Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
1 Febbraio 2008

Tema d'esame: Calcolo di alcune successioni associate all'espansione in serie di una funzione analitica.

Descrizione del metodo di calcolo

Si consideri la funzione

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{1-x}}\right) \ . \tag{1}$$

Si può dimostrare che

$$\Lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^i \qquad \forall\ |x| < 0.2 \ , \tag{2}$$

dove 0.2 è il raggio di convergenza dell'espansione in serie scritta nella formula precedente e la successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ è definita come segue:

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad\qquad \lambda_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \lambda_{i-j} \quad \forall\ i \geq 2 \ . \tag{3}$$

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che ha lo scopo di calcolare e visualizzare un numero **finito** di elementi della successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, come definita nella formula (3). Il programma deve contenere:

(a) una *function* che restituisce un vettore al cui interno sono contenuti i valori di λ_i $\forall\ 1 \leq i < N$, dove N è un numero fissato;

(b) la stampa sul video dei primi 8 elementi della successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Alcuni consigli

(i) È opportuno attribuire il valore di N grazie a una direttiva `#define` . Tale valore di N non deve essere troppo piccolo, altrimenti alcune delle richieste ai punti successivi sarebbero poco significative, ma soprattutto non deve essere troppo grande. Infatti, la successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ cresce in modo estremamente rapido e il calcolo di un suo termine corrispondente a un indice i troppo elevato determinerebbe degli errori di *overflow.* Per tagliare la testa al toro, si scelga N compreso tra 100 e 400 .

(ii) Sebbene tutti gli elementi $\lambda_i \in \mathbf{N}$, è bene definire gli elementi del vettore che ne contiene i valori come delle variabili `double` e non come `int` (o anche `long int`); altrimenti, i suddetti limiti su N sarebbero assolutamente imprudenti.

(iii) Al fine di controllare la correttezza della function richiesta al punto (a), è bene confrontare gli elementi della successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ stampati sul video, con quelli che *potrebbero* "calcolarsi a mano", utilizzando ripetutamente le formule in (3), ovvero:

$$\lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2\,,\ \lambda_3 = 5\,,\ \lambda_4 = 15\,,\ \lambda_5 = 51\,,\ \lambda_6 = 188\,,\ \lambda_7 = 731\,,\ \lambda_8 = 2950\ .$$

Obiettivo (intermedio) 2:
si modifichi il programma descritto all'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il confronto tra i due metodi di calcolo $\Lambda(x)$: come indicato nella definizione (1) e attraverso l'espansione in serie definita dalle equazioni (2) e (3).
Oltre a ciò che era già stato richiesto dall'obiettivo 1, il programma deve contenere:
(a) l'*input* di un numero x che sia compreso nell'intervallo $(-0.2\,,\,0.2)$;
(b) una *function* che, dato un valore della variabile x, restituisce $\Lambda(x)$ calcolato secondo la formula (1);
(c) una *function* che, dati un valore della variabile x e un vettore i cui elementi sono uguali a $\lambda_i\ \forall\ 1 \le i < N$, restituisce il valore di $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i x^i$;
(d) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra i valori calcolati di $\Lambda(x)$ grazie, rispettivamente, alle *function* descritte ai punti (b) e (c).

Obiettivo (intermedio) 3:
si consideri anche la successione (a due indici) $\{\nu_{i,j}\}_{0\le i\le j\,,\,j\in\mathbf{N}}$, la cui definizione iterativa è data dalle due seguenti formule.

$$(4)\qquad \forall\ j \ge 0\ :\quad \nu_{0,j} = 1\ ,$$

$$(5)\ \ \forall\ i \ge 1 \quad \text{e} \quad \forall\ j > i\ :\quad \begin{cases} \nu_{i,i} = \nu_{i-1,i} \\ \ \ m = \lfloor (j-1)/i \rfloor \\ \nu_{i,j} = \nu_{i-1,j} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m-1} \left(\nu_{i,i}\right)^l \nu_{i-1,j-il} + \left(\nu_{i,i}\right)^m \nu_{j-im,j-im} \end{cases} ,$$

dove si ricordi che $\lfloor\cdot\rfloor$ significa "il massimo intero tra i numeri minori uguali dell'argomento".
Si modifichi il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere
(a) una *function* che restituisce un array al cui interno sono contenuti i valori di $\nu_{i,j}$ $\forall\ 0 \le i \le j < N$, calcolati utilizzando le definizioni (4) e (5);
(b) la stampa sul video dei primi 8 elementi "diagonali" della successione $\{\nu_{i,j}\}_{0\le i\le j\,,\,j\in\mathbf{N}}$, ovvero $\nu_{1,1}\,,\ \ldots\ ,\ \nu_{8,8}$.

Alcuni consigli
(i) Per quanto riguarda il parametro N e il tipo di variabile da assegnare agli elementi dell'array che devono contenere i valori di $\{\nu_{i,j}\}_{0\le i\le j<N\,,\,j\in\mathbf{N}}$, i consigli (i) e (ii) relativi all'obiettivo 1 sono da ritenersi ancora validi.
(ii) Al fine di controllare la correttezza della function richiesta al punto (a), è bene confrontare i valori di $\nu_{1,1}\,,\ \ldots\ ,\ \nu_{8,8}$ che sono stati stampati sul video, con quelli che *potrebbero* "calcolarsi a mano", utilizzando ripetutamente le formule (4) e (5), ovvero:

$$\nu_{1,1} = 1\,,\ \nu_{2,2} = 2\,,\ \nu_{3,3} = 5\,,\ \nu_{4,4} = 13\,,\ \nu_{5,5} = 38\,,\ \nu_{6,6} = 111\,,\ \nu_{7,7} = 354\,,\ \nu_{8,8} = 1112\ .$$

Obiettivo (intermedio) 4:
Si può dimostrare che $\nu_{i,j} \leq \lambda_j \; \forall \; 0 \leq i \leq j \, , \; j \geq 1$. Al fine di verificare *numericamente* (e, quindi, in modo non rigoroso in senso matematico) l'affermazione precedente, possiamo procedere come segue.
Si modifichi il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da aggiungere

(a) un ciclo sull'indice i , all'interno del quale vengono confrontati i valori di $\nu_{i,i}$ e λ_i : se $\nu_{i,i} > \lambda_i$, si stampi un messaggio nel quale si segnala questo fatto anomalo *(che non dovrebbe verificarsi!)* e il corrispondente valore di i al quale ciò si è manifestato; se, invece, alla fine del ciclo è sempre accaduto che $\nu_{i,i} \leq \lambda_i \; \forall \; 1 \leq i < N$, si scriva un altro messaggio che segnala che tutto si è svolto secondo le aspettative.

Obiettivo (finale) 5:

(a) al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** dei valori di $\log \nu_{i,i}$ e $\log \lambda_i \; \forall \; 1 \leq i < N$. Più precisamente, su ciascuna delle righe del file deve essere scritto prima il valore di i , poi il valore di $\log \nu_{i,i}$ e, infine, quello di $\log \lambda_i$; questi ultimi due numeri devono essere stampati *in formato esponenziale.* Ad esempio, il file richiesto deve essere strutturato in modo simile al file `serie_pot.out` (che è reperibile in rete).

Altre informazioni aggiuntive (per soddisfare alcune curiosità che vanno al di là della prova d'esame)

(A) Dal punto di vista dell'analisi matematica, il procedimento naturale è il seguente:
   (I) si osserva che la successione $\{\nu_{i,j}\}_{0 \leq i \leq j < N \, , \, j \in \mathbf{N}}$ è crescente rispetto all'indice $i = 0, \ldots, j \; \forall$ j fissato.
   (II) si dimostra che la successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ è maggiorante per $\{\nu_{i,j}\}_{0 \leq i \leq j < N \, , \, j \in \mathbf{N}}$, più precisamente, $\nu_{i,j} \leq \nu_{j,j} \leq \lambda_j \; \forall \; 0 \leq i \leq j \, , \; j \geq 1$.
   (III) Siccome $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ è la successione associata allo sviluppo in serie di potenze della funzione $\Lambda(x)$, allora vale l'uguaglianza $\lambda_s = \frac{1}{s!} \frac{\mathrm{d}^s \Lambda}{\mathrm{d}x^s}(0)$.
   (IV) Applicando induttivamente la disuguaglianza di Cauchy per le derivate di funzioni analitiche, si dimostra che

$$\lambda_s \leq \frac{5^s}{2} \; . \tag{6}$$

(B) A supporto del procedimento analitico discusso al precedente punto (A), si può tracciare il grafico dell'andamento delle successioni $\{\nu_{i,i}\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, in scala logaritmica. Tale grafico è riportato nel file `serie_pot.jpg` (reperibile in rete), il quale è stato prodotto utilizzando il programma *gnuplot.* Si osserva immediatamente che:
   (V) la crescita delle due successioni è di tipo geometrico;
   (VI) la ragione dell'andamento geometrico relativo alla successione $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ è circa 5 , in accordo con la maggiorazione riportata in (6).