

Fisica Matematica I

Esercizi

Mercoledì, 14-04-2021

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin(x)(L - K) , \\ x(0) &= x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 ,\end{aligned}$$

con $L, K > 0$. Si calcoli il potenziale $U(x)$ e si mostri che l'equilibrio $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ è stabile se $L < K$ (quindi $U''(x_0) > 0$).

2. Si consideri il potenziale $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ e l'equazione differenziale

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -U'(x) - \lambda\dot{x} \\ x(0) &= 1; \quad \dot{x}(0) = -1 ,\end{aligned}$$

Si trovino i $\lambda > 0$ tali che $\inf_{t>0} = 0$.

3. Si consideri il potenziale

$$U = \begin{cases} 2U_0 & x < x_1 \\ 0 & x_1 \leq x < x_1 + b \\ U_0 & x_1 + b \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

con $x_2 - x_1 = 2b$. Si mostri che il periodo del moto con energia $E = 3U_0/2$ è

$$T = 2b \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{m}{U_0}} .$$

4. Si consideri una particella di massa uno che si muove nel potenziale $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2$, senza attrito. Si mostri che i moti con energia $E > 0$ consistono di una orbita periodica. Sia $T(E)$ il periodo del moto energia. Si calcoli

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\ln T(E)}{\ln E} .$$

5. Si consideri una particella di massa uno che si muove senza attrito sotto l'influenza del potenziale $U_\lambda(x) = \sin \lambda x$. Sia $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$ la sua condizione iniziale si descriva il moto nel limite $\lambda \rightarrow \infty$.