SISTEMI HAMILTONIANI

CARLANGELO LIVERANI

Questa nota contiene un condensato estremo della teoria delle equazioni di Hamilton. Il suo proposito è quello di introdurre alla teoria e fornire alcuni fatti basilari. Per uno sviluppo organico e completo di questo argomento si consulti un libro di Meccanica (due ottimi esempi sono [2], più fisico ed intuitivo, e [1] più matematico e sofisticato). In particolare, nel seguito considererò sempre ODE su $\mathbb{R}^d$ sebbene la teoria naturale sia su varietà.

1. Lagrangiane

Si ricordi dal corso di Meccanica che per Lagrangiana si intende una funzione di due variabili $\mathcal{L}(z, y)$, $z, y \in \mathbb{R}^d$ che determina le equazioni del moto per un sistema meccanico in base alla seguente formula

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(q, \dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(q, \dot{q}) = 0$$

La forma più comune di Lagrangiana è data da una funzione del tipo

$$\mathcal{L}(z, y) = \frac{1}{2}\langle y, My\rangle - W(z)$$

dove M è una matrice $d \times d$ simmetrica e definita positiva[1] e $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. In questo caso le equazioni del moto si scrivono come[2]

$$M\ddot{q} = -\nabla W(q).$$

In questo caso è naturale riscrivere le equazioni come un sistema di equazioni del primo ordine introducendo la variabile $p = M\dot{q}$. Si ottime così il sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}p \\ \dot{p} &= -\nabla W(q). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque una equazione del primo ordine su $\mathbb{R}^{2d}$ con campo vettoriale $V(q, p) = (M^{-1}p, -\nabla W(q))$. Sia ϕ_t il flusso associato alle equazioni differenziali di cui sopra. Mostreremo che tale flusso ha molte interessanti proprietà che a prima vista non sono visibili.

Come primo fatto notiamo che $\operatorname{div} V = 0$.

Date: April 12, 2022.

[1] Ovvero $\langle y, My\rangle > 0$ per ogni $y \neq 0$.

[2] Queste non sono altro che le ben note equazioni di Newton.

2. Flussi che preservano il volume

Si consideri una equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x} = V(x) \tag{2.1}$$

Teorema 2.1 (Liouville). *Se* $\operatorname{div} V = 0$ *allora il flusso associato a* (2.1) *preserva il volume.*

Proof. Data una regione regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, la sua immagine è al tempo t è data da $\phi_t(\Omega)$ e il suo volume da

$$\mathrm{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} dx = \int_\Omega |\det(D\phi_t(x))| dx = \int_\Omega |\det(\Xi(t,x))| dx.$$

dove $\Xi(t,x)$ è l'unica soluzione di

$$\dot{\Xi}(t,x) = DV(x(t))\Xi(t,x) \tag{2.2}$$

con $x(t) = \phi_t(x)$. Dalla struttura di gruppo segue che $\Xi(t+s,x) = \Xi(s,\phi_t(x))\Xi(t,x)$. Dunque

$$\frac{d}{dt}\det(\Xi(t,x)) = \det(\Xi(t,x)) \lim_{h\to 0} \frac{\det(\Xi(h,\phi_t(x))) - 1}{|h|}$$

Esercizio 1. *Si dimostri che se* $A \in GL(d,\mathbb{R})$ *è sufficientemente piccola allora*[3]

$$\det(\mathbb{1} + A) = e^{\operatorname{Tr}\ln(\mathbb{1}+A)}$$

Poichè integrando (2.2) si ha $\Xi(h,\phi_t(x)) = \mathbb{1} + DV\circ\phi_t h + \mathcal{O}(h^2)$, abbiamo

$$\det(\Xi(h,\phi_t(x))) = 1 + \operatorname{Tr} DV\circ\phi_t h + \mathcal{O}(h^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\det(\Xi(t,x)) = [\operatorname{Tr} DV]\circ\phi_t \cdot \det(\Xi(t,x))\\ &\det(\Xi(0,x)) = 1.\end{aligned}$$

Poichè l'ipotesi del Teorema è equivalente a $\operatorname{Tr} DV = 0$ segue $\det(\Xi(t,x)) = 1$ e $\mathrm{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \mathrm{Vol}(\Omega)$, come annunciato. □

3. Hamiltoniane

La riduzione ad un sistema del primo ordine fatta nella sezione 1 può essere fatta in una generalità molto maggiore. Per esempio nel caso in cui Lagrangiana è convessa nella variabile y.[4]

Esercizio 2. *Si mostri che se* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, *allora* f *è convessa se e solo se* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *è una matrice definita positiva.*[5] *Si dia una condizione per la stretta convessità.*

[3] La piccolezza di A serve a garantire che il logaritmo sia ben definito dalla usuale espansione in serie

$$\ln(\mathbb{1} + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} A^n.$$

Per verificare l'uguaglianza ci si può mettere, per esempio, in forma normale di Jordan.

[4] Una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ si dice convessa se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ e $t \in [0,1]$ si ha $f(ty + (1-t)x) \le tf(y) + (1-t)f(x)$, (se la disuguaglianza è ovunque stretta, allora la funzione si dice *strettamente* convessa).

[5] Una matrice $A \in GL(\mathbb{R}, d)$ si dice *definita positiva* se $A^T = A$ e $\langle v, Av\rangle \ge 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 3.1. *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, D aperto e convesso,*[6] *una funzione convessa e limitata. Allora per ogni compatto $K \subset D$ eisiste $L_K > 0$ tale che, per ogni $x, y \in K$,*

$$|f(x) - f(y)| \le L_K \|x - y\|.$$

Proof. Si cominci col notare che existe $a > 0$ tale che $\inf_{x \in K, y \in \partial D} \|x - y\| \ge a$.[7]

Ne segue che per ogni $x, y \in K$, ponendo $\delta_{x,y} = a\|y - x\|^{-1}$, si ha $\{tx + (1 - t)y\}_{t \in [-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}]} \subset D$. Sia $z = -\delta_{x,y}x + (1 + \delta_{x,y})y$ e $w = (1 + \delta_{x,y})x - \delta_{x,y}y$. Allora, ponendo $s = \frac{\delta_{x,y}}{1+\delta_{x,y}}$,

$$f(y) = f(sx + (1 - s)z) \le sf(x) + (1 - s)f(z) = f(x) + \|y - x\| \frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|}.$$

That is, setting $M = \sup_{x \in D} |f(x)|$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \le \frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|} \le \frac{2M}{a}.$$

Arguing similarly, we have

$$\frac{f(x) - f(y)}{\|y - x\|} \le \frac{f(x) - f(w)}{\|w - x\|} \le \frac{2M}{a}$$

from which the result follows with $L_K = \frac{2M}{a}$. □

Dal Lemma di cui sopra si ottiene immediatamente il seguente interessante fatto.

Corollary 3.2. *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, D aperto e convesso, una funzione convessa e limitata. Allora $f \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$.*[8]

Data una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ si definisca la sua *Trasformata di Legendre* come

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, y\rangle - f(y)\} \tag{3.1}$$

Si noti che f^* può assumere il valore $+\infty$.

Esercizio 3. *Si mostri che f^* è convessa.*

Esercizio 4. *Si mostri che $f^{**} \le f$.*

Esercizio 5. *Si mostri che se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ è strettamente convessa allora la funzione $h(y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y)$ è invertibile. Inoltre, detta g la funzione inversa di h, si ha*

$$f^*(x) = \langle x, g(x)\rangle - f \circ g(x).$$

Esercizio 6. *Si mostriche se $f \in \mathcal{C}^2$ è strettamente convessa allora $f^{**} = f$.*

Esercizio 7. *Si mostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle \le f^*(x) + f(y)$, (disuguaglianza di Young).*

Esercizio 8. *Si calcoli la trasformata di Legendre delle seguenti funzioni di una variabile reale: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$, $f(x) = x \ln x$, $f(x) = x^4$. Si calcoli inoltre la trasformata di Legendre di $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ dove A è una matrice definita positiva.*

---

[6] Un insieme D si dice convesso se per ogni $x, y \in D$ e $t \in [0, 1]$ si ha $ty + (1 - t)x \in D$.

[7] In caso contrario esisterebbe $\{x_n\} \subset K$ tale che $\lim_{n\to\infty} \inf_{y \in \partial D} \|x - y\| = 0$. Ma allora si portrebbe estrarre una sottosuccessione convergence $\{x_{n_j}\}$. Detto $\bar{x}$ is suo limite si avrebbe $\bar{x} \in K \cap \partial D$, ma tale intersezione è vuota.

[8] In fatti, per il teorema di Rademacher, segue the f è quasi ovunque differenziabile, ma questo esula dalla semplice discussione che stiamo conducendo.

Tornando alle nostre motivazioni originali, data una funzione $\mathcal{L}(x,y)$ strettamente convessa nella seconda variabile definiamo la funzione

$$H(p,q) = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \langle p, y\rangle - \mathcal{L}(q,y),$$

la funzione H è detta *Hamiltoniana*. Se $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$, allora, dai precedenti esercizi si ha che per ogni $q \in \mathbb{R}^d$ la funzione $\Psi(q,\cdot) = \frac{\partial\mathcal{L}(q,\cdot)}{\partial y}$ è invertibile come funzione di y, sia $G(q,\cdot)$ la sua inversa, e si ha

$$H(p,q) = \langle p, G(q,p)\rangle - \mathcal{L}(q, G(q,p)).$$

Lemma 3.3. *Data una Lagrangiana $\mathcal{L}$ e un moto $q(t)$ si consideri la funzione $p(t) = \frac{\partial\mathcal{L}(q(t),\dot q(t))}{\partial y}$. Le funzioni $(q(t),p(t))$ sono soluzioni delle equazioni*

$$\begin{aligned}\dot q &= \frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned} \tag{3.2}$$

se e solo se $q(t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange.

Proof. Le equazioni di Lagrange si scrivono come $\dot p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$. D'altro canto

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) &= \langle p, \frac{\partial G}{\partial q}\rangle - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial q} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) &= G(q,p) + \langle p, \frac{\partial G}{\partial p}\rangle - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial p} = \dot q(t).\end{aligned}$$

Da cui il Lemma segue. □

Remark 3.4. *Le equazioni* (3.2) *sono dette* equazioni di Hamilton.

Esercizio 9. *Si mostri che se $q(t), p(t)$ sono soluzione delle equazioni di Hamilton allora $\frac{dH}{dt}(q(t),p(t)) = 0$.*

Esercizio 10. *Si mostri che le equazioni di Hamilton soddisfano le ipotesi del Teorema di Liouville.*

4. Struttura simplettica delle equazioni di Hamilton

Data la matrice $2d \times 2d$ definita da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}$$

le equazioni di Hamilton si possono scrivere come[9]

$$\dot x = J\nabla H(x) \tag{4.1}$$

dove $z = (q,p)$. Si noti che $J^2 = -\mathbb{1}$ e $J^T = -J$.[10] La matrice J gioca un ruolo fondamentale nella struttura Hamiltoniana. In particolare, si può definire la forma bilineare su $\mathbb{R}^{2d}$

$$\omega(v,w) := \langle v, Jw\rangle.$$

[9] Il gradiente di una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ è dato dal vettore $\nabla f := (\partial_{x_i} f)$.

[10] Si noti la somiglianza col numero immaginario i, dove il trasposto prende il posto della coniugazione complessa, non si tratta di un caso!

La forma ω si chiama *forma simplettica.* Una matrice A con la proprietà $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$, si dice *simplettica.* Una trasformazione $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$ tale che $DF(x)$ è simplettica per ogni $x \in \mathbb{R}^{2d}$ si dice *trasformazione simplettica.*

Lemma 4.1. *Per ogni Hamiltonian H il flusso Hamiltoniano ϕ_t è una trasformazione simplettica.*

Proof. Sia $\Xi(x, t) = D\phi_t$, allora

$$\dot{\Xi}(t, x) = JD^2H \circ \phi_t(x) \cdot \Xi(t, x)$$

dunque, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$\frac{d}{dt}\omega(\Xi v, \Xi w) = \omega(\dot{\Xi} v, \Xi w) + \omega(\Xi v, \dot{\Xi} w) = \langle JD^2H\Xi v, J\Xi w\rangle - \langle \Xi v, D^2H\Xi w\rangle = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che D^2H è una matrice simmetrica.[11] □

Lemma 4.2. *L'insieme delle matrici simplettiche formano un gruppo (chiamato $Sp(2d, \mathbb{R})$). Inoltre, se $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$ allora $A^T \in Sp(2d, \mathbb{R})$.*

Proof. Prima di tutto è si noti che una matrice è simplettica se e solo se $A^T JA = J$. Allora è banale verificare che $\mathbb{1} \in Sp(2d, \mathbb{R})$. Inoltre se $A, B \in Sp(2d, \mathbb{R})$, allora

$$(AB)^T JAB = B^T A^T JAB = J,$$

quindi $AB \in Sp(2d, \mathbb{R})$. Per altro $A[-JA^T J] = \mathbb{1}$ mostra che A è invertibile e $A^{-1} = -JA^T J$, inoltre

$$(A^{-1})^T JA^{-1} = (-JA^T J)^T JA^{-1} = JAA^{-1} = J.$$

Dunque $A^{-1} \in Sp(2d, \mathbb{R})$. Finalmente, se $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$, allora $A^{-1}J(A^T)^{-1} = J$ che implica $(A^T)^{-1} \in Sp(2d, \mathbb{R})$ e dunque $A^T \in Sp(2d, \mathbb{R})$. □

Si noti che $\det(A)^2 = 1$, infatti di più è vero.

Lemma 4.3. *Se $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$, allora* $\det(A) = 1$.

Proof. Si scriva una matrice A, $2d \times 2d$, come

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

dove $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ sono matrici $d \times d$. Un calcolo esplicito mostra che $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$ se e solo se

$$(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{c})^T = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{c}\,; \quad (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{d})^T = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{d}\,; \quad \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} = \mathbb{1}. \tag{4.2}$$

Si noti che se $d = 1$ l'ultima di tali equazioni significa $\det A = 1$. Per $d > 1$ occorre un argomento più sofisticato.

Cominciamo con lo studiare il caso $\det(\boldsymbol{d}) \neq 0$. Notiamo che

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

D'altro canto se moltiplichiamo le $d + i$-esime righe della matrice sulla destra per $\boldsymbol{b}_{ik}$ e le sommiamo alla k-esima riga otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{d}.$$

[11] Ovviamente stiamo assumendo che $H \in \mathcal{C}^2$ e la simmetria segue dal Lemma di Schwartz.

Applicando il determinante a (4.3) si ha dunque $\det \boldsymbol{d} \cdot \det A = \det \boldsymbol{d}$, dunque $\det A = 1$.

Ci rimane da esaminare il caso $\det \boldsymbol{d} = 0$. Per studiare questo caso occorre notare che ci si può ricondurre al caso precedente moltiplicando la matrice per una matrice simplettica di cui si conosce il determinate. Lasciamo i dettagli al lettore ma come suggerimento si considerino due sottoinsiemi disgiunti, α, β, di $\{1, \dots, d\}$ tali che $\alpha \cup \beta = \{1, \dots, d\}$ e una permutazione σ di $\{1, \dots, d\}$ tale che $\sigma^2 = id$ e si considerino le matrici

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \alpha,\ j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \qquad Q_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \beta,\ j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Si verifichi che $PQ^T = QP^T = 0$, $PP^T + QQ^T = \mathbb{1}$ e che

$$\Pi = \begin{pmatrix} P & Q^T \\ Q & P^T \end{pmatrix}$$

è simplettica con determinante uno. Si studi quindi come sono fatti i blocchi della matrice (simplettica) ΠA e si noti che le (4.2) implicano che le righe di $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ devono contenere un sottoinsieme di d righe linearmente indipendenti. □

5. Trasformazioni Canoniche

Una trasformazione $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$ si dice *canonica* per le Hamiltoniane H, K se per ogni soluzione $q(t), p(t)$ delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H, le funzioni $(Q(t), P(t)) = F(q(t), p(t))$ soddisfano le equazioni di Hamilton con Hamiltoniana K.

Diciamo che una trasformazione F è *completamente canonica* se per ogni Hamiltoniana H è canonica per le Hamiltoniane $H, H \circ F^{-1}$.

Lemma 5.1. *Una trasformazione invertibile è completamente canonica se e solo se è simplettica.*

Proof. Si consideri la trasformazione invertibile $\Xi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$. Se poniamo $\xi = \Xi(x)$ e consideriamo una soluzione $x(t)$ delle (4.1) per qualche Hamiltoniana H, segue che le funzioni $\xi(t) = \Xi(x(t))$ soddisfano

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))\dot{x}(t) = D\Xi(x(t))J\nabla H(x(t)).$$

Se la trasformazione è completamente canonica allora le equazioni del moto devono essere equazioni di Hamilton rispetto alla nuova Hamiltonina $K = H \circ \Xi^{-1}$, dunque $\nabla H = D\Xi^T \nabla K \circ \Xi$. Quindi le equazioni di cui sopra si possono scrivere come

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))JD\Xi^T(x(t))\nabla K(\xi(t))$$

che hanno a struttura delle equazioni di Hamilton se e solo se $D\Xi J D\Xi^T = J$, cioè la trasformazione Ξ è simplettica. □

Si noti che non è affatto ovvio come costruire una trasformazione simplettica.

Una possibilità è quella di usare una Hamiltoniana il cui flusso al tempo uno da la trasformazione simplettica cercata (si veda il Lemma 4.1).

Un'altra possibilità è di costruire le trasformazioni simplettiche attraverso le cosiddette *funzioni generatrici*.

Si consideri $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$, si designino le variabili in $\mathbb{R}^{2d}$ come (q, P) dove (q, p) saranno le nostre vecchie variabili e (Q, P) quelle nuove ottenute attraverso la trasformazione simplettica che intendiamo costruire. Si considerino le relazioni

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F(q,P)}{\partial q} \\
Q &= \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

La prima domanda è: sotto quali condizioni le (5.1) definiscono un cambio di coordinate $\Xi(q, p) = (Q, P)$? Per rispondere basta applicare il teorema della funzione implicita alle (5.1).[12] Segue che si ha (localmente) un cambio di coordinate se $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$ è invertibile.

Lemma 5.2. *Se $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$ è invertibile, allora le (5.1) definiscono (localmente) un cambio di coordinate simplettico.*

Proof. Il teorema della funzione implicita implica

$$
\begin{aligned}
D\Xi &= -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbb{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & \mathbb{1} \\ -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbb{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} & -\left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ricordando che la matrice delle derivate seconde è simmetrica, si può direttamente verificare che $D\Xi$ è dato dal prodotto di due matrici simplettiche e dunque è simplettico. □

Esercizio 11. *Si verifichi che $D\Xi$ non è una matrice simplettica qualunque ma una con un blocco invertibile (quale?)*

6. Uso delle trasformazioni canoniche

L'utilità delle trasformazioni canoniche consiste nella possibilità di cambiare variabile e trasformare una equazione differenziale complessa in una più semplice. Questo può essere fatto in maniera sistematica attraverso l'equazione di Hamilton-Jacobi. Questa è una teoria molto sviluppata, qui ci limitiamo ad un semplice esempio. Si consideri l'Hamiltoniana

$$
H(q,p) = \frac{1}{2} p^2 + V(q)
$$

dove $q, p \in \mathbb{R}$ e V è strettamente convessa (si tratta di un oscillatore anarmonico). Cerchiamo un cambio di coordinate in cui, chiamando (Q, P) le nuove coordinate, la

[12] Si consideri la funzione $\Phi(q, p, Q, P) = (p - \frac{\partial F(q,P)}{\partial q}, Q - \frac{\partial F(q,P)}{\partial P})$.

nuova Hamiltoniana $K(Q,P)$ non dipenda dalle Q. In fatti, in tal caso le equazione del moto sono

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} =: \omega(P)$$
$$\dot{P} = 0.$$

Ovvero le P sono integrali del moto e le Q evolvono come $Q(t) = Q(0) + \omega(P)t$. Poichè il moto avviene in un compatto, ne segue che l'orbita di Q deve essere periodica, ovvero avviene su di un cerchio.

Per trovare il cambio di coordinate voluto consideriamo la funzione generatrice $F(q,P)$. Dalle (5.1) segue che vogliamo

$$K(P) = H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right).$$

Ovvero, localmente,

$$F(q,P) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2(K(P) - V(s))}ds.$$

Lascio come esercizio al lettore il problema di definire la F globalmente ove possibile.

7. Sistemi completamente integrabili

Data una Hamiltoniana H sia $(q(t), p(t))$ un moto associato. Allora, per ogni funzione I, si ha

$$\frac{dI(q(t),p(t))}{dt} = \frac{\partial I}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial I}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}.$$

È quindi naturale definire le *parentesi di Poisson* tra due funzioni come

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = \langle \nabla f, J\nabla g\rangle = L_{J\nabla g} f, \tag{7.1}$$

dove, dato un campo vettoriale v si ha che $v \cdot \nabla h = \sum_i v_i \partial_{\xi_i} h = L_v h$ è la derivata di Lie. Chiameremo un campo vettoriale v Hamiltoniano se esiste una funzione f tale che $v = J\nabla f$. Usando questa notazione abbiamo

$$\frac{dI(q(t),p(t))}{dt} = \{I, H\}(q(t), p(t)).$$

Ne seque che se $\{I,H\} = 0$ allora I è costante lungo i moti associati ad H. Una tale funzione si chiama *costante del moto*. Chiaramente H è una costante del moto (comunemente chiamata *energia*). Questo significa che gli insiemi di livello $\Sigma_E = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2d} \ : \ H(q,p) = E\}$ sono insiemi invarianti per il moto. Da ora in poi, per semplicità supporremo che tali insiemi siano compatti.

Poichè le Parentesi di Poisson sono antisimmetriche, ne segue che se consideriamo I come una Hamiltoniana allora H è costante lungo i moti di I. Che succede the abbiamo più costanti del moto $\{I_i\}_{i=1}^n$? Per capirlo dobbiamo addentrarci un poco di più nell'algebra delle parentesi di Poisson.

Lemma 7.1. *Le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ con le parentesi di Poisson fomano una algebra di Lie.*[13]

---

[13] Uno spazio vettoriale con una operazione bilineare $[\cdot,\cdot]$ è un'algebra di Lie se $[x,x] = 0$ per ogni x e se, per ogni x, y, z, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (identità di Jacobi).

Proof. L'unica cosa non ovvia è la uguaglianza di Jacobi. Si noti che

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} =&\langle\nabla f, J\nabla\langle\nabla g, J\nabla h\rangle\rangle\\ &= \langle J\nabla f, D^2hJ\nabla g\rangle - \langle J\nabla f, D^2gJ\nabla h\rangle.\end{aligned}$$

Il risultato si ottiene quindi da un calcolo esplicito. □

Ne segue che per ogni tripla di funzioni h, g, f si ha

$$\begin{aligned}L_{J\nabla\{f,g\}}h &= \{h,\{f,g\}\} = -\{g,\{h,f\}\} - \{f,\{g,h\}\} = \{\{h,f\},g\} - \{\{h,g\},f\}\\ &= L_{J\nabla g}L_{J\nabla f}h - L_{J\nabla f}L_{J\nabla g}h = L_{[J\nabla g, J\nabla f]}h.\end{aligned}$$

Da cui segue

$$J\nabla\{f,g\} = [J\nabla g, J\nabla f].$$

In altre parole se due campi vettoriali sono Hamiltoniani, allora il loro commutatore è anche esso un campo vettoriale Hamiltoniano e l'Hamiltoniana è data dalle parentesi di Poisson delle Hamiltoniane. Ovvero, poichè i campi vettoriali lisci formano un'algebra di Lie dove l'operazione bilineare è data dal commutatore, *i campi vettoriali Hamiltoniani formano una sotto algebra di Lie.*

In particolare questo significa che i campi vettoriali determinati dalle I_i commutano con quello Hamiltoniano. Inoltre si ha che

$$\{\{I_i, I_j\}, H\} = -\{\{I_j, H\}, I_i\} - \{\{H, I_i\}, I_j\} = 0,$$

ovvero la parentesi di Poisson di due costanti del moto è una costante del moto. Si possono quindi continuare a produrre nuove costanti del moto a meno che queste non siano in involuzione (ovvero $\{I_i, I_j\} = 0$). Ovviamente tali costanti del moto saranno veramente nuove solo se i campi vettoriali associati sono indipendenti da quelli precedenti.

Un caso di particolare interesse è quando ci sono $d-1$ costanti del moto in involuzione e i campi vettoriali associati sono linearmente indipendenti ad ogni punto. Un sistema siffatto si chiama *completamente integrabile.* Consideriamo il caso in cui le superfici ad energia costante sono compatte.

Lemma 7.2. *Per ogni $E, \{\alpha_i\}_{i=1}^{d-1}$, la superficie $M_{E,\alpha} = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2d} \;:\; H(q,p) = E, I_i(q,p) = \alpha_i\}$ o è vuota oppure è diffeomorfa a $\mathbb{T}^d$.*

Proof. Per la dimostrazione completa si veda [1, Sezione 10]. Qui notiamo solo che la superficie è invariante per i flussi associati a H, I_i. Tali flussi commutano (si veda il Lemma 7.3) e quindi, localmente, possono essere usati come coordinate sulla superficie (che è quindi d-dimensionale). Se uno usa queste coordinate globalmente allora definisce un ricoprimento della superficie il cui dominio fondamentale è un ipercubo. Un poco di topologia mostra che allora la superficie deve essere un toro. □

Ci rimane dunque da dimostrare che

Lemma 7.3. *Date due funzioni liscie I, G tali che $\{I, G\} = 0$ allora i flussi Hamiltoniani generati da I e G commutano.*[14]

[14] In realtà il fatto che i flussi siano Hamiltoniani è irrilevante, la cosa importante è che i campi vettoriali commutino. Tuttavia usare la struttura Hamiltoniana semplifica in poco la dimostrazione.

Proof. Sia ϕ^t if flusso generato da I e ψ^t quello generato da G. Sappiamo che $I \circ \psi^{-t} = I$. Differenziando e ricordando che ψ^t è simplettica (Lemma 4.1) si ha, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$,

$$J\nabla I = J(D\psi^{-t})^T(\nabla I) \circ \psi^{-t} = (D\psi^{-t})^{-1} J(\nabla I) \circ \psi^{-t} = [D\psi^t J\nabla I] \circ \psi^{-t}.$$

Ovvero

$$D\psi^t J\nabla I = (J\nabla I) \circ \psi^t.$$

Dati $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo $\gamma(s) = \psi^t \circ \phi^s(x)$. Per quanto sopra si ha

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= D_{\phi^s(x)}\psi^t J\nabla I(\phi^s(x)) = (J\nabla I) \circ \psi^t(\phi^s(x)) = (J\nabla I)(\gamma(s)) \\ \gamma(0) &= \psi^t(x) \end{aligned}$$

Ma anche $\phi^s(\psi^t(x))$ è una soluzione di tale problema di Cauchy. Per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha quindi

$$\psi^t \circ \phi^s(x) = \phi^s \circ \psi^t(x)$$

e il Lemma segue per l'arbitrarietà di x, t, s. □

References

[1] Mathematical Methods of Classical mechnaics, V.I.Arnold, Springer.
[2] Fisica Teorica, Meccanica, Landau, Lifshitz.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
Email address: liverani@mat.uniroma2.it