Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
15 Luglio 2008

Tema d'esame: Calcolo del periodo T di oscillazione di un pendolo in funzione della semi-ampiezza α dell'oscillazione stessa; calcolo della funzione inversa $\alpha = \mathcal{A}(T)$ per mezzo del metodo di Newton.

Descrizione del metodo di calcolo

Quello del pendolo è un sistema meccanico estremamente elementare; ciò nonostante, esso costituisce la parte principale di alcuni modelli estremamente interessanti, che sono costantemente oggetto di studio. L'equazione che regola il moto del pendolo è del tipo

$$\ddot{x} = -\sin x \ ,$$

dove, per semplicità, i valori di alcuni parametri fisici sono stati posti tutti uguali a 1 . Si verifica abbastanza facilmente che esistono delle soluzioni $x(t)$ della suddetta equazione, tali che esse oscillano periodicamente tra due valori α e $-\alpha$ dell'angolo x , dove α è un numero reale compreso nell'intervallo $[0, \pi)$. Il periodo T di queste soluzioni può essere espresso in funzione della semi-ampiezza di oscillazione α , per mezzo di un opportuno integrale. Infatti, sia

$$\mathcal{K}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1 - (\beta \sin \vartheta)^2}} \tag{1}$$

il cosiddetto *integrale ellittico completo di prima specie*, allora sussiste la seguente relazione:

$$T = 4\mathcal{K}(\beta) \ , \qquad \text{con} \quad \beta = \sin(\alpha/2) \ . \tag{2}$$

Denotiamo con il simbolo $\mathcal{T}$ la funzione che associa la semi-ampiezza di oscillazione α al periodo T , cioè $T = \mathcal{T}(\alpha)$ con $\mathcal{T}(\alpha) = 4\mathcal{K}\big(\sin(\alpha/2)\big)$. Si osserva che $\mathcal{T}(\alpha)$ è ben definita per $\alpha \in [0, \pi)$, è monotona crescente, con tangente orizzontale nell'origine e un asintoto verticale in corrispondenza ad $\alpha = \pi$; inoltre, sul suo dominio di esistenza, essa ha sempre la concavità rivolta verso l'alto. Queste caratteristiche della funzione $\mathcal{T}$ sono evidenziate dal suo grafico (vedasi l'obiettivo 5). In queste condizioni, i valori della funzione inversa $\mathcal{T}^{-1}$ possono essere calcolati numericamente, utilizzando il metodo di Newton così come descritto qui di seguito.

Si consideri un fissato valore $T \geq 2\pi$ del periodo, di cui vogliamo determinare la corrispondente semi-ampiezza di oscillazione $\alpha = \mathcal{A}(T)$, dove $\mathcal{A}$ è la funzione inversa di $\mathcal{T}$; in altre parole, $\forall\ \alpha \in [0, \pi)$, sussiste l'uguaglianza $\alpha = \mathcal{A}\big(\mathcal{T}(\alpha)\big)$. Sia α_0 un'approssimazione iniziale tale che

$$\alpha_0 > \mathcal{A}(T) \ ; \tag{3}$$

allora, possiamo generare una nuova (e migliore) approssimazione α_n con il seguente algoritmo. Si ponga inizialmente

$$\alpha_n = \alpha_0 \ ; \tag{4}$$

successivamente, si aggiorni il valore della “vecchia approssimazione”, definendo

$$\alpha_v = \alpha_n \ , \tag{5}$$

e si calcolino le seguenti quantità

$$\beta = \sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right) \ , \qquad T_v = 4\mathcal{K}(\beta) \ , \quad \Delta\alpha = \frac{T - T_v}{4\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{K}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_v)} \ , \tag{6}$$

dove la derivata dell'integrale ellittico di prima specie in funzione della semi-ampiezza di oscillazione è data da

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{K}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_v) = \frac{\cos\left(\alpha_v/2\right)}{2\beta}\left(\frac{\mathcal{E}(\beta)}{1-\beta^2} - \mathcal{K}(\beta)\right) \ , \tag{7}$$

quando il valore di β è sempre quello imposto dalla prima equazione di (6) e $\mathcal{E}(\beta)$ è l'*integrale ellittico completo di seconda specie*, ovvero

$$\mathcal{E}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta \, \sqrt{1 - (\beta \sin\vartheta)^2} \ . \tag{8}$$

La nuova approssimazione sarà quindi (ri)definita come segue

$$\alpha_n = \alpha_v + \Delta\alpha \ . \tag{9}$$

Qualora α_n non sia considerata un'approssimazione buona abbastanza del valore di $\alpha = \mathcal{A}(T)$, si procede al ricalcolo delle espressioni contenute nelle formule (5)–(9), finché non si è soddisfatti.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola il valore del periodo T, dato dalla formula (2), quando la semi-ampiezza di oscillazione è $\alpha = \pi/2$. Il programma deve contenere:

(a) una *function* che ha come argomento la sola variabile indipendente ϑ e restituisce il valore di $1/\sqrt{1-(\beta\sin\vartheta)^2}$, cioè la funzione integranda che compare nell'equazione (1) (quanto al parametro β, si presti attenzione ai consigli seguenti);

(b) una *function* che consente di calcolare il valore dell'integrale definito di una generica funzione $f(x)$, grazie al *metodo del punto medio*;

(c) la *chiamata della function descritta al punto (b)*, in modo tale che il valore dell'integrale viene approssimato utilizzando $10\,000$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (b)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (a);

(d) la stampa sul video del valore del periodo richiesto, cioè $T = \mathcal{T}(\pi/2)$.

Alcuni consigli
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Proprio allo scopo di semplificare il riutilizzo di pezzi di programma precedentemente scritti, si consiglia di definire una variabile di tipo *globale* destinata ad ospitare i valori del parametro β.

È sicuramente opportuno stabilire i valori *costanti* di π e del numero di sotto-intervalli di integrazione, per mezzo di un paio di direttive `#define`.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo di un'approssimazione iniziale α_0 che soddisfa la disuguaglianza (3), per un dato valore del periodo T. A tal fine si può procedere come segue:

(a) si effettui l'input da tastiera di un valore di $T \geq 2\pi$;

(b) si scriva una *function* che ha come argomento il valore di T ed effettua le operazioni descritte ai seguenti punti (b1)–(b6) (**senza** utilizzare l'istruzione `goto`);

- (b1) si ponga $j = 0$;
- (b2) si incrementi di 1 il valore di j e si ponga $c = 1 - 2^{-j}$;
- (b3) se $c = 1$, si scriva sul video un messaggio di errore (che spiega che non è possibile calcolare una buona approssimazione iniziale) e si interrompa immediatamente l'esecuzione del programma;
- (b4) si ponga $\alpha_0 = c\pi$, quindi si calcoli il corrispondente valore del periodo $T_0 = 4\mathcal{K}\big(\sin(\alpha_0/2)\big)$, in modo analogo a quanto richiesto dall'obiettivo 1;
- (b5) qualora $T_0 \leq T$, si ritorni al punto (b2);
- (b6) si restituisca al chiamante il valore di α_0 (si noti che tale valore è il primo per cui si è verificato che $T_0 > T$).

(c) si stampi sul video il valore di α_0 così ottenuto.

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da completare il calcolo della semi-ampiezza di oscillazione α corrispondente al valore del periodo T, che è stato introdotto al punto (a) dell'obiettivo 2. A tal fine si può procedere come segue:

(a) si scriva una *function* che ha come argomento la sola variabile indipendente ϑ e restituisce il valore della funzione integranda che compare nell'equazione (8);

(b) si scriva una *function* che ha come unico argomento α_v e restituisce il corrispondente valore dell'espressione che compare a secondo membro dell'equazione (7);

(c) si scriva una *function* che ha tre argomenti: i valori del periodo T, dell'approssimazione iniziale α_0 e di un errore di tolleranza σ; tale *function* procede al calcolo della semi-ampiezza $\alpha = \mathcal{A}(T)$, utilizzando il metodo di Newton, in modo tale da effettuare la definizione iniziale (4) e da eseguire ripetutamente le operazioni descritte nelle formule (5)–(6) e (9), *mentre è verificata la condizione* $|\Delta\alpha| > \sigma$;

(d) si effettui la chiamata della *function* descritta al punto (c), in modo tale da attribuire 10^{-12} come valore della variabile σ;

(e) si stampi sul video il valore di α restituito dalla *function* descritta al punto (c).

Obiettivo (intermedio) 4:
al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di coppie di valori di α_i e T_i, a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico della funzione $\mathcal{T}(\alpha)$. A tal fine si può procedere come segue:

(a) si esegua un ciclo all'interno del quale la semi-ampiezza α assume tutti i valori appartenenti all'insieme $\{i\pi/1000\}_{i=0}^{999}$ e si calcoli il corrispondente valore del periodo $T = \mathcal{T}(\alpha)$, in modo analogo a quanto richiesto dall'obiettivo 1;

(b) all'interno del suddetto ciclo si proceda alla stampa su **file**, in modo tale che su ciascuna delle sue righe compaia prima il valore di α , poi quello corrispondente di T e entrambi devono essere scritti *in formato esponenziale*. Ad esempio, il file richiesto deve essere strutturato in modo simile al file `pendolo.out` (che è reperibile in rete).

Obiettivo (finale) 5:
si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) della funzione $\mathcal{T}(\alpha)$, in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dall'obiettivo 4.