Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Estiva, 28-07-19

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri una particella di massa m soggetta al potenziale $V_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Si mostri che tutti i moti con tali potenziali sono periodici.
   (b) Si considerino i moti con condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$, $v > 0$. Sia $T_n(v)$ il periodo di tale moto soggetto al potenziale V_n. Si calcoli $\lim_{n\to\infty} T_n(v)$.
2. Sia dato in un piano un disco omogeneo di raggio R, massa M e centro nell'origine e sia Q un punto sul disco a distanza $R/2$ dal centro. Inoltre sia P un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla retta delle ascisse e tale che $\|P - Q\| = 2R$. Inoltre il punto P è connesso col punto $(0, 2R)$ da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Si studino i punti di equilibrio di tale sistema e se ne discuta la stabilità.
3. Si scriva l'Hamiltoniana del problema precedente e si mostri che è conservata lungo le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Soluzione

1. La periodicità segue banalmente dalla convessità del potenziale. Il periodo è dato dalla formula
$$T_n(v) = 4\int_0^{x_+(v)} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_n(x))}dx$$
dove $V_n(x_+(v)) = E$, $E = \frac{m}{2}v^2$. Ovvero, $x_+(v) = \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}}$. Si consideri il cambio di coordinate $x = \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} z$. Ovvero
$$T_n(v) = 4\int_0^1 \left[\frac{2}{m}(\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v^2)z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} dz = 4v^{-1}\left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} \int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz$$
Dunque
$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = \lim_{n\to\infty} 4v^{-1}\left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} \int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz = 4v^{-1} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$
Per concludere si noti che, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int_0^{1-\varepsilon} \lim_{n\to\infty}\left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^{1-\varepsilon} dz = 1 - \varepsilon \\
\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{1-\varepsilon}^1 \left[1 - \xi\right]^{-\frac{1}{2}} \xi^{-1+\frac{1}{2n}} d\xi \\
&\leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{2n}\left[1 - \xi\right]^{-\frac{1}{2}} d\xi \\
&\leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\varepsilon} = 0.
\end{aligned}$$
Per l'arbitrarietà di ε segue che
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{1 - z^{2n}}dz = 1.$$
Da cui
$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = 4v^{-1}.$$
Ovvero, il tempo impiegato per andare da -1 a 1 e ritorno conn velocità costante v, il che corrisponde al moto nell' intervallo $[-1, 1]$ senza potenziale con riflessioni elastiche ai bordi.

2. Sia θ l'angolo che descrive la rotazione del disco. Poihè Q è solidale col disco possiamo assumere $Q = \frac{R}{2}v(\theta)$, $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $P = (x, 0)$ allora
$$4R^2 = \|P - Q\|^2 = x^2 - Rx\cos\theta + \frac{R^2}{4}.$$
Ovvero
$$x = \frac{R}{2}\left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + 15}\right] =: x_\pm(\theta).$$
Si ponga $w_\pm(\theta) = -\frac{R}{2}\left[\sin\theta \pm \cos\theta\sin\theta\left[\cos^2\theta + 15\right]^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{d}{d\theta}x_\pm(\theta)$. Si noti che $x_\pm$ non può mai essere zero e quindi o è sempre positivo e sempre negativo, ovvero lo spazio delle configurazioni non è connesso. Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana
$$\mathcal{L} = \frac{MR^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\|w_\pm(\theta)\|^2\dot\theta^2 - \frac{K}{2}(x_\pm(\theta)^2 + 4R^2).$$

Ne segue che i punti di equilibrio sono dati da $V'(\theta) = Kx_\pm(\theta)w_\pm(\theta) = 0$, that is $w_\pm(\theta) = 0$. Questo è possibile solo se $\sin\theta = 0$. Abbiamo quindi quattro punti di equilibrio: $\theta \in \{0, \pi\}$ e per ogni valore di θ abbiamo un equilibrio per x positivo e uno per x negativo. Se $\theta = 0$ si ha che l'equilibrio è instabile se x è poitivo e stabile se x è negativo e viceversa per $\theta = \pi$.

3. Poichè la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\|w_\pm(\theta)\|^2\dot{\theta}^2 - \frac{K}{2}(x_\pm(\theta)^2 + 4R^2).$$

si ha che il momento è dato da

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{MR^2}{2} + m\|w_\pm(\theta)\|^2\right]\dot{\theta} =: \Gamma(\theta)\dot{\theta}.$$

quindi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Gamma(\theta)^{-1}p_\theta^2 + \frac{K}{2}(x_\pm(\theta)^2 + 4R^2) =: \frac{1}{2}\Gamma(\theta)^{-1}p_\theta^2 + V(\theta).$$

Inoltre,

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = -\frac{\Gamma'}{2\Gamma^2}\dot{\theta}p_\theta^2 + \frac{1}{\Gamma}p_\theta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + V'\dot{\theta} = 0.$$