Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
20 Febbraio 2009

Tema d'esame: Calcolo numerico degli integrali ellittici completi di prima e seconda specie.

Descrizione del metodo di calcolo

Gli integrali ellittici sono stati originariamente introdotti al fine di calcolare la lunghezza di un arco di ellisse. Successivamente, essi sono stati utilizzati per risolvere vari problemi in matematica e in fisica, come ad esempio il calcolo del periodo di oscillazione di un pendolo.

L'*integrale ellittico completo di prima specie* è definito dalla seguente equazione:

$$\mathcal{K}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-(\beta\sin\vartheta)^2}} \; . \tag{1}$$

L'*integrale ellittico completo di seconda specie* è invece dato dalla seguente formula:

$$\mathcal{E}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta \, \sqrt{1-(\beta\sin\vartheta)^2} \; . \tag{2}$$

In entrambe le equazioni (1)–(2), l'argomento β è compreso nell'intervallo $(-1, 1)$.

In corripondenza a particolari argomenti, i valori degli integrali ellittici sono noti. Ad esempio, si verifica che

$$\mathcal{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(1/4\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}} \tag{3}$$

e

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^{3/2}}{\left[\Gamma\left(1/4\right)\right]^2} + \frac{\left[\Gamma\left(1/4\right)\right]^2}{8\sqrt{\pi}} \; , \tag{4}$$

dove $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ e, in questo particolare caso,

$$\Gamma\left(1/4\right) = 3.6256099082219083119 \; . \tag{5}$$

Entrambi gli integrali ellittici completi, definiti in (1)–(2), possono essere espressi tramite delle espansioni in serie; infatti, sussistono le equazioni seguenti:

$$\mathcal{K}(\beta) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\beta^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\beta^4 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\beta^{2n} + \ldots\right\} \tag{6}$$

e

$$\mathcal{E}(\beta) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\beta^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\beta^4}{3} - \ldots - \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{\beta^{2n}}{2n-1} - \ldots\right\} \; , \tag{7}$$

dove il simbolo !! indica il cosiddetto "semifattoriale", cioè $(2n-1)!! = \prod_{j=1}^{n}(2j-1)$ e $(2n)!! = \prod_{j=1}^{n}(2j)$.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola il valore dell'integrale ellittico completo di prima specie, come dato dalla formula (1). Il programma deve contenere:

(a) una *function* che ha come argomento la sola variabile indipendente ϑ e restituisce il valore di $1/\sqrt{1-(\beta\sin\vartheta)^2}$, cioè la funzione integranda che compare nell'equazione (1) (quanto al parametro β , si presti attenzione ai consigli seguenti);

(b) una *function* che consente di calcolare il valore dell'integrale definito di una generica funzione $f(x)$, grazie al *metodo del punto medio*;

(c) la *chiamata della function descritta al punto (b)*, in modo tale che il valore dell'integrale viene approssimato utilizzando $10\,000$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (b)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (a);

(d) la stampa sul video del valore dell'integrale ellittico completo di prima specie quando l'argomento è $1/\sqrt{2}$, cioè $\mathcal{K}(1/\sqrt{2})$;

(e) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra $\mathcal{K}(1/\sqrt{2})$ come calcolato al punto (d) e il membro di destra dell'equazione (3), dove $\Gamma(1/4)$ è sostituito dal valore riportato in (5).

Alcuni consigli
È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Proprio allo scopo di semplificare il riutilizzo di pezzi di programma precedentemente scritti, si consiglia di definire una variabile di tipo *globale* destinata ad ospitare i valori del parametro β .

È sicuramente opportuno stabilire i valori *costanti* di π , del numero di sotto-intervalli di integrazione e di $\Gamma(1/4)$, per mezzo di tre direttive `#define` .

Nel punto (e), si richiede di stampare la differenza (in valore assoluto) di due quantità che *devono essere uguali tra loro.* Pertanto, questo non è altro che un test riguardante l'esattezza dei calcoli effettuati; si deve ritenere che tale test ha dato esito positivo, quando il valore stampato è dell'ordine dell'*errore di macchina.*

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo del valore dell'integrale ellittico completo di seconda specie, come dato dalla formula (2). Il procedimento è perfettamente analogo a quanto descritto nell'obiettivo 1, ma per completezza viene (ri)descritto qui di seguito. Il programma deve quindi contenere anche:

(a) una *function* che ha come argomento la sola variabile indipendente ϑ e restituisce il valore di $\sqrt{1-(\beta\sin\vartheta)^2}$, cioè la funzione integranda che compare nell'equazione (2);

(b) la *chiamata della function descritta al punto (b) dell'obiettivo 1*, in modo tale che il valore dell'integrale viene approssimato utilizzando $10\,000$ sotto-intervalli dell'insieme di integrazione; inoltre, la suddetta *chiamata della function relativa al punto (b) dell'obiettivo 1* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (a);

(c) la stampa sul video del valore dell'integrale ellittico completo di seconda specie quando l'argomento è $1/\sqrt{2}$, cioè $\mathcal{E}(1/\sqrt{2})$;

(d) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra $\mathcal{E}(1/\sqrt{2})$ come calcolato al punto (c) e il membro di destra dell'equazione (4), dove $\Gamma(1/4)$ è sostituito dal valore riportato in (5).

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da poter effettuare il calcolo *simultaneo* dei valori degli integrali ellittici completi di prima e seconda specie, per mezzo delle loro espansioni in serie, descritte nelle equazioni (6)–(7). A tal fine si proceda come segue:

(a) si scriva una *function* che ha come argomento due sole variabili, le quali alla fine dell'esecuzione di questa stessa *function* conterranno i valori di $\mathcal{K}(\beta)$ e $\mathcal{E}(\beta)$, calcolati tramite espansione in serie, utilizzando l'algoritmo descritto ai seguenti punti (d1)–(d10); si ricordi che se il valore di β viene memorizzato in una variabile di tipo *globale*, esso *non deve essere passato in argomento* alla suddetta *function*;

(b) s'includa un'opportuna *chiamata della function descritta al punto (a)*, in modo tale che essa effettui il calcolo dei valori degli integrali ellittici completi di prima e seconda specie quando l'argomento è $1/\sqrt{2}$;

(c) si stampino sul video i valori di $\mathcal{K}(1/\sqrt{2})$ e $\mathcal{E}(1/\sqrt{2})$, calcolati come indicato al punto (b).

Per quanto riguarda la *function* richiesta al punto (a), precisiamo che, per fissare le idee, $\mathcal{K}(\beta)$ e $\mathcal{E}(\beta)$ saranno (quasi) uguali ai valori "finali" ospitati in due variabili, dette K e E . Inoltre, verranno utilizzate anche alcune variabili "temporanee", cioè il contatore j , il fattore x e la sua potenza $potx$, il coefficiente c , le approssimazioni "al passo precedente" $\bar{K}$ e $\bar{E}$. La *function* richiesta al punto (a) traduce in linguaggio **C** il seguente algoritmo di calcolo:

(d1) si ponga inizialmente $x = \beta^2$, $K = 1$, $E = 1$, $j = 0$, $potx = 1$, $c = 1$;

(d2) si eseguano le seguenti istruzioni (d3)–(d8), mentre è verificata la condizione di permanenza nel ciclo che verrà enunciata al punto (d9);

- (d3) si aggiornino i valori delle approssimazioni "al passo precedente", ponendo $\bar{K} = K$ e $\bar{E} = E$;
- (d4) si incrementi di due il valore del contatore j ;
- (d5) si aggiorni il valore di $potx$, moltiplicandolo per x ;
- (d6) si aggiorni il valore del coefficiente c , moltiplicandolo per $[(j-1)/j]^2$;
- (d7) si aggiorni il valore di K , aggiungendogli il termine $c \cdot potx$;
- (d8) si aggiorni il valore di E , sottraendogli il termine $c \cdot potx/(j-1)$;

(d9) qualora $K \neq \bar{K}$ oppure $E \neq \bar{E}$ si rieseguano le istruzioni descritte ai punti (d3)–(d8), altrimenti si vada al seguente punto (d10);

(d10) si esegua l'"aggiornamento finale" dei valori di K ed E , moltiplicando entrambi per il fattore $\pi/2$.

Per confronto con le formule (6)–(7), non dovrebbe essere difficile rendersi conto che l'algoritmo descritto ai precedenti punti (d1)–(d10) fornisce proprio una buona approssimazione di $\mathcal{K}(\beta)$ e $\mathcal{E}(\beta)$.

Obiettivo (finale) 4:
al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga un "confronto automatico" dei due metodi di calcolo dell'integrale ellittico completo di prima specie, allo scopo di verificare la correttezza di entrambi. A tal fine si utilizzi opportunamente una successione di numeri pseudocasuali, procedendo come segue:

(a) si effettui l'*input da tastiera* del valore massimo $\bar{\beta}$, che *deve essere soggetto alla limitazione* $0 \leq \bar{\beta} < 1$;

(b) si esegua per 1 000 volte un ciclo all'interno del quale β viene definito uguale a un valore pseudocasuale [*] compreso nell'intervallo $[0, \bar{\beta}]$;

  (c) all'interno del ciclo introdotto al precedente punto (b), si calcoli l'"errore" per ciascun β, ovvero il valore assoluto della differenza esistente tra i due valori ottenuti di $\mathcal{K}(\beta)$, i quali sono stati calcolati, in un primo tempo, come descritto nell'obiettivo 1 e, nel secondo caso, come nell'obiettivo 3;

(d) si stampi sul video *in formato esponenziale* l'"errore" massimo tra quelli determinati al punto (c) e il corrispondente valore di β.

[*] Ovviamente, il valore di β cambia tra un'esecuzione e l'altra del ciclo.