Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
16 Settembre 2009

Tema d'esame: studio di alcune proprietà della funzione Γ di Eulero.

Descrizione del metodo di calcolo

La funzione Gamma, nota anche come funzione gamma di Eulero, è una funzione *meromorfa*, continua sui numeri reali positivi, che estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi, nel senso che per ogni numero intero non negativo n si ha

$$\Gamma(n+1) = n! \ . \tag{1}$$

La funzione Gamma è definita come segue:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1} \exp(-t) \ . \tag{2}$$

Si può estendere tale definizione in modo che abbia senso su tutto il piano complesso con esclusione dei numeri tali che la loro parte reale appartiene a $\mathbf{Z}_- \cup \{0\}$. Per semplicità, d'ora in poi supporremo che l'argomento della funzione Gamma sia reale positivo, in altri termini, consideriamo la definizione (2) solo per $z \in \mathbf{R}_+$.

Usando l'integrazione per parti, si può dimostrare che:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ . \tag{3}$$

Quest'ultima relazione (unita all'ovvia osservazione che $\Gamma(1) = 1$) consente di provare facilmente l'equazione (1). Inoltre, si osservi che il calcolo di (2) può essere ristretto a un intervallo del tipo $[n, n+1]$ $\forall\ n \in \mathbf{Z}_+$, proprio grazie al fatto che l'applicazione ripetuta della formula (3) consente poi di ottenere il valore di $\Gamma(z)$ $\forall\ z \in \mathbf{R}_+$.

Il valore esatto della funzione Γ è noto $\forall\ z \in \mathbf{Z}_+$ (come descritto in (1)) e in corrispondenza ad altri casi notevoli, come ad esempio:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ , \qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \ . \tag{4}$$

Un'altra proprietà importante della funzione gamma di Eulero assicura che il suo logaritmo può essere espresso come una serie, tanto è vero che sussiste l'uguaglianza

$$\Gamma(z) = \frac{\exp(-\gamma z)}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\exp(z/n)}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \right] \ , \tag{5}$$

dove il valore approssimato di γ (che è nota come la costante di Eulero–Mascheroni) è

$$\gamma = 0.5772156649015328606 \ . \tag{6}$$

Per quanto riguarda la derivata della funzione gamma di Eulero, è soddisfatta l'equazione

$$\Gamma'(z) = \psi(z)\Gamma(z) \ , \tag{7}$$

dove la funzione ψ (abitualmente nota come la funzione digamma) può essere definita nel modo seguente:

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z-1}{n(n+z-1)} \ . \tag{8}$$

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola il valore della funzione gamma di Eulero, come dato dalla definizione (2). Il programma deve contenere:

(A) una *function* che ha come argomento le variabili indipendenti t, z e restituisce il valore di $t^{z-1}\exp(-t)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nell'equazione (2) (se invece si intende trattare z "come *parametro*" si presti attenzione ad uno dei consigli seguenti);

(B) una *function* che consente di calcolare il valore dell'integrale definito di una generica funzione $f(x,z)$ rispetto alla variabile di integrazione x (mentre il valore di z resta fissato), utilizzando il *metodo del punto medio*;

(C) la *chiamata della function descritta al punto (B)*, in modo tale che il valore dell'integrale viene approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 200]$; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (B)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(D) la stampa sul video del valore della funzione gamma di Eulero quando l'argomento è 5/2, cioè $\Gamma(5/2)$;

(E) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra $\Gamma(5/2)$ e $3/4\,\sqrt{\pi}$; tale differenza dovrà essere dell'ordine di grandezza degli inevitabili errori numerici insiti nel metodo di calcolo, perché altrimenti sarebbe violata la seconda equazione riportata in (4).

Alcuni consigli
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Proprio allo scopo di semplificare il riutilizzo di pezzi di programma precedentemente scritti, si *può* scrivere la *function* descritta al punto (A) in modo che essa abbia solo la variabile t, ma avendo cura di definire una variabile di tipo *globale* destinata ad ospitare i valori del parametro z. Tale approccio può apparire più semplice, ma rischia di provocare confusione tra la variabile *globale*, quelle *locali* e gli *argomenti* delle *function*, pertanto è preferibile seguire alla lettera la descrizione dei precedenti punti (A)–(E) così come descritti in precedenza.

È sicuramente opportuno stabilire i valori *costanti* di π, del numero di sotto-intervalli di integrazione e di γ, per mezzo di tre direttive `#define`.

Il numero di sotto-intervalli dell'insieme di integrazione è stato fissato indicativamente a 100 000 e può essere aumentato al fine di diminuire l'errore numerico finale. Ovviamente, aumentando il numero di intervallini, il tempo necessario al computer per eseguire il programma potrebbe crescere in modo inaccettabile, specie se il processore non è molto potente e se vengono conseguiti anche i prossimi obiettivi.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, aggiungendo un nuovo algoritmo di calcolo della funzione gamma di Eulero, in modo tale da utilizzare l'equazione (5). A tal fine si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha come argomento la variabile indipendente z e restituisce il valore del secondo membro di (5); questa *function* deve includere il calcolo della quantità $\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \big[\exp(z/n) \,\big/\, (1+z/n)\big]$ in modo da tradurre in linguaggio di programmazione la procedura descritta ai seguenti punti (a)–(d);

(a) si ponga inizialmente $n = 1$ e $\alpha = 1$;

(b) si iterino le istruzioni descritte ai seguenti punti (c1)–(c3) in modo tale da costituire un ciclo, la condizione di permanenza all'interno del quale è descritta al punto (d);

- (c1) si ponga $\alpha_v = \alpha$;
- (c2) si ottenga il nuovo valore di α moltiplicando α_v per il termine generale della produttoria, cioè $\big[\exp(z/n) \,\big/\, (1+z/n)\big]$;
- (c3) si incrementi di 1 il valore di n ;

(d) se $\big|(\alpha - \alpha_v)/\alpha\big| > 10^{-10}$ si ripeta l'esecuzione delle istruzioni descritte ai precedenti punti (c1)–(c3);

(B) la *chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo tale da effettuare il calcolo del valore della funzione gamma di Eulero quando l'argomento è 1/2, cioè $\Gamma(1/2)$;

(C) la stampa sul video del valore di $\Gamma(1/2)$ e, *in formato esponenziale*, del valore assoluto della differenza tra $\Gamma(1/2)$ e $\sqrt{\pi}$; tale differenza dovrà essere dell'ordine di grandezza degli inevitabili errori numerici insiti nel metodo di calcolo (che in questo caso è poco efficiente), perché altrimenti sarebbe violata la prima equazione riportata in (4).

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, allo scopo di calcolare il valore della funzione $\Gamma(z)\ \forall\ z \in \mathbf{R}_+$, utilizzando ripetutamente la formula (3), in modo tale che il calcolo dell'integrale a secondo membro della definizione (2) viene effettivamente svolto solo quando $z \in [2,3]$, proprio perché in quell'intervallo il *metodo del punto medio* è particolarmente efficiente. A tal fine si proceda come segue:

(A) all'interno della *main function* si scriva: (I) l'*input* della variabile z (il cui valore deve essere strettamente positivo), (II) l'opportuna *chiamata della function descritta al seguente punto (B)*, (III) la stampa sul video del valore calcolato di $\Gamma(z)$;

(B) si scriva una *function* che ha come argomento la variabile indipendente z e restituisce il valore calcolato di $\Gamma(z)$; questa *function* può essere realizzata in modo da tradurre in linguaggio di programmazione la procedura descritta ai seguenti punti (a)–(d);

(a) si ponga inizialmente $\varrho = 1$; per evitare di fare confusione, introduciamo il simbolo $\bar{z} = z$, dove per z si intende il valore dell'argomento con cui la *function* è stata chiamata;

(b) se $\bar{z} < 2$, si iteri un breve ciclo *mentre* è verificato che $z < 2$; all'interno di questo ciclo, si compiono le seguenti operazioni: (b1) il valore di ϱ viene aggiornato, moltiplicandolo per il fattore $1/z$, (b2) si incrementa di 1 il valore di z ;

(c) se invece $\bar{z} > 3$, si iteri un breve ciclo *mentre* è verificato che $z > 3$; all'interno di questo ciclo, si compiono le seguenti operazioni: (c1) si decrementa di 1 il valore di z, (c2) il valore di ϱ viene aggiornato, moltiplicandolo per il fattore z;

(d) dopo che sono state eseguite le operazioni descritte a uno dei due punti (b) o (c) (o, eventualmente, nessuna di esse se la *function* è stata chiamata con un valore dell'argomento $\bar{z} \in [2,3]$), è sicuramente verificato che il valore attuale della variabile $z \in [2,3]$; pertanto, il valore richiesto di $\Gamma(\bar{z})$ (che altro non è che il "risultato della *function*") si ottiene moltiplicando ϱ per il fattore $\Gamma(z)$ (che viene infine calcolato esplicitamente con un'opportuna *chiamata della function relativa al punto (B) dell'obiettivo 1*);

Obiettivo (intermedio) 4:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 3, in modo tale da effettuare il calcolo della soluzione dell'equazione $\Gamma(z) = c$ (dove c è da considerarsi noto, mentre l'incognita è z), applicando in modo opportuno il metodo di Newton multidensionale. A tal fine, si consideri solo il caso con $c \geq 1$ e $z \geq 2$, poiché in $z \geq 2$ la funzione gamma di Eulero è monotona crescente e quindi la soluzione è unica. Si proceda come segue:

(A) all'interno della *main function* si scriva: (I) l'*input* della variabile c (il cui valore deve essere ≥ 1), (II) l'opportuna *chiamata della function descritta al seguente punto (C)*, (III) la stampa sul video del valore calcolato di z, (IV) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore della quantità $|\Gamma(z) - c|/c$, che essendo una specie di "errore relativo" permette di controllare se la soluzione trovata dell'equazione è corretta a meno degli inevitabili errori numerici (tale test da esito positivo, quando, *ovviamente*, il valore di $|\Gamma(z) - c|/c$ è quasi dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina*);

(B) si scriva una *function* che ha come argomento la variabile indipendente z e restituisce il valore calcolato di $\psi(z)$, così come definito in (8); si consiglia di troncare la serie che appare nel secondo membro di (8) all'N–esimo termine dove $N \geq \max\{2z\,,\,1000\}$;

(C) si scriva una *function* che ha come argomento la variabile indipendente c e restituisce il valore calcolato di z tale che $\Gamma(z) = c$; questa *function* può essere realizzata in modo da tradurre in linguaggio di programmazione la procedura descritta ai seguenti punti (a)–(d);

(a) si prenda come approssimazione iniziale della soluzione $z = n$, dove n è il più piccolo valore intero ≥ 2 tale che $c \leq (n-1)!$;

(b) si iterino le istruzioni descritte ai seguenti punti (c1)–(c5) in modo tale da costituire un ciclo, la condizione di permanenza all'interno del quale è descritta al punto (d);

- (c1) per evitare confusione (anche se non sarebbe strettamente necessario), si introduca il simbolo $\bar{z} = z$, dove per $\bar{z}$ si intende il valore dell'approssimazione calcolata "all'iterazione precedente del ciclo";
- (c2) si calcoli $\bar{\Gamma} = \Gamma(\bar{z})$, con un'opportuna *chiamata della function relativa al punto (B) dell'obiettivo 3*;
- (c3) si calcoli $\bar{\Gamma}' = \psi(\bar{z})\Gamma(\bar{z})$, con un'opportuna *chiamata della function relativa al punto (B) del presente obiettivo 4*;
- (c4) si ponga $\mathrm{d}z = (c - \bar{\Gamma})/\bar{\Gamma}'$;
- (c5) si aggiorni l'approssimazione z della soluzione di $\Gamma(z) = c$, ponendo $z = \bar{z} + \mathrm{d}z$;

(d) se $\left|\mathrm{d}z/z\right| > 10^{-10}$ si ripeta l'esecuzione delle istruzioni descritte ai precedenti punti (c1)–(c5).

Obiettivo (finale) 5:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di coppie di valori di x_i e $\Gamma(x_i)$, a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico della funzione $z \mapsto \Gamma(z)$. Inoltre, si compiano le operazioni necessarie al fine di visualizzare tale grafico, utilizzando il software **gnuplot**. A tali scopi si può procedere come segue:

(A) si esegua un ciclo all'interno del quale la variabile indipendente z assume tutti i valori appartenenti all'insieme $\{x_i\}_{i=0}^{500}$, dove $x_0 = 1/100$, $x_{500} = 6$, $x_i \in [x_0, x_{500}]$ e gli x_i costituiscono una "griglia di punti equidistanti", cioè $x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1}$ $\forall\ j = 1, \ldots, 499$; inoltre, per ciascun punto dell'insieme $\{x_i\}_{i=0}^{500}$ si calcoli il corrispondente valore di $\Gamma(x_i)$, con un'opportuna *chiamata della function relativa al punto (B) dell'obiettivo 3*);

(B) all'interno del suddetto ciclo si proceda alla stampa su **file**, in modo tale che su ciascuna delle sue righe compaia prima il valore di x_i e poi quello corrispondente di $\Gamma(x_i)$.

(C) si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) della funzione $z \mapsto \Gamma(z)$, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dal precedente punto (B).