**Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I**
**per il corso di laurea in Matematica**
**2 Luglio 2007**

**Tema d'esame:** Calcolo di una famiglia di integrali definiti, procedendo per parti.

**Descrizione del metodo di calcolo**

Si consideri la seguente famiglia di integrali definiti

$$(1) \qquad I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, G_n(x) \ , \qquad \text{dove} \qquad G_n(x) = x^n \exp\left(-x^2\right) \qquad \text{e} \qquad n \geq 0 \ .$$

Integrando per parti in modo opportuno, si ottiene la seguente *formula ricorsiva*:

$$(2) \qquad I_n = [(n-1)I_{n-2}]/2 \ , \qquad \forall\ n \geq 2 \ ,$$

la quale consente di calcolare tutti i valori di $I_n$ in (1), quando è unita alle due equazioni

$$(3) \qquad I_0 = \sqrt{\pi/4} \qquad \text{e} \qquad I_1 = 1/2 \ ,$$

che fungono da *condizioni di innesco della ricorsione.*

**Obiettivo (intermedio) 1:**

si scriva un programma in linguaggio **C** che ha il solo scopo di verificare (numericamente) che il valore di $I_0$ è proprio quello riportato in formula (3). Il programma deve contenere:

(a) una *function* che consente di calcolare il valore dell'integrale definito di una generica funzione $f(x)$, grazie al *metodo del punto medio*;

(b) la chiamata della *function* descritta al punto (a); tale chiamata deve contenere i seguenti valori degli argomenti: gli estremi di integrazione siano uguali a $0$ e $100$, mentre il numero dei sotto–intervalli deve essere uguale a $10\,000$.

(c) la stampa sul video del valore di $I_0$ e, *in formato esponenziale*, del valore assoluto della differenza tra il valore di $I_0$ dato in formula (3) e quello calcolato grazie alla chiamata della *function* descritta ai punti (a) e (b).

**Alcuni consigli**

Sia per quanto riguarda l'obiettivo 1 che i seguenti, è sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle funzioni o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

**Obiettivo (intermedio) 2:**

si modifichi il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale che sia possibile calcolare il valore di $I_n$, definito in (1), per un qualsiasi valore di $n \geq 0$. Oltre a ciò che era già stato richiesto dall'obiettivo 1, il programma deve contenere:

(a) l'input da tastiera di un valore *non negativo* dell'indice $n$;

(b) una *function* ricorsiva che, dato il valore di $n$, restituisce il valore di $I_n$, calcolato utilizzando le formule (2)–(3);

(c) la stampa sul video del valore di $I_n$.

**Obiettivo (intermedio) 3:**

si modifichi ulteriormente il programma in modo tale che sia possibile calcolare il seguente integrale definito

$$(4)\qquad \mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathcal{P}(x) G_0(x)\ , \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{P}(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{gr}(\mathcal{P})} c_n x^n\ .$$

Oltre a ciò che era già stato richiesto dagli obiettivi 1 e 2, il programma deve contenere:

(a) la definizione del generico polinomio $\mathcal{P}(x)$ *(per cui non è richiesto l'input da tastiera)*; tale definizione deve essere realizzata per mezzo di una variabile intera che contiene il valore di $\mathrm{gr}(\mathcal{P})$ e di un vettore (che, *per semplicità*, sia anch'esso di interi) contenente i valori di $c_0\,, \ldots, c_n$ ;

(b) una *function* che, ricevuti i valori del grado del polinomio $\mathcal{P}(x)$ e dei suoi coefficienti, effettua le operazioni descritte ai seguenti punti (c)–(n);

  (c) calcola il valore dell'integrale definito che appare in (4), utilizzando la formula seguente: $\mathcal{I} = \sum_{n=0}^{\mathrm{gr}(\mathcal{P})} c_n I_n$ , dove $I_n$ si ottiene come descritto nell'obiettivo 2.

  (d) stampa in modo esteticamente apprezzabile la funzione integranda, rispettando le esigenze descritte ai seguenti punti (e)–(m);

  (e) i termini del polinomio siano stampati in ordine di grado *decrescente*;

  (f) ciascun termine del polinomio sia stampato solo se il corrispondente coefficiente è diverso da zero;

  (g) ogni coefficiente positivo sia stampato preceduto dal segno $+$ , quando esso non è relativo al termine di grado massimo;

  (h) la stampa del generico coefficiente $c_n$ sia omessa quando $c_n = 1$ e $n > 0$ ;

  (i) se $c_n = -1$ e $n > 0$ , si stampi solamente il segno **-** anziché il valore di $c_n$ ;

  (j) ogni coefficiente sia seguito dal carattere **x** quando il corrispondente esponente è maggiore di 0;

  (k) dopo il carattere **x** , si stampi ˆ e il valore dell'esponente solo se esso è maggiore di 1;

  (l) se $\mathrm{gr}(\mathcal{P}) > 0$ , si stampi il polinomio stesso tra parentesi tonde;

  (m) alla fine della scrittura del polinomio, si stampi **G_0(x)** e si vada a capo riga;

  (n) si stampi il valore di $\mathcal{I}$ , calcolato come descritto al punto (c).

**Alcuni consigli**

Al fine di evitare l'allocazione dinamica della memoria, si può definire il vettore dei coefficienti del polinomio in modo che la sua dimensione sia fissa e abbastanza grande da contenere tutti i polinomi che al massimo hanno grado (ad esempio) uguale a 10 .

Esempi di stampe di funzioni integrande, che rispondono alle suddette richieste, sono visibili nel file `per_parti.out` (che è reperibile in rete).

**Obiettivo (finale) 4:**

(a) al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la lettura da file dei valori che caratterizzano un numero imprecisato di polinomi, tale file deve essere strutturato in modo simile al file `per_parti.inp` (che è reperibile in rete), dove compaiono alcune coppie di righe: nella prima di esse appare solo il grado del polinomio e nella seconda tutti i coefficienti separati l'uno dall'altro con uno spazio;

(b) per ciascuno dei polinomi letti dal file, si richiami la *function* descritta al punto (b) dell'obiettivo 3.