dopo aver osservato che esse sono negative, lo spettro degli autovalori della matrice JQ è dato da

$$\sigma(JQ) = \left\{ \pm \mathrm{i}\sqrt{-t_1}\, , \pm\mathrm{i}\sqrt{-t_2} \right\} \ . \tag{8}$$

Dal confronto delle equazioni (5) e (8), segue immediatamente che $\omega_1 = \sqrt{-t_1}$ e $\omega_2 = \sqrt{-t_2}$.

Al fine di determinare la matrice simplettica $\mathcal{U}$ senza utilizzare i numeri complessi, consideriamo la matrice $JQJQ$ che ha come autovalori proprio i numeri reali negativi t_1 e t_2 , entrambi di molteplicità 2 . Supponiamo che $t_1 \neq t_2$ e, senza perdita di generalità, $t_1 > t_2$. La matrice $JQJQ$ in generale *non* è simmetrica, ma i suoi autovettori indipendenti formano una base in $\mathbf{R}^n$. Questa proprietà ci permette di adattare il *metodo delle potenze* in modo da determinare due vettori indipendenti $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, tali che

(i) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di $JQJQ$ associati all'autovalore $t_1 = -\omega_1^2$, cioè

$$JQJQ\,\mathbf{v}_1 = -\omega_1^2\,\mathbf{v}_1 \ , \qquad JQJQ\,\mathbf{v}_2 = -\omega_1^2\,\mathbf{v}_2 \ ; \tag{9}$$

(ii) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono "normalizzati" in modo da soddisfare le seguenti equazioni:

$$\|\mathbf{v}_1\| = 1 \ , \qquad \mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 = -1 \ , \tag{10}$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea;

(iii) l'antisimmetria della matrice J (che è evidente dalla definizione (1)) e la seconda equazione nella precedente formula (10) implicano immediatamente anche le seguenti relazioni:

$$\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}_2 = 0 \ , \qquad \mathbf{v}_2 \cdot J\mathbf{v}_1 = 1 \ . \tag{11}$$

Nell'obiettivo 5 verrà dettagliatamente descritto l'algoritmo del *"metodo delle potenze adattato"* in modo da determinare due autovettori relativi all'autovalore massimo (in valore assoluto) che soddisfano le suddette proprietà (i)–(iii).

Inoltre, il *"metodo delle potenze adattato"* può essere applicato anche alla matrice inversa di $JQJQ$ in modo da determinare due autovettori indipendenti $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$, che sono relativi all'autovalore massimo in valore assoluto (cioè $-1/\omega_2^2$) di $(JQJQ)^{-1}$ e soddisfano le seguenti proprietà:

(i') $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$ sono autovettori di $JQJQ$ associati all'autovalore $t_2 = -\omega_2^2$, cioè

$$JQJQ\,\mathbf{v}_1' = -\omega_2^2\,\mathbf{v}_1' \ , \qquad JQJQ\,\mathbf{v}_2' = -\omega_2^2\,\mathbf{v}_2' \ ; \tag{12}$$

(ii') $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$ sono "normalizzati" in modo da soddisfare le seguenti equazioni:

$$\|\mathbf{v}_1'\| = 1 \ , \qquad \mathbf{v}_1' \cdot J\mathbf{v}_2' = -1 \ ; \tag{13}$$

(iii') conseguentemente, sono implicate anche le seguenti relazioni:

$$\mathbf{v}_1' \cdot J\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2' \cdot J\mathbf{v}_2' = 0 \ , \qquad \mathbf{v}_2' \cdot J\mathbf{v}_1' = 1 \ . \tag{14}$$

Si consideri ora la matrice

$$\mathcal{V} = \Big(\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_1'\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_2' \Big) \ , \tag{15}$$

cioè $\mathcal{V}$ è la matrice che si ottiene mettendo nella prima colonna $\mathbf{v}_1$, nella seconda $\mathbf{v}_1'$, nella terza e nella quarta $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_2'$, rispettivamente. Dalle proprietà (i)–(iii), (i')–(iii') e dall'antisimmetria di J discende che la matrice $\mathcal{V}$ (formata da autovettori di $JQJQ$) è *simplettica*.

Finalmente, a partire da $\mathcal{V}$ è abbastanza facile determinare una matrice simplettica $\mathcal{U}$ che soddisfa l'equazione (3) e, quindi, "diagonalizza" la forma quadratica associata a Q. *Per evidenti ragioni di brevità*, la descrizione di quest'ultimo passaggio da $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$ viene omessa.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che *legge da un dato file una matrice e verifica che essa è simplettica*. Il programma deve contenere:

(A) una *function* che ha quattro argomenti: due matrici A e B, il valore della dimensione effettiva n e, infine, una terza matrice C; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il risultato del prodotto matriciale $C = A \cdot B$;

(B) una *function* che ha tre argomenti: una matrice A, il valore della dimensione effettiva n e, infine, una seconda matrice B; tale *function* restituisce (attraverso il terzo argomento) la trasposta della prima matrice $B = A^T$;

(C) una *function* che ha tre argomenti: una stringa, il valore della dimensione effettiva n e, infine, un vettore; tale *function* restituisce (attraverso il terzo argomento) i valori degli n elementi del vettore che sono stati prelimarmente scritti in modo ordinato nella stringa;

(D) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

- (D1) *l'apertura di un file di input* che si chiama `matr_simpl.inp`, il quale deve essere preliminarmente scaricato dalla rete e posizionato nella stessa cartella contenente il programma che stiamo descrivendo; il file `matr_simpl.inp` contiene i dati relativi a una matrice *simplettica* U;
- (D2) la lettura dal *file di input* della dimensione effettiva n delle matrici; si effettui un *test*, in modo tale che se $n \neq 4$ l'esecuzione del programma deve essere immediatamente arrestata;
- (D3) la lettura dal *file di input* delle n righe che compongono la matrice U; la definizione dei valori numerici di tutti gli elementi di U deve essere effettuata grazie a n opportune *chiamate della function descritta al punto (C)*;
- (D4) la definizione iniziale della "matrice fondamentale della geometria simplettica" J, in modo che essa rispetti l'equazione (1);
- (D5) il calcolo della matrice $U^T JU - J$; tale calcolo deve essere effettuato grazie a delle opportune *chiamate delle function descritte ai punti (A) e (B)*;
- (D6) il calcolo del massimo elemento in valore assoluto tra quelli che compongono la matrice $U^T JU - J$;
- (D7) la stampa sul video *in formato esponenziale* del massimo elemento in valore assoluto tra quelli della matrice $U^T JU - J$; ovviamente, la verifica numerica che la matrice U è simplettica *deve considerarsi ben riuscita* se tale massimo elemento (in valore assoluto) è al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*

Alcuni consigli
È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di $NDIM$ per mezzo di una direttiva `#define`.

La scrittura del programma è enormemente facilitata se si ricorre al seguente "trucco": quando si deve decidere quanta parte della memoria deve essere destinata ad ospitare i vari elementi dei vettori e delle matrici, si effettuino dei "sovradimensionamenti" in modo tale da allocare sempre, rispettivamente, $NDIM$ e $NDIM \times NDIM$ celle di memoria. Ciò nonostante, le istruzioni che permettono il calcolo dei valori dei componenti dei vettori e delle matrici verranno effettuate tenendo conto che la *dimensione effettiva* dello spazio vettoriale che stiamo considerando è $n \leq NDIM$.
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da calcolare una matrice JQ dove Q può essere posta in forma normale anche se non è banalmente diagonale. A tal fine si proceda come segue:
(A) all'interno della *main function*, si effettui l'*input da tastiera* dei valori di $\omega_1 , \ldots , \omega_{n/2}$; essi devono essere sottoposti a test in modo tale che siano tutti positivi e siano disposti in ordine decrescente, cioè $\omega_1 > \ldots > \omega_{n/2} > 0$; qualora queste condizioni non saranno verificate, tali valori dovranno essere reinseriti correttamente;
(B) all'interno della *main function*, si definisca la matrice diagonale D , in modo che essa rispetti l'equazione (4);
(C) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice JQ , dove $Q = U^T DU$, grazie a delle opportune *chiamate delle function descritte ai punti (A) e (B) dell'obiettivo 1*;
(D) all'interno della *main function*, si effettui una stampa sul video della matrice JQ in modo che sia *esteticamente non disprezzabile.*

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere il calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico della matrice JQ . A tal fine si può procedere come segue:
(A) si includano nel programma tutte le *function* che sono necessarie per il calcolo del determinante di una matrice;
(B) si includa una function che ha come argomenti una matrice `mat1` , due interi n e l , un'altra matrice `mat2` ; all'interno di tale function gli elementi di `mat1` che hanno indici di riga e di colonna compresi tra 0 e $n-1$ vengano "ricopiati" sugli elementi di `mat2` , *ad eccezione di quelli che stanno sulla l–esima riga* **oppure** *sulla l–esima colonna*;
(C) si proceda al calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ così come sono definiti dalle equazioni in (6); si noti che la function descritta al punto (B) dovrà essere chiamata una volta per poter determinare le matrici M_i e due volte (una di seguito all'altra) per $\mathcal{M}_{i,j}$;
(D) si stampino (in modo ordinato) sul video i valori dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$.

Obiettivo (intermedio) 4:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da calcolare gli autovalori della matrice JQ . A tal fine si può procedere come segue:
(A) si includa nel programma una *function* che ha cinque argomenti: i coefficienti a , b , c e due *puntatori* alle variabili x_1 e x_2 ; tale *function* calcola le soluzioni dell'equazione

di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ e restituisce un valore intero che è posto uguale a 1, 0 o -1 a seconda che le radici dell'equazione siano rispettivamente reali e distinte, uguali o con parte immaginaria diversa da zero; inoltre, al termine della esecuzione di tale function, i valori delle radici dell'equazione sono posti nelle variabili x_1 e x_2;

(B) all'interno della *main function*, si calcolino le radici $t_{1,2}$ dell'equazione (7) grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;

(C) all'interno della *main function*, si stampino sul video gli autovalori della matrice JQ nel formato $\pm \mathrm{i}\sqrt{-t_1} \quad \pm \mathrm{i}\sqrt{-t_2}$. Ovviamente, il calcolo di tali autovalori *deve considerarsi ben riuscito* quando accade che $\omega_1 = \sqrt{-t_1}$ e $\omega_2 = \sqrt{-t_2}$, dove (ω_1, ω_2) sono gli elementi diagonali della matrice D, che sono stati inseriti come richiesto al punto (A) dell'obiettivo (2);

Obiettivo (intermedio) 5:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 4, in modo tale da calcolare una coppia di autovettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ della matrice $JQJQ$, i quali soddisfano le proprietà (i)–(iii) descritte in precedenza. A tal fine si può procedere come segue:

(A) si introduca una *function* che ha quattro argomenti: una matrice A, un vettore $\mathbf{v}$, il valore della dimensione effettiva n e un vettore $\mathbf{w}$; tale *function* restituisce (attraverso il quarto argomento) il vettore risultato del seguente prodotto matrice per vettore $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$;

(B) si introduca una *function* che ha tre argomenti: due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, inoltre, il valore della dimensione effettiva n; tale *function* restituisce il valore del prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$;

(C) si scriva una *function* che ha due argomenti: un vettore $\mathbf{v}$ e il valore della dimensione effettiva n; tale *function* restituisce il valore della norma di $\mathbf{v}$, cioè $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$;

(D) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e la dimensione effettiva n dei vettori stessi; all'atto della chiamata di tale *function* i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono solo tali che $\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 \neq 0$; all'interno della *function* il vettore $\mathbf{v}_1$ viene ridefinito in modo che sia normalizzato, cioè viene posto uguale a $\mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$; inoltre, il vettore $\mathbf{v}_2$ viene ridefinito in modo tale che sia uguale a $-\mathbf{v}_2/(\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2)$; in altri termini, alla fine della chiamata di tale *function* i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ soddifano la proprietà (ii) descritta in precedenza;

(E) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: una matrice A, il valore della dimensione effettiva n e due vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$; tale *function* restituisce un autovalore e (attraverso i due ultimi argomenti) due corrispondenti autovettori indipendenti che soddifano la proprietà (ii); il calcolo deve essere effettuato *adattando il metodo delle potenze* al caso di un autovalore massimo che ha sia la molteplicità algebrica che quella geometrica uguali a 2; si proceda così come descritto come ai seguenti punti (E1)–(E3);

  (E1) si introducano le seguenti definizioni come (molto) rozze approssimazioni iniziali dell'autovalore (che d'ora innanzi chiamiamo λ) e dei corrispondenti autovettori: $\lambda = 0$, $\mathbf{v}_1 = \left(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}\right)$; inoltre, gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ siano subito ridefiniti grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (D);*

  (E2) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (E21)–(E25) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (E3);

(E21) si ponga $\overline{\lambda} = \lambda$;
(E22) si (ri)calcolino i valori degli elementi del vettore $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1$, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (A)*;
(E23) si ricalcoli l'autovalore, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo da porre $\lambda = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1$;
(E24) si riaggiornino i valori degli elementi dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nel modo seguente: si ponga $\mathbf{v}_1$ uguale a $\mathbf{w}_1$; si (ri)calcolino i valori degli elementi del vettore $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2$, effettuando la *chiamata della function descritta al punto (A)* e poi si ponga $\mathbf{v}_2$ uguale a $\mathbf{w}_2$;
(E25) si riaggiornino nuovamente i valori degli elementi dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (D);*
(E3) se l'errore relativo riguardante la determinazione dell'autovalore è significativamente maggiore dell'*errore di macchina*, cioè se si verifica che

$$\frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{|\lambda|} > 2n \times 10^{-16} ,$$

allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (E21)–(E25);

(F) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*;
(G) all'interno della *main function*, si calcolino gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ corrispondenti all'autovalore *massimo* della matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (E)*;
(H) all'interno della *main function*, anche grazie a delle opportune *chiamate delle function descritte ai punti (A)–(C)*, si calcolino le seguenti quantità: $\|(JQJQ)\mathbf{v}_1 + \omega_1^2\mathbf{v}_1\|$, $\|(JQJQ)\mathbf{v}_2 + \omega_1^2\mathbf{v}_2\|$, $|\mathbf{v}_1 \cdot J\mathbf{v}_2 + 1|$ e le si stampino sul video *in formato esponenziale.* Ovviamente, la determinazione degli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ *deve considerarsi ben riuscita* se tali quantità sono tutte e tre al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*

Obiettivo (finale) 6:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 5, in modo tale da costruire la matrice *simplettica* $\mathcal{V}$. A tal fine si può procedere come segue:

(A) si includa nel programma una *function* che effettua il calcolo di una matrice inversa rispetto a una data, utilizzando il *metodo di Cramer*;
(B) all'interno della *main function*, si calcoli la matrice $(JQJQ)^{-1}$ grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (A)*;
(C) all'interno della *main function*, si calcolino gli autovettori $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$ corrispondenti all'autovalore *minimo* della matrice $JQJQ$ grazie a un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (E) dell'obiettivo 5, avendo cura di inserire la matrice* $(JQJQ)^{-1}$ *tra gli argomenti*;
(D) all'interno della *main function*, anche grazie a delle opportune *chiamate delle function descritte ai punti (A)–(C) dell'obiettivo 5*, si calcolino le seguenti quantità: $\|(JQJQ)\mathbf{v}_1' + \omega_2^2\mathbf{v}_1'\|$, $\|(JQJQ)\mathbf{v}_2' + \omega_2^2\mathbf{v}_2'\|$, $|\mathbf{v}_1' \cdot J\mathbf{v}_2' + 1|$ e le si stampino sul video *in formato esponenziale.* Ovviamente, la determinazione degli autovettori $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$ *deve considerarsi ben riuscita* se tali quantità sono tutte e tre al più dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*;

(E) all'interno della *main function*, si definisca la matrice $\mathcal{V}$, in modo che essa rispetti l'equazione (15);

(F) si verifichi che la matrice $\mathcal{V}$ è *simplettica* in modo analogo a quanto fatto per la matrice di partenza U nell'obiettivo 1.