MOTI CENTRALI

CARLANGELO LIVERANI AND UGO LOCATELLI

1. Incipit

Lo studio dei moti planetari è stato il principale argomento su cui si è affermata la rivoluzione scientifica del XVII secolo. In questa nota, l'esposizione degli argomenti segue l'ordine storico, in particolare, perché presenteremo prima il cosiddetto *problema inverso di Keplero* e poi quello *diretto*. Questa scelta non è dovuta a un vezzo stilistico, tanto è vero che utilizzeremo spesso delle tecniche ben diverse rispetto alle soluzioni originali di quei problemi, allo scopo di semplificare la trattazione. In questo caso, ci sembra che una presentazione che segue abbastanza lo sviluppo storico sia particolarmente interessante, perché costituisce un mirabile esempio di come nasce e si sviluppa una teoria scientifica.

2. Il problema inverso di Keplero

È importante sapere che, nell'ambito delle equazioni differenziali, ci riferiamo a un preciso tipo di argomenti, quando utilizziamo l'espressione "problema inverso". Infatti, i problemi diretti sono quelli in cui le equazioni sono date e dobbiamo trovarne le soluzioni. Al contrario, i problemi inversi sono tali che le loro soluzioni (o, nel caso di sistemi meccanici, le leggi del moto) sono note a priori e, allora, si deve determinare una parte incognita delle equazioni stesse.

Per quanto possa sembrare paradossale, da un punto di vista storico, il problema inverso di Keplero precedette quello diretto. Newton ebbe l'enorme merito di risolverli entrambi; in particolare, la discussione di quello inverso portò ad enunciare la legge di gravitazione universale; quest'ultima, una volta nota, permise di formulare il problema diretto.

Nell'ambito del problema inverso si assumono per veri i tre *principi della dinamica* e le tre *leggi di Keplero*, invece, si deve determinare l'espressione generale della forza che viene esercitata su un pianeta (o un satellite) dal corpo attorno al quale esso orbita. I tre *principi della dinamica* sono stati formulati in tempi diversi nel XVII secolo e possono essere brevemente riassunti come segue:

(i) un corpo non soggetto a forze esterne prosegue nel suo moto rettilineo uniforme (*principio di inerzia*);

(ii) il moto di un corpo puntiforme P di massa m, cui viene applicata una forza $\boldsymbol{F}$, obbedisce all'equazione $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$ (*legge fondamentale della dinamica*[1]);

[1] A scanso di equivoci, è bene ricordare che il principio di inerzia non è banalmente contenuto nell'equazione fondamentale della dinamica (quando $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$). Infatti, il principio di inerzia vale per una certa classe di sistemi di riferimento che si dicono essere (giustappunto) inerziali. Il vettore $\boldsymbol{x}$ denota le coordinate spaziali in un tale sistema di riferimento, dove vale l'equazione fondamentale della dinamica, con $\boldsymbol{F}$ uguale alla somma vettoriale delle *sole forze attive* su P; altrimenti, nel computo di $\boldsymbol{F}$ devono essere incluse anche le *forze apparenti*.

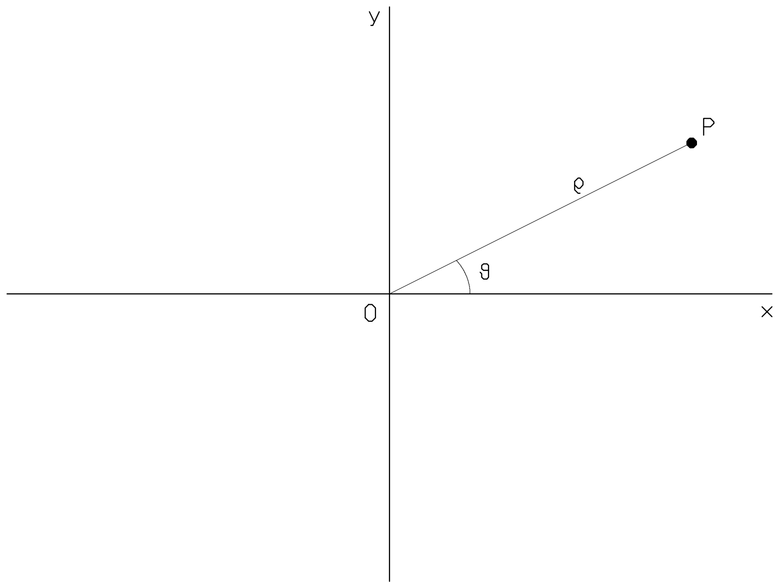

FIGURE 1. Introduzione delle coordinate polari.

(iii) a ogni azione (cioè a ogni forza applicata) corrisponde una reazione (cioè un'altra forza) uguale in norma e direzione, ma di verso contrario (*principio di azione e reazione*).

Le leggi di Keplero sono abitualmente espresse nel modo seguente:

(I) ciascun pianeta descrive un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
(II) il raggio vettore, che congiunge il Sole con un pianeta, spazza aree uguali in tempi uguali;
(III) il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo non dipende dal pianeta.

2.1. **Conseguenze della prima legge di Keplero.** La prima legge di Keplero induce naturalmente ad impostare un sistema di coordinate $Oxyz$, tale che il Sole è posto in corrispondenza all'origine O, il pianeta è rappresentato da un punto materiale P e l'ellisse descritta dall'orbita di P giace nel piano Oxy. La legge fondamentale della dinamica ci permette di trarre immediatamente una prima conclusione: la componente verticale della forza F_z è nulla (essendo, evidentemente, uguale a 0 la componente verticale dell'accelerazione). Inoltre, (per ragioni che saranno più chiare quando svolgeremo esplicitamente i calcoli descritti in questa sezione) è conveniente utilizzare le coordinate polari nel piano Oxy, a cui è associata la trasformazione

$$\Psi(\varrho,\vartheta) = \big(x(\varrho,\vartheta), y(\varrho,\vartheta)\big) \ , \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\sin\vartheta \end{cases} \ , \tag{2.1}$$

in accordo all'illustrazione schematica riportata in figura 1. Si noti che la trasformazione $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ è regolare e invertibile su tutto il dominio, ma non è iniettiva quando viene estesa a $\varrho = 0$.

In seguito all'introduzione delle coordinate (ϱ, ϑ), dovremo ovviamente esprimere l'equazione fondamentale della dinamica in coordinate polari. A tale scopo, definiamo i due versori radiale e tangenziale (o, talvolta detto anche, angolare), che sono rispettivamente uguali a

$$\boldsymbol{e}_\varrho = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \ , \qquad \boldsymbol{e}_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) \ . \tag{2.2}$$

Si noti che quella coppia di versori è da considerarsi mobile, perché le loro direzioni sono orientate a seconda della posizione di P; inoltre, sussistono le seguenti ovvie relazioni:

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\varrho}{\mathrm{d}\vartheta} = \boldsymbol{e}_\vartheta \ , \qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\vartheta}{\mathrm{d}\vartheta} = -\boldsymbol{e}_\varrho \ , \qquad \boldsymbol{e}_\varrho \cdot \boldsymbol{e}_\vartheta = 0 \ . \tag{2.3}$$

Utilizzando coordinate polari, siamo ora in grado di esprimere la posizione

$$\boldsymbol{x} = \varrho \boldsymbol{e}_\varrho \ , \tag{2.4}$$

la velocità

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot\varrho \boldsymbol{e}_\varrho + \varrho\dot\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta \tag{2.5}$$

e, con qualche calcolo aggiuntivo, l'accelerazione

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot\varrho \boldsymbol{e}_\varrho + 2\dot\varrho\dot\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta + \varrho\ddot\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta - \varrho\dot\vartheta^2 \boldsymbol{e}_\varrho = \big(\ddot\varrho - \varrho\dot\vartheta^2\big)\boldsymbol{e}_\varrho + \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varrho^2\dot\vartheta\big)\right]\boldsymbol{e}_\vartheta \ , \tag{2.6}$$

dove il termine parallelo a $\boldsymbol{e}_\vartheta$ è stato riorganizzato in modo tale che compaia ϱ a denominatore, ma senza alcun rischio di incorrere in singolarità, perché *non* stiamo studiando moti collisionali (per cui la distanza $\varrho \to 0$). Siamo finalmente in grado di scrivere in coordinate polari l'equazione fondamentale della dinamica $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$:

$$\begin{cases} \ddot\varrho - \varrho\dot\vartheta^2 &= \dfrac{F_\varrho}{m} \\ \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varrho^2\dot\vartheta\big) &= \dfrac{F_\vartheta}{m} \end{cases} \ , \tag{2.7}$$

dove abbiamo denotato con F_ϱ e F_ϑ, rispettivamente, le proiezioni della forza in direzione radiale e tangenziale, cioè $F_\varrho = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_\varrho$ e $F_\vartheta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_\vartheta$; inoltre, è stata omessa la terza equazione, associata al moto sull'asse z, perché essa è una banale identità (si ricordi che $F_z = 0$).

La prima legge di Keplero implica anche l'esigenza di esprimere l'equazione per una conica in coordinate polari, la cui formulazione è particolarmente semplice ed elegante:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \ , \tag{2.8}$$

dove, comunemente, ci si riferisce alla costante p con il nome "parametro della conica"; invece, e denota l'eccentricità, rispetto alla quale possiamo effettuare la seguente ben nota classificazione:

(A) se $e = 0$, allora l'equazione (2.8) descrive una circonferenza (di raggio p);
(B) quando $e \in (0, 1)$, allora il luogo dei punti che soddisfano la (2.8) è un'ellisse;
(C) se $e = 1$, allora l'equazione (2.8) descrive una parabola con asse di simmetria sull'asse delle x;
(D) quando $e > 1$, allora abbiamo un ramo d'iperbole.

L'origine è sempre posta in corrispondenza ad uno dei fuochi, che nel caso (A) sono coincidenti e nel caso (C) è unico. Inoltre, per quanto riguarda (D), l'origine appartiene alla porzione convessa del piano che è delimitata dal ramo di iperbole. Una giustificazione dettagliata del fatto che l'equazione (2.8) rappresenta effettivamente un'ellisse, quando $e \in (0,1)$, è riportata in appendice A. La trattazione degli altri casi è lasciata al lettore (come piacevole esercizio).

2.2. **Conseguenze della seconda legge di Keplero.** Innanzitutto, la seconda legge di Keplero deve essere decodificata, perché è espressa in un linguaggio che può apparire obsoleto. L'*area spazzata* in un generico intervallo di tempo $[t_0, t]$ è racchiusa, da un lato, dal raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta al tempo t_0, dall'altro lato da quello stesso vettore al tempo t e, infine, dalla parte di curva che rappresenta l'orbita descritta dal pianeta tra t_0 e t. Graficamente, possiamo rappresentare l'*area spazzata* come quella porzione di piano colorata di rosso in figura 2, dove si intende che il Sole occupa l'origine del sistema di riferimento. Per poterne calcolare la superficie, è conveniente concentrarsi sul differenziale dell'area spazzata $\mathrm{d}\mathcal{A}$, descritto dal raggio vettore tra un tempo t e $t + \mathrm{d}t$, ovvero la parte colorata di blu in figura 2. Si comprende facilmente che $\mathrm{d}\mathcal{A}$ può essere ben approssimato dall'area del settore circolare di raggio ϱ (cioè la distanza tra il Sole e il pianeta al tempo t) e ampiezza $\mathrm{d}\vartheta$; integrando tutti i contributi infinitesimali all'area spazzata, possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\int_{\vartheta(t_0)}^{\vartheta(t)} \mathrm{d}\psi\, \varrho^2(\psi)\ . \tag{2.9}$$

Si noti che nella formula precedente, all'interno dell'integrale abbiamo espresso la distanza ϱ in funzione dell'angolo; ciò è sicuramente possibile grazie alla prima legge di Keplero (si pensi all'equazione (2.8)).

La locuzione *"il raggio vettore, che congiunge il Sole con un pianeta, spazza aree uguali in tempi uguali"* è meno bizzarra di quel che può sembrare: applichiamola per esempio a due intervalli di tempo infinitesimali $[t_1, t_1 + \mathrm{d}t]$ e $[t_2, t_2 + \mathrm{d}t]$ (con $t_1\,,\, t_2 \in \mathbb{R}$ qualsiasi). La seconda legge di Keplero afferma quindi che il rapporto incrementale non dipende dal tempo, cioè la velocità areolare $\dot{\mathcal{A}}$ è uguale a una costante c. Possiamo finalmente descrivere questa legge con un'equazione completamente esplicita, effettuando la derivata di (2.9) rispetto al tempo, in modo tale da ottenere:

$$\frac{1}{2}\varrho^2\dot{\vartheta} = c\ . \tag{2.10}$$

Confrontando l'equazione precedente con la seconda che compare in formula (2.7) siamo in grado di provare immediatamente la seguente

Proposizione 2.1. *La seconda legge di Keplero sussiste se e solo se la componente tangenziale della forza F_ϑ è identicamente nulla.*

Ovviamente, nel caso dei moti planetari, la costante c è diversa da zero (altrimenti, il concetto stesso di "area spazzata" perderebbe senso). Ne segue che $\varrho \neq 0$ (si pensi alla (2.10)), cioè la distanza dal centro di attrazione non si può annullare. Inoltre, anche

$$\dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2} \neq 0\ . \tag{2.11}$$

La formula precedente ci consente di esprimere la seguente

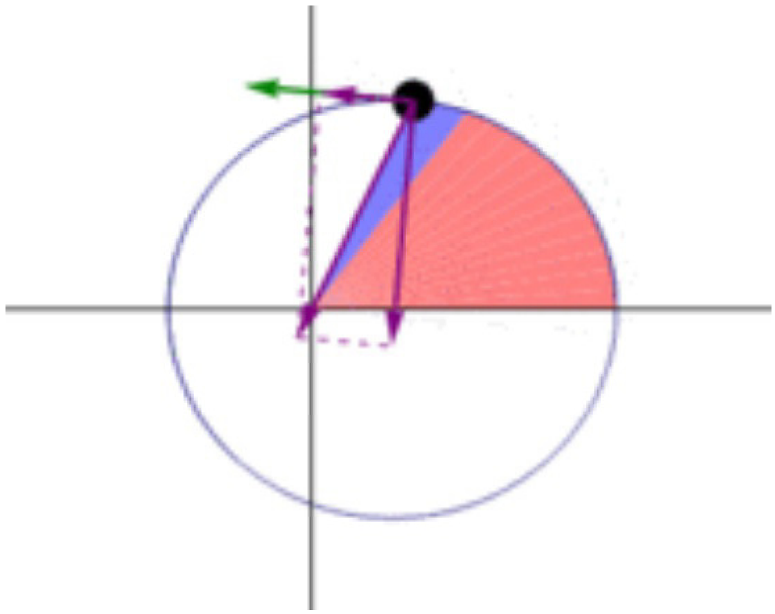

FIGURE 2. Illustrazione schematica del concetto di area spazzata dal raggio vettore che congiunge il centro di attrazione (che è posto nell'origine e può rappresentare, ad es., il Sole) con un punto materiale (ad es., un pianeta), che ruota attorno ad esso. Immagini prese dal sito `http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion`, dove sono reperibili altre informazioni riguardanti le leggi di Keplero.

Osservazione 2.2. *La legge del moto $t \mapsto \vartheta(t)$ è monotona e, quindi, invertibile.*

Si ricordi anche che questo fatto era già implicitamente contenuto nella prima legge di Keplero (cioè in (2.8)) e in (2.9), dove la distanza è espressa in funzione dell'angolo ϑ.

Siccome si può esprimere il tempo t in funzione dell'angolo, risulta naturale riconsiderare anche la prima delle due equazioni di Newton (2.7) e riformularla in modo tale che compaiano solo le coordinate polari ϱ e ϑ . Cominciamo dalla velocità radiale:

$$\dot{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\,\varrho}{\mathrm{d}\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\,\varrho}{\mathrm{d}\vartheta} = -2c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \ .$$

Conseguentemente, possiamo riscrivere il primo termine dell'accelerazione radiale come segue:

$$\ddot{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\,\dot{\varrho}}{\mathrm{d}\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\,\dot{\varrho}}{\mathrm{d}\vartheta} = -\frac{4c^2}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \ .$$

Infine, nel membro sinistro della prima equazione del sistema (2.7), compare anche il termine $-\varrho\dot{\vartheta}^2$ che può essere riscritto nel modo seguente:

$$-\varrho\dot{\vartheta}^2 = -\varrho\left(\frac{2c}{\varrho^2}\right)^2 = -\frac{4c^2}{\varrho^3} \ .$$

Utilizzando le ultime due equazioni che abbiamo appena dedotto, possiamo finalmente scrivere l'accelerazione radiale in funzione delle sole coordinate radiali:

$$a_B = \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\vartheta}^2 = -\frac{4c^2}{\varrho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho}\right] \ . \tag{2.12}$$

Quest'ultima è universalmente nota come formula dell'*accelerazione di Binet*.

Proprio per la definizione stessa dell'accelerazione di Binet, possiamo esprimere la componente radiale della forza nella forma $F_\varrho = ma_B$. Ciò ci consente di calcolarne l'espressione, utilizzando proprio l'equazione (2.12) e la prima legge di Keplero (2.8):

$$F_\varrho = -m\frac{4c^2}{\varrho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\left(\frac{1+e\cos\vartheta}{p}\right) + \frac{1+e\cos\vartheta}{p}\right] = -\frac{4c^2}{p}\frac{m}{\varrho^2} \ . \tag{2.13}$$

Abbiamo quindi ottenuto un primo importantissimo successo; infatti, l'equazione precedente stabilisce quale è la dipendenza funzionale della forza dalle coordinate polari (cioè ϱ e ϑ) che individuano la posizione del pianeta: la *forza non dipende dall'angolo ϑ ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza ϱ*. Inoltre, essa è ovviamente centripeta, cioè è attrattiva verso il Sole che è situato nell'origine (si ricordi che $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{e}_\varrho$, perché la componente tangenziale è nulla, e si osservi che il valore di $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\varrho = F_\varrho$ è sempre negativo).

2.3. **La legge di attrazione gravitazionale come soluzione del problema inverso di Keplero.** La terza legge di Keplero ci consente di riesprimere in modo più significativo il coefficiente $4c^2/p$ (che compare nel membro destro di (2.13) ed è un rapporto di parametri orbitali, ovvero, essi dipendono solo dall'orbita descritta dal pianeta e dalla legge oraria con cui essa viene percorsa). A questo scopo, è conveniente esprimere la velocità areolare c (che è costante per la seconda legge di Keplero) come il rapporto dell'area racchiusa dall'orbita ellittica (di semiassi a e b) e il periodo di tempo T necessario a percorrerla; possiamo quindi scrivere

$$\frac{4c^2}{p} = 4\pi^2\frac{a^2b^2}{pT^2} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2} \ ,$$

dove abbiamo utilizzato $p = b^2/a$ (cioè l'equazione (A.10), che fornisce una relazione puramente geometrica tra alcuni dei parametri che definiscono l'orbita ellittica). La terza legge di Keplero afferma proprio che il rapporto che appare nell'ultimo membro della formula precedente, ovvero a^3/T^2, *non dipende* dal pianeta, quindi la quantità $\Gamma = 4c^2/p$ sarà una costante caratteristica di tutto il nostro sistema planetario. Siamo allora portati a pensare che Γ dipenda essenzialmente dal Sole. Infine, possiamo riassumere il senso di questa discussione con la seguente

Proposizione 2.3. *Il Sole (posto nell'origine di un sistema di riferimento inerziale) attrae ciascun pianeta di massa m con una forza centripeta tale che*

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\Gamma m}{\varrho^2}\boldsymbol{e}_\varrho \ .$$

Prima di cominciare ad esultare, dobbiamo considerare anche le conseguenze del *principio di azione e reazione*, che finora è stato trascurato ma fa parte delle tre *leggi fondamentali della dinamica* e, quindi, del problema inverso di Keplero. Se il

Sole attrae il pianeta, allora anche quest'ultimo (per quanto piccolo) deve attrarre il Sole con una forza uguale e contraria, cioè tale che

$$-\boldsymbol{F} = \frac{\gamma M}{\varrho^2}\boldsymbol{e}_\varrho \ ,$$

dove M è la massa del Sole e γ è una costante che dipenderà dal pianeta. Il modo più semplice di mettere in accordo quest'ultima equazione con la proposizione 2.3 richiede di *postulare* che

$$\gamma M = \Gamma m = GMm \ ,$$

dove G è una costante che non dipende né dal Sole e nemmeno dal pianeta.

La situazione può apparire assai intricata, ma mettere un po' di ordine è meno difficile di quel che sembra. Innanzitutto, osserviamo che le forze di attrazione dipendono dalla distanza, ovviamente, ma anche dalle masse. L'intuizione fisica porta quindi a pensare che l'attrazione gravitazionale non è solo quella che spinge ciascun pianeta verso il Sole (e viceversa), ma è una forza che viene esercitata tra qualsiasi coppia di corpi dotati di *massa*. In questo senso essa è *universale* e *non è limitata ai soli corpi che si muovono nel cielo* (cha anticamente aveva uno status particolare, dove tutto era perfetto). L'intuizione ci porta quindi ad interpretare la situazione in modo da formulare la seguente

Proposizione 2.4. *(Legge di gravitazione universale). Ciascun punto materiale P_1 dotato di massa m_1 esercita su un qualsiasi altro punto materiale P_2 di massa m_2 una forza attrattiva tale che*

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{\overline{P_1P_2}^{\,2}}\,\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}} \ .$$

Nella formula precedente, ovviamente, $\overrightarrow{P_1P_2}$ denota il vettore orientato che connette P_1 a P_2, mentre $\overline{P_1P_2}$ è la distanza tra quei due punti; quindi, la quantità vettoriale $\overrightarrow{P_1P_2}/\overline{P_1P_2}$ altro non è che il versore che identifica la direzione spaziale da P_1 verso P_2. Si noti che la formulazione della *legge di gravitazione universale* è consistente con il *principio di azione e reazione*, perché alla forza $\boldsymbol{F}_{1,2}$ esercitata da P_1 su P_2 corrisponde la reazione uguale e contraria $\boldsymbol{F}_{2,1}$ con cui P_2 attrae P_1. L'universalità della legge di gravitazione fu confermata dall'esperimento di Cavendish del 1798, il quale mostrò (con una bilancia di torsione) che due qualsiasi corpi sferici si attraggono. Quell'esperimento permise anche di misurare la costante di gravitazione universale, il cui valore approssimato alla terza cifra significativa è

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \ . \tag{2.14}$$

Da un lato, siamo sicuramente soddisfatti, perché questa discussione ci ha permesso di comprendere come è stato ottenuto un risultato fondamentale nella storia della scienza; dall'altro lato, probabilmente, ci sentiamo franare il terreno sotto i piedi. Infatti, abbiamo già più volte osservato che anche ciascuno dei pianeti attrae a sé il Sole, che quindi *non può costantemente rimanere nell'origine*. Ciò significa che il modello di moti centrali che abbiamo studiato è *incoerente*: una delle sue assunzioni che abbiamo effettuato (cioè, appunto, la quiete del Sole), quando abbiamo definito il nostro sistema di riferimento (all'inizio della sezione 2.1) è in disaccordo con il risultato fondamentale che abbiamo ottenuto. Non ci resta altra strada se non quella che richiede di introdurre un modello più elaborato. Questo sarà l'oggetto del nostro studio, nel paragrafo seguente.

3. Il problema dei due corpi in reciproca attrazione gravitazionale

Appendix A. Ellissi in coordinate polari

Fondamentalmente, in questa appendice vogliamo ricondurre l'equazione (2.8) alla forma canonica delle ellissi in coordinate cartesiane. A questo scopo, cominciamo a riscrivere la (2.8) nel modo seguente:

$$\varrho + e\varrho\cos\vartheta = p \ , \tag{A.1}$$

dove ricordiamo che (ϱ, ϑ) denota la coppia di coordinate polari, p è il parametro della conica, mentre l'eccentricità e (nel caso delle ellissi) è tale che

$$0 < e < 1 \ . \tag{A.2}$$

Per la definizione (2.1) delle coordinate polari, si ha che $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varrho\cos\vartheta = x$; quindi, l'equazione (A.1) può essere ulteriormente riscritta in coordinate cartesiane, in modo da ottenere

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex \ . \tag{A.3}$$

Dopo aver imposto la *condizione di esistenza* delle soluzioni, cioè

$$ex \le p \ , \tag{A.4}$$

possiamo elevare al quadrato ambo i membri di (A.3):

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2 \ . \tag{A.5}$$

Allo scopo di adattare l'equazione precedente alla forma canonica di un'ellisse, è conveniente riscriverla come segue:

$$(1 - e^2)x^2 + 2epx + \frac{e^2p^2}{1 - e^2} + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \ , \tag{A.6}$$

dove l'assunzione (A.2) ci assicura che il termine $1 - e^2$ (che compare due volte a denominatore) è positivo. Il membro di sinistra dell'equazione (A.6) è evidentemente formato da una somma di quadrati, quindi è naturale riadattarla ulteriormente come segue:

$$\frac{\left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1 \ . \tag{A.7}$$

Abbiamo quindi ottenuto quel che cercavamo, l'equazione precedente descrive un'ellisse con centro di simmetria[2] in

$$\left(-\frac{ep}{1 - e^2}\, , 0\right) \tag{A.8}$$

e semiassi

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \ , \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \ . \tag{A.9}$$

[2] Per maggior chiarezza, si introducano le due nuove variabili $\xi = x + ep/(1 - e^2)$, $\eta = y$ e si osservi che l'equazione (A.7) viene trasformata nella forma canonica di un'ellisse, cioè $\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1$, dove i semiassi a e b sono proprio quelli definiti in (A.9).

Sia a che b sono ben definiti e positivi, perché $0 < e < 1$ (come abbiamo assunto in (A.2)); inoltre, per la stessa ragione, si verifica facilmente che $a > b$, cioè a è proprio il semiasse maggiore. Osserviamo che dalle formule (A.8)–(A.9) segue che $x \le a - ep/(1-e^2)$, quindi possiamo scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$ex \le e\left(a - \frac{ep}{1-e^2}\right) \le \frac{ep(1-e)}{1-e^2} = \frac{e}{1+e}p < p \ ;$$

abbiamo così provato *a posteriori* che la soluzione è consistente con la corrispondente condizione di esistenza (A.4).

Dalla formula (A.9) si deduce la seguente definizione del parametro p della conica, che si rivela essere piuttosto utile perché è espressa in termini puramente geometrici (cioè in funzione dei semiassi):

$$p = \frac{b^2}{a} \ . \tag{A.10}$$

Al fine di poter discutere correttamente le conseguenze della prima legge di Keplero, è utile localizzare i fuochi dell'ellisse, che si trovano sulla stessa ordinata del centro di simmetria, da cui entrambi distano $\sqrt{a^2-b^2}$. Sapendo che il centro di simmetria è quello riportato in (A.8), possiamo calcolare le coordinate dei fuochi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{ep}{1-e^2} \pm \sqrt{a^2-b^2}\,,\,0\right) &= \left(-\frac{ep}{1-e^2} \pm \sqrt{\frac{\big[1-(1-e^2)\big]p^2}{(1-e^2)^2}}\,,\,0\right) \\ &= \left(-\frac{ep}{1-e^2} \pm \frac{ep}{1-e^2}\,,\,0\right) \ .\end{aligned} \tag{A.11}$$

Possiamo quindi riassumere i risultati descritti in questa appendice, affermando che l'equazione in coordinate polari $\varrho = p/(1+e\cos\vartheta)$ (cioè la (2.8)), quando $0 < e < 1$, è equivalente alla forma canonica (A.7), la quale descrive un'ellisse, di cui uno dei due fuochi (quello più a destra) è nell'origine; inoltre, i valori dei suoi semiassi $a > b$ sono quelli riportati in formula (A.9).

References

[1] Newton, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy.* Vol. 1,2. Translation by Motte, revised by Cajori. University of California Press, Berkeley, CA, 1962.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
E-mail address: `liverani@mat.uniroma2.it`

Ugo Locatelli, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
E-mail address: `locatell@mat.uniroma2.it`