

**Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I**  
**per il corso di laurea in Matematica**  
**15 Luglio 2009**

**Tema d'esame:** soluzione di una particolare classe di sistemi di equazioni *nonlineari* utilizzando un metodo di Newton multidimensionale.

**Descrizione del metodo di calcolo**

Consideriamo il seguente sistema di tre equazioni *nonlineari* nelle tre incognite  $x_1, x_2, x_3$ :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + \varepsilon \sin(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ x_3 + \varepsilon \sin(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) - x_3 + \mu \cos(x_1 - x_3) = 0 \end{cases},$$

dove  $\varepsilon$  e  $\mu$  sono parametri reali e la funzione  $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  altro non è che un polinomio di quinto grado la cui espressione è

$$(2) \quad f(\varrho) = \frac{\varrho^5}{5} + 8\varrho^4 + \frac{22}{3}\varrho^3 - 12\varrho^2 + \frac{81}{2}\varrho - 5.$$

I metodi numerici “alla Newton” sono innescati a partire da una approssimazione iniziale “buona abbastanza” della soluzione. Allo scopo di determinare una tale approssimazione, in primo luogo si osservi che il sistema (1) può essere facilmente risolto quando  $\varepsilon = \mu = 0$ . Infatti, quando entrambi i parametri sono nulli, si verifica che la soluzione è data da

$$(3) \quad \underline{x}_0 = \left( \frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

dove  $\bar{\varrho}$  è l'unica soluzione nell'intervallo  $[0, 1]$  dell'equazione

$$(4) \quad f(\varrho) = 0.$$

L'applicazione del metodo di Newton al sistema (1) con valori dei parametri  $(\varepsilon, \mu) \neq (0, 0)$  consiste nella costruzione di una successione di vettori tridimensionali  $\{\underline{x}_n\}_{n \geq 0}$  che converge alla soluzione del suddetto sistema. A tale scopo, si definisce la funzione vettoriale  $\underline{\Phi}: \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$  in modo tale che  $\underline{\Phi}(x_1, x_2, x_3)$  è la funzione costituita dai membri di sinistra delle equazioni che compongono il sistema (1) (cioè  $\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + \varepsilon \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $\Phi_2 = \text{etc.}$ ). La definizione degli elementi della successione  $\{\underline{x}_n\}_{n \geq 0}$  è *per induzione*, ovvero, a partire da  $\underline{x}_0$  si determina il generico elemento  $\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \underline{dx}_n \forall n \geq 0$ , con  $\underline{dx}_n \in \mathbf{R}^3$  soluzione del seguente sistema lineare

$$(5) \quad \mathcal{J}(\underline{x}_n) \underline{dx}_n + \underline{\Phi}(\underline{x}_n) = \underline{0},$$

dove  $\mathcal{J}(\underline{x})$  è la matrice Jacobiana associata alla funzione  $\underline{\Phi}$  (cioè la sua generica compo-

nente  $i, j$ -esima è tale che  $\mathcal{J}_{i,j} = \partial\Phi_i/\partial x_j$ , la quale è data dalla seguente formula (6)

$$\mathcal{J}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) & -1 + \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) & \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) \\ \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) & \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) & 1 + \varepsilon \cos(x_1 + x_2 + x_3) \\ \frac{x_1 f'(\varrho)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \mu \sin(x_1 - x_3) & \frac{x_2 f'(\varrho)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & -1 + \mu \sin(x_1 - x_3) \end{pmatrix},$$

dove ovviamente  $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e

$$(7) \quad f'(\varrho) = \varrho^4 + 32\varrho^3 + 22\varrho^2 - 24\varrho + \frac{81}{2}.$$

Questa è una trattazione troppo limitata per discutere le condizioni generali per le quali il metodo di Newton multidimensionale funziona efficacemente; quindi, basti sapere che quando i parametri  $\varepsilon$  e  $\mu$  sono *piccoli abbastanza*, allora *si può dimostrare* che la successione  $\{\underline{x}_n\}_{n \geq 0}$  è convergente e, detto  $\underline{x}_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}_n$ , sussiste l'equazione

$$\underline{\Phi}(\underline{x}_\infty) = \underline{0},$$

in altri termini, il limite  $\underline{x}_\infty$  della suddetta successione è *proprio soluzione* del sistema (1).

### Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola la soluzione del sistema di equazioni nonlineari (1) quando  $\varepsilon = \mu = 0$ . Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha come argomento la sola variabile  $\varrho$  e restituisce il valore di  $f(\varrho)$  così come è definito dall'equazione (2);
- (B) una *function* che determina la soluzione approssimata di un'equazione del tipo  $g(x) = 0$ , utilizzando *il metodo di bisezione* a partire da un intervallo  $[a, b]$  per una funzione  $g$  la cui espressione è determinata grazie a un *puntatore* a una *function esterna*; ovviamente, le variabili  $a, b$  e il suddetto *puntatore* a una *function esterna* sono gli unici argomenti della *function* qui richiesta;
- (C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
  - (C1) la chiamata della *function* descritta al precedente punto (B), in modo tale che gli estremi  $a$  e  $b$  siano posti rispettivamente uguali a 0 e 1 e che il *puntatore* riferisca alla *function* descritta al punto (A);
  - (C2) il calcolo della soluzione  $\underline{x}_0$  (la quale *deve* essere rappresentata con un'opportuno *vettore*) così come essa è definita dalla formula (3);
  - (C3) la stampa ordinata sul video dei valori di ciascuna componente del vettore  $\underline{x}_0$ .

### Un consiglio

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

### Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo della funzione vettoriale  $\underline{\Phi}$  e della matrice Jacobiana ad essa associata. A tal fine si può

procedere come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha come argomenti le variabili  $\underline{x}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\underline{y}$ , dove  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  sono *vettori* tridimensionali; tale *function* calcola il valore della prima componente di  $\underline{\Phi}$  (cioè il membro di sinistra della prima equazione del sistema (1)) e lo assegna alla prima componente del vettore  $\underline{y}$ , poi pone la seconda componente di  $\underline{y}$  uguale al membro di sinistra della seconda equazione del sistema (1), etc.;
- (B) si scriva una *function* che ha come argomenti le variabili  $\underline{x}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\mathcal{J}$ , dove  $\mathcal{J}$  è una matrice  $3 \times 3$ -dimensionale; ovviamente, al suo interno, tale *function* procede al calcolo di ciascuna componente in accordo alla definizione riportata in formula (6).
- (C) si modifichi la *main function* in modo tale che, a sua volta, essa contenga anche:
  - (C1) la chiamata delle *function* descritte al precedente punto (A), in modo da effettuare il calcolo di  $\underline{\Phi}(\underline{x}_0)$  quando  $\varepsilon = \mu = 0$ ;
  - (C2) la stampa ordinata sul video di ciascuna delle componenti del vettore  $\underline{\Phi}(\underline{x}_0)$ , così come è stato calcolato al precedente punto (C1);
  - (C3) la chiamata delle *function* descritte al precedente punto (B), in modo da effettuare il calcolo di  $\mathcal{J}(\underline{x}_0)$  quando  $\varepsilon = 0.5$  e  $\mu = 1$ ;
  - (C4) la stampa ordinata sul video di ciascuna delle componenti della matrice  $\mathcal{J}(\underline{x}_0)$ , così come è stata calcolata al precedente punto (C3).

### Nota

Si osservi che quando ciascuna delle componenti del vettore  $\underline{\Phi}(\underline{x}_0)$  è uguale a zero (a meno degli inevitabili errori di arrotondamento), si può assumere che il conseguimento dell'obiettivo 1 è stato *verificato numericamente*.

### Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da effettuare il calcolo della soluzione del sistema (1) con valori dei parametri  $(\varepsilon, \mu) \neq (0, 0)$ , applicando in modo opportuno il metodo di Newton multidimensionale. A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si includano tutte le *function* necessarie per il calcolo della soluzione di un sistema lineare del tipo  $A\underline{x} = \underline{b}$ , dove  $\underline{b}$  e  $\underline{x}$  sono vettori  $n$ -dimensionali e  $A$  una matrice  $n \times n$ -dimensionale;
- (B) si scriva una *function* che ha come argomento un *vettore* tridimensionale  $\underline{x}$  e restituisce la sua *norma euclidea*  $\|\underline{x}\|$ , che è definita come segue:

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j^2};$$

- (C) si scriva una *function* che ha come argomenti le variabili  $\underline{x}_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\underline{x}$ , dove  $\underline{x}$  all'inizio della chiamata ha il significato di "approssimazione iniziale", mentre alla fine dell'esecuzione di tale *function* essa contiene i valori della soluzione del sistema (1) (in seguito all'applicazione del metodo di Newton); questa *function* traduce in linguaggio di programmazione la procedura descritta ai seguenti punti (a)–(d);
  - (a) si ponga  $\underline{x} = \underline{x}_0$ ;
  - (b) si iterino le istruzioni descritte ai seguenti punti (c1)–(c5) in modo tale da costituire un ciclo, la condizione di permanenza all'interno del quale è descritta al punto (d);

- (c1) si calcoli il “vettore noto”  $\underline{b} = -\Phi(\underline{x})$  dell’equazione (5) grazie a una chiamata alla *function* richiesta al punto (A) dell’obiettivo 2;
- (c2) si calcoli la matrice  $A = \mathcal{J}(\underline{x})$  dell’equazione (5) grazie a una chiamata alla *function* richiesta al punto (B) dell’obiettivo 2;
- (c3) si calcoli la soluzione  $\underline{dx}$  dell’equazione lineare  $A\underline{dx} = \underline{b}$ , chiamando in modo opportuno una delle *function* descritte al precedente punto (A);
- (c4) si aggiorni il valore della soluzione (*approssimata*)  $\underline{x}$  ponendolo uguale a  $\underline{x} + \underline{dx}$ ;
- (c5) si ponga la quantità  $\sigma = \|\underline{dx}\|/\|\underline{x}\|$ , dove le *norme euclidee* sono calcolate grazie a delle opportune chiamate della *function* descritta al precedente punto (B);
- (d) se  $\sigma > 10^{-15}$  si ripeta l’esecuzione delle istruzioni descritte ai precedenti punti (c1)–(c5).
- (D) si modifichi la *main function* in modo tale che, a sua volta, essa contenga anche:
  - (D1) la chiamata della *function* descritta al precedente punto (C), in modo da effettuare il calcolo della soluzione del sistema (1) quando  $\varepsilon = 0.5$  e  $\mu = 1$ ;
  - (D2) la stampa ordinata sul video di ciascuna delle componenti della soluzione  $\underline{x}$  e del corrispondente vettore  $\underline{\Phi}(\underline{x})$ .

#### Obiettivo (finale) 4:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la “verifica numerica automatica” della correttezza della soluzione del sistema (1), utilizzando opportunamente le successioni di numeri pseudocasuali. A tal fine si proceda come segue:

- (A) all’interno della *main function*, si scriva un ciclo nel quale la variabile  $\varepsilon$  assume 10 valori pseudocasuali compresi nell’intervallo  $[0, 1]$ ; tale ciclo deve contenere dapprima un secondo ciclo come descritto ai seguenti punti (B)–(B1) e, inoltre,
  - (A1) la determinazione del massimo valore di  $\|\underline{\Phi}(\underline{x})\|$  “quando  $\varepsilon$  è fissato e  $\mu$  varia”;
  - (A2) (per ogni fissato  $\varepsilon$ ) la stampa sul video del valore di  $\varepsilon$  stesso e *in formato esponenziale* del massimo richiesto al precedente punto (A1);
- (B) nel secondo ciclo (che sta all’interno di quello descritto precedentemente al punto (A)) la variabile  $\mu$  assume 1000 valori pseudocasuali compresi nell’intervallo  $[-1, 1]$ ; a sua volta, tale ciclo deve contenere:
  - (B1) il calcolo della soluzione  $\underline{x}$  del sistema (1) in corrispondenza a ciascuna coppia  $(\varepsilon, \mu)$ .