

PICCOLE OSCILLAZIONI

CARLANGELO LIVERANI

1. MOTO VICINO AL MINIMO NON DEGENERARE DEL POTENZIALE

Supponiamo che $V \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V \geq 0$ e $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) = a > 0$. Allora zero è un minimo locale.

Si assuma che l'energia abbia la forma $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$.

Esercizio 1.1. *Si mostri che esiste una energia E_0 e un numero $L > 0$ tale che, per ogni $E \leq E_0$, l'insieme $I(E) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq L, V(x) \leq E\}$ è un intervallo chiuso contenente zero al suo interno. Si mostri inoltre che si possono scegliere E_0, L tali che, per ogni $E \leq E_0$, $I(E) \subset I(E_0)$ e $V'(x) = 0$ con $x \in I(E)$ implica $x = 0$.*

Poniamo $I(E) = [x_-(E), x_+(E)]$ e studiamo il moto in questo intervallo per $E < E_0$.

Esercizio 1.2. *Si mostri che il moto in $I(E)$ è periodico. (suggerimento: **prima pensateci e se proprio non sapete che pesci pigliare guardate uno dei libri consigliati**).*

Quello che vogliamo studiare è il periodo $T(E)$.

Esercizio 1.3. *Si mostri che*

$$T(E) = 2\sqrt{m} \int_{I(E)} [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} dx.$$

(suggerimento: si usi la conservazione dell'energia).

Risulta conveniente scrivere $T(E) = 2T_-(E) + 2T_+(E)$ dove

$$(1.1) \quad T_-(E) = \sqrt{m} \int_{x_-(E)}^0 [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$(1.2) \quad T_+(E) = \sqrt{m} \int_0^{x_+(E)} [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Esercizio 1.4. *Si mostri che gli integrali impropri (1.1) e (1.2) sono ben definiti. (suggerimento: **prima pensateci e se proprio non sapete che pesci pigliare guardate uno dei libri consigliati**).*

Poichè queste due quantità si possono studiare esattamente nello stesso modo ci concentriamo su T_+ lasciando al lettore lo studio di T_- .

Prima di tutto vogliamo studiare la funzione $x_+(E) \geq 0$. Essa è determinata dall'equazione $V(x_+(E)) = E$. Si noti che $V(x) = \frac{1}{2}ax^2 + x^3W(x)$ dove W è una funzione liscia e limitata in $I(E_0)$. Vogliamo quindi risolvere l'equazione

$$\tilde{F}(x, E) = \frac{1}{2}ax^2 + x^3W(x) - E = 0$$

Ovviamente tale equazione ha una soluzione ovvia: $x = E = 0$. Purtroppo non possiamo applicare il teorema della funzione implicita in tale punto visto che $\partial_x \tilde{F}(0, 0) = 0$. Tuttavia se introduciamo la variabile $x = \epsilon z$ con $\epsilon^2 = E$. Allora si ha

$$F(z, \epsilon) = \frac{1}{2}az^2 + z^3\epsilon W(z\epsilon) - 1 = 0.$$

Questa equazione ora ha soluzioni $\epsilon = 0$; $z = \sqrt{2/a}$. Si noti che $\partial_z F(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2a} \neq 0$, dunque ora possiamo usare il teorema della funzione implicita per studiare le soluzioni con $\epsilon > 0$. Ne segue che esiste $z(\epsilon)$ tale che $z(0) = a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ e $F(z(\epsilon), \epsilon) = 0$, inoltre dal teorema segue che

$$(1.3) \quad \frac{d}{d\epsilon} z(\epsilon) = -\frac{z(\epsilon)^2 W(\epsilon z(\epsilon)) + z(\epsilon)^3 \epsilon W'(\epsilon z(\epsilon))}{a + 3\epsilon z(\epsilon) W(\epsilon z(\epsilon)) + \epsilon^2 z(\epsilon)^2 W'(\epsilon z(\epsilon))}.$$

Questo implica che $z'(0) = 2a^{-2}W(0) =: \beta$.

Esercizio 1.5. *Si noti che (1.3) implica che $z \in C^\infty$. Si calcoli $z''(0)$. Si mostri che z è ben definita su tutto l'intervallo $[0, \sqrt{E_0}]$. (suggerimento: il teorema della funzione implicita da una soluzione in un qualche intervallo $[0, \epsilon_0]$. Si mostri che la soluzione si può estendere all'intervallo $[0, \epsilon_0]$ e quindi si usi nuovamente il teorema della funzione implicita nel punto ϵ_0 per mostrare che l'intervallo può essere ulteriormente esteso. Da qui segue che non esiste un dominio massimale più piccolo di $[0, \sqrt{E_0}]$.)*

Ora che abbiamo qualche informazione su $x_+(E) = \epsilon z(\epsilon)$ possiamo tornare allo studio di $T_+(\epsilon^2)$. Se usiamo la variabile $x = x_+(E)\xi$ possiamo riscrivere (1.2) come

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{z(\epsilon)}{\sqrt{1 - \frac{a}{2}z(\epsilon)^2\xi^2 - \epsilon\xi^3z(\epsilon)^3W(\epsilon z(\epsilon)\xi)}} d\xi$$

Esercizio 1.6. *Si mostri che $T_+(0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}$.*

Per sapere come si comporta T_+ per piccole energie verrebbe quindi naturale derivare l'integrale rispetto a ϵ . Tuttavia questa è una faccenda un poco delicata visto che si tratta di un integrale improprio. Risulta essere più conveniente manipolare prima l'integrale in modo da renderlo più arrendevole. Notiamo che

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{2}z(\epsilon)^2\xi^2 - \epsilon\xi^3z(\epsilon)^3W(\epsilon z(\epsilon)\xi) &= \frac{a}{2}z(\epsilon)^2(1 - \xi^2) \\ &\quad + \epsilon z(\epsilon)^3W(\epsilon z(\epsilon)\xi)(1 - \xi^3) + \epsilon z(\epsilon)^3[W(\epsilon z(\epsilon)) - W(\epsilon z(\epsilon)\xi)] \\ &= (1 - \xi) \left[\frac{a}{2}z(\epsilon)^2(1 + \xi) + \epsilon z(\epsilon)^3\Omega(\epsilon, \xi) \right], \end{aligned}$$

dove $\Omega(\epsilon, 1 - \xi) = W(\epsilon z(\epsilon)\xi)(1 + \xi + \xi^2) + \frac{W(\epsilon z(\epsilon)) - W(\epsilon z(\epsilon)\xi)}{1 - \xi}$. Si noti che $\Omega \in C^2$.

È allora naturale introdurre la variabile $\eta = 1 - \xi$ che permette di scrivere

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{a}{2}(2 - \eta) - \epsilon z(\epsilon)\Omega(\epsilon, \eta)}} d\eta$$

Finalmente poniamo $\eta = u^2$ e scriviamo

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{2m} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}(2 - u^2) - \epsilon z(\epsilon)\Omega(\epsilon, u^2)}} du.$$

Visto che l'integrando ora è una funzione liscia (nell'intervallo di integrazione) si possono tranquillamente calcolare le derivate derivando sotto il segno di integrazione.

Esercizio 1.7. *Si mostri che*

$$\begin{aligned} T_+(\epsilon^2) &= T_+(0) + \epsilon \sqrt{\frac{4m}{a^3}} z(0)W(0) \int_0^1 \frac{3 - 2u^2 + u^4}{(2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} ds \\ &+ \epsilon^2 \sqrt{\frac{4m}{a^5}} \int_0^2 \frac{[3 - 2u^2 + u^4] [z'(0)W(0) + z(0)^2 W'(0)(1 - u^2)] \{a(2 - u^2) - 3\}}{(2 - u^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

(suggerimento: si derivi sotto il segno di integrale per calcolare i primi termini dello sviluppo in serie in ϵ .)

È interessante notare che se $V(x) = V(-x)$ allora, necessariamente, $W(0) = 0$. Ne segue che il periodo è, in questo caso, poco sensibile al cambio di energia, almeno per energie piccole.

2. PENDOLO

Tutti sappiamo che il pendolo è stato usato per secoli come orologio. Infatti è stato il primo strumento di una qualche precisione per la misurazione del tempo. Tuttavia un pendolo reale a) non è isocrono; b) è sottoposto all'attrito. Questo fa sì che gli orologi a pendolo siano assai più complicati di un pendolo semplice. Tuttavia, per mostrare quale sia il problema tecnologico da affrontare chiediamoci: se costruiamo un pendolo lungo un metro con attaccato il peso di 10 chili e lo mettiamo in oscillazione con una oscillazione massima di 10 cm e lo usiamo fino a che l'oscillazione non si riduce ad 1 cm, quanto è buono come orologio? Questo è come chiedere, quanto varia il periodo di oscillazione per le corrispondenti energie?

Esercizio 2.1. *Si calcoli l'energia del pendolo in coordinate polari e si mostri che può essere ridotta al caso di una energia unidimensionale della forma discussa nella sezione precedente con potenziale $V = \frac{gm}{l}(1 - \cos \theta)$.*

Sia θ_0 l'ampiezza del moto.

Esercizio 2.2. *Si mostri che, per un pendolo di massa m e lunghezza l si ha*

$$T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^3) \right).$$

(suggerimento: si calcolino gli integrali dell'Esercizio 1.7.)

Dunque, quando $l = 1$ m, notando che una oscillazione di 10 cm corrisponde circa a $\theta_0 = \frac{1}{10}$ abbiamo un cambiamento percentuale

$$\frac{T(\theta_0) - T(0)}{T(0)} \sim \frac{1}{1600}.$$

Supponiamo che questo pendolo "casalingo" impieghi 10 minuti a ridurre le oscillazione dal valore iniziale di 10 cm ad 1 cm, cosa abbastanza ragionevole con un peso di 10 kg. Ne segue che su tale intervallo di tempo il nostro pendolo farebbe un errore di circa mezzo secondo. Per tempi più lunghi si potrebbero usare due pendoli

e farne partire uno quando l'altro è quasi fermo. In tal modo, immaginando di risolvere il problema della sincronizzazione in modo efficiente, si potrebbero misurare tempi arbitrariamente lunghi. A prima vista non sembra male, tuttavia nell'arco di 24 ore corrisponderebbe ad un errore di un minuto. Questo fa un poco pena come orologio, senza menzionare che non si può certo andare in giro con due pendoli di un metro del peso di venti chili che devono essere messi in oscillazione ogni 10 minuti.

Abbiamo comunque scoperto un fatto molto interessante: *è possibile produrre in natura fenomeni periodici con periodo abbastanza stabile da potere essere usati per misurare il tempo*. Tuttavia è chiaro che il pendolo semplice non è un oggetto soddisfacente, occorre quindi modificarlo in maniera opportuna al fine di migliorarne le prestazioni.

CARLANGELLO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: `liverani@mat.uniroma2.it`