TEORIA DELLA MEDIA

CARLANGELO LIVERANI

1. In balia delle vibrazioni

Nel mondo che ci circonda ci sono moltissimi moti vibratori che ci investono continuamente: dalle onde sismiche, alle onde sonore, alla luce, ai raggi X ai raggi cosmici etc... Tutti questi moti oscillatori differiscono sostanzialmente nella loro natura ed origine ma comunque interagiscono con noi e ci trasmettono della energia. La proprietà fondamentale che veramente distingue tutti questi moti è la loro frequenza. Mentre le onde sismiche (non necessariamente scosse di terremoto ma anche vibrazioni dovute al traffico) avvengono su frequenze di pochi Hz,[1] le onde sonore (udibili) hanno frequenze da 20 a 20.000 Hz, le onde radio e microonde vanno da 10^6 a 10^{10} Hz, le onde luminose visibili si aggirano su 10^{14}, 10^{15} Hz, i Raggi X attorno ai 10^{17} Hz e così via. A pensarci la cosa è abbastanza preoccupante: se ognuna di queste frequenze presenti in natura ci trasferisce un poco di energia, dato che esiste una tale moltitudine di frequenze, saremmo investiti da un flusso di energia enorme. Non si capisce quindi come possiamo esistere senza rimanere istantaneamente inceneriti. A pensarci meglio, l'unica speranza è che le frequenze alte riescano a trasferire poca energia e che quindi l'effetto commutativo sia piccolo. Vediamo di studiare un semplice modello per vedere se questa possibilità è ragionevole oppure no.

2. Teoria della media

Consideriamo un punto materiale che si muove sotto l'influsso di forze esterne (indipendenti dal tempo) e una forza esterna dipendente dal tempo periodica di periodo ε. Questo può essere descritto dalle seguenti equazioni di Newton

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + f(x(t), \varepsilon^{-1}t) \\ &x(0) = \bar{x}\ ;\ \dot{x}(0) = v. \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove, per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x, t+1) = f(x, t)$. Per semplicità assumiamo che $\|F\|_{\mathcal{C}^1} + \|f\|_{\mathcal{C}^1} \leq C$ per qualche costante $C > 0$ indipendente da ε. Assumiamo inoltre che esista un potenziale U tale che $\nabla U = -F$.

Detta x_ε l'unica soluzione delle (2.1), ci domandiamo cosa succede per $\varepsilon \to 0$. Prima di tutto notiamo che dalle nostre ipotesi e dalla (2.1) segue che $\ddot{x}_\varepsilon$ è uniformemente limita in ε. Per Ascoli-Arzelà ne segue che è possibile trovare successioni $\{\varepsilon_j\}$ tali che $x_{\varepsilon_j}, \dot{x}_{\varepsilon_j}$ convergono uniformemente a delle funzioni $x_*, \dot{x}_*$. La nostra strategia sarà dunque di mostrare che x_* è univocamente determinata, questo implica l'

Date: Versione di April 16, 2021.

[1]Un Hz, detto hertz, corrisponde ad una oscillazione per secondo

esistenza del limite $\varepsilon \to 0$. Poichè non vi è alcuna ragione per cui $\ddot{x}_\varepsilon$ debba convergere ad alcunchè sembra una buona idea eliminarla dalle equazioni. Riscriviamo dunque le (2.1) come

$$\begin{aligned} m\dot{x}(t) &= mv + \int_0^t F(x(s))ds + \int_0^t f(x(s), \varepsilon^{-1}s)ds \\ x(0) &= \bar{x}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il problema di base è di valutare l'ultimo integrale. Per farlo è conveniente dividere il dominio di integrazione in periodi: sia $\bar{k}$ il più grande intero per cui $\varepsilon\bar{k} \leq t$, dunque $t - \varepsilon\bar{k} \leq \varepsilon$. Allora, ponendo $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(x,s)ds$,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x(s), \varepsilon^{-1}s)ds &= \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(x(s), \varepsilon^{-1}s)ds + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(x(\varepsilon k), \varepsilon^{-1}s)ds + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \bar{f}(x(\varepsilon k))\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) = \int_0^t \bar{f}(x(s))ds + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Possiamo quindi passare al limite e ottenere che x_* deve soddisfare

$$\begin{aligned} m\dot{x}_*(t) &= mv + \int_0^t F(x_*(s)) + \bar{f}(x_*(s))ds \\ x(0) &= \bar{x}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Questo implica che x_* è una funzione liscia e, differenziando, si ottiene che soddisfa

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F(x(t)) + \bar{f}(x(t)) \\ x(0) &= \bar{x}\ ;\ \dot{x}(0) = v. \end{aligned} \tag{2.4}$$

L'equazione qui sopra si chiama *equazione mediata* ed è l'esempio più semplice possibile della cosiddetta *teoria della media*.

Nei casi che hanno motivato la nostra discussione abbiamo sempre oscillazioni a media nulla, dunque $\int_0^1 f(x,s)ds = 0$, ovvero $\bar{f} \equiv 0$. Dunque il moto, nel limite si svolge come se la forza oscillante non esistesse. Questo è un risultato moderatamente tranquillizzante ma, per avere le idee più chiare calcoliamo anche l'energia. Come energia del sistema prendiamo $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$, ovvero la energia del sistema senza forza esterna. Moltiplicando (2.2) per $\dot{x}$ e integrando si ha

$$\begin{aligned} E(n\varepsilon) =& E(0) + \int_0^{n\varepsilon} \langle f(x(s), \varepsilon^{-1}s), \dot{x}(s)\rangle ds \\ =& E(0) + \sum_{k=0}^{n} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \langle f(x(k\varepsilon), \varepsilon^{-1}s), \dot{x}(k\varepsilon)\rangle ds \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \langle D_x f(x(k\varepsilon)\dot{x}(k\varepsilon), \varepsilon^{-1}s), \dot{x}(k\varepsilon)\rangle (s - k\varepsilon) ds \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{s} \langle f(x(k\varepsilon), \varepsilon^{-1}s), \ddot{x}(\tau)\rangle d\tau ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Dunque per calcolare il trasferimento di energia dobbiamo calcolare gli integrali. Il primo è zero poichè f è a media nulla. Vediamo il secondo

$$\begin{aligned}
&\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\langle D_x f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s)\dot{x}(k\varepsilon),\dot{x}(k\varepsilon)\rangle(s-k\varepsilon)ds = \\
&= \varepsilon^2\int_k^{k+1}\langle D_x f(x(k\varepsilon),s)\dot{x}(k\varepsilon),\dot{x}(k\varepsilon)\rangle(s-k)ds \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Mentre il terzo si scrive come

$$\begin{aligned}
&\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{s}\langle f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s),\ddot{x}(\tau)\rangle d\tau ds = \\
&= m^{-1}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{s}\langle f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s),F(x(\tau))+f(x(\tau),\varepsilon^{-1}\tau)\rangle d\tau ds \\
&= m^{-1}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{s}\langle f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s),F(x(k\varepsilon))+f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}\tau)\rangle d\tau ds + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= m^{-1}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}(s-k\varepsilon)\langle f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s),F(x(k\varepsilon))\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2m}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon}\langle f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}s),f(x(k\varepsilon),\varepsilon^{-1}\tau)\rangle d\tau ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= m^{-1}\varepsilon^2\int_k^{(k+1)}(s-k)\langle f(x(k\varepsilon),s),F(x(k\varepsilon))\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

È quindi naturale definire

$$\Phi(x) := m^{-1}\int_0^1 s\langle f(x,s),F(x)\rangle$$
$$\Theta(x,v) : = \int_0^1\langle D_x f(x,s)v,v\rangle s ds$$

Usando tale notazione possiamo quindi scrivere

$$E(n\varepsilon) = E(0) + \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^2\Theta(x(k\varepsilon),\dot{x}(k\varepsilon)) + \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^2\Phi(x(k\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Dalla discussione che ci ha portato a derivare (2.3) abbiamo

$$E(n\varepsilon) = E(0) + \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^2\Theta(x_*(k\varepsilon),\dot{x}_*(k\varepsilon)) + \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^2\Phi(x_*(k\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Notando che la somma non è altro che una somma di Riemann (di una funzione con derivata uniformemente limitata) abbiamo

$$E(n\varepsilon) = E(0) + \varepsilon\int_0^{n\varepsilon}\Theta(x_*(t),\dot{x}_*(t))dt + \varepsilon\int_0^{n\varepsilon}\Phi(x_*(t))dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{2.6}$$

Per cocnludere notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 s\langle f(x_*(t),s),\dot x_*(t)\rangle ds &= \int_0^1 s\langle Df(x_*(t),s)\dot x_*(t),\dot x_*(t)\rangle ds\\ &\quad + m^{-1}\int_0^1 s\langle f(x_*(t),s),F(x_*(t))\rangle ds\\ &= \Phi(x_*(t))+\Theta(x_*(t),\dot x_*(t)).\end{aligned}$$

Usando questa uguaglianza in (2.6) si ha, ricordando che $t = n\varepsilon$,

$$\begin{aligned}E(t) &= E(0)+\varepsilon\int_0^t\frac{d}{ds}\int_0^1\sigma\langle f(x_*(t),\sigma),\dot x_*(t)\rangle d\sigma+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\ &= E(0)+\varepsilon\left[\int_0^1\sigma\langle f(x_*(t),\sigma),\dot x_*(t)\rangle d\sigma-\int_0^1\sigma\langle f(x_0,\sigma),v_0(t)\rangle d\sigma\right]+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Dunque una forza con frequenza ω riesce a trasferire alla particella una energia proporzionale ad ω^{-1}, ma l'energia trasferita non cresce nel tempo (almeno non al primo ordine in ε).

3. Conclusioni

Abbiamo quindi visto che le alte frequenze trasferiscono poca energia. Tuttavia non è chiaro se questo sia sufficiente oppure no a tranquillizzarci. Dipende da come le oscillazioni ad alte frequenze sono distribuite. Nell'ipotesi che siano uniformante distribuite (certo un poco strana perchè significherebbe che in ogni posto c'è una energia infinita) si avrebbe che la forza che ci investe da frequenze inferiori ad L è qualcosa come $\int_1^L f_\omega(x(s),\omega t)d\omega$, e il trasferimento di energia sarebbe qualcosa come

$$\lim_{L\to\infty}\int_1^L\omega^{-1}d\omega=\lim_{L\to\infty}\ln L=\infty.$$

Visto che noi esistiamo senza problemi evidentemente le cose non stanno così. Quindi, o l'energia ad alte frequenze è limitata,[2] o esiste un meccanismo diverso per il trasferimento dell'energia ad alte frequenze. Ovviamente, l'idea di applicare la dinamica Newtoniana a frequenze, ad esempio, di 10^{25} Hz è pura follia. Dalla meccanica quantistica abbiamo che una tale frequenza corrisponde ad una particella di energia $E=\hbar\omega\sim 10^{-9}$ Joule che, usando l'equazione relativistica $E=mc^2$ corrisponderebbe ad una massa a riposo di circa 10^{-24} grammi che è circa la massa di un atomo di idrogeno. Non si può certo fare finta che lo scambio di energia sia un fenomeno continuo se avviene attraverso quanti di tale grandezza. D'altro canto $\ln 10^{25}\le 60$ dunque il contributo cumulativo di tutte le frequenze che possono ragionevolmente essere trattate classicamente non è molto grande.
In conclusione:
La risposta alla domanda se la nostra descrizione del mondo prevede oppure no un disastro risiede al di la dell' applicabilità dal nostro modello: la meccanica classica. Infatti, i problemi descritti sono collegati alle difficoltà della meccanica classica nello spiegare la radiazione di corpo nero. Un problema che, grazie prima la lavoro

[2]Difficile dirlo visto che abbiamo una idea molto vaga di come sia fatta la fisica fondamentale.

di Plank e poi a quello di Einstein, ha portato al superamento della meccanica classica ed all'avvento della meccanica quantistica.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
Email address: liverani@mat.uniroma2.it