

**CENNI DI TEORIA GRAVITAZIONALE:
DAI PUNTI MATERIALI AI CORPI ESTESI E RITORNO**

CARLANGELO LIVERANI AND UGO LOCATELLI

1. GENERALITÀ

La forza di attrazione gravitazionale che un *punto materiale*¹ situato in $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_2 esercita su di un punto materiale posto in $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_1 è data da

$$(1.1) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G \frac{m_1 m_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3},$$

dove G è una costante universale che deve essere determinata sperimentalmente. In questa nota ci vogliamo, inizialmente, occupare del seguente semplice problema. Consideriamo un pianeta sferico consistente di un insieme molto grande di punti materiali molto vicini tra di loro. Quale è la forza \mathbf{F} esercitata dal pianeta su un punto materiale di massa m che sta ad una altezza $h > 0$ rispetto alla superficie del pianeta stesso?

2. UN NUMERO MOLTO GRANDE DI PUNTI MATERIALI?

Il modello del pianeta è stato lasciato un poco troppo nel vago, per fare un conto matematico occorre renderlo assai più preciso. In generale dobbiamo discutere la distribuzione di massa di un corpo esteso. Cominciamo da un semplice esempio: un solido descritto da un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ con struttura cristallina, ovvero formato di punti materiali, tutti di ugual massa m_ε , disposti ai vertici di un reticolo² cubico³ di passo ε . Più precisamente il pianeta è composto dai punti materiali $\{\varepsilon \mathbf{z}\}_{\mathbf{z} \in A_\varepsilon}$ dove $A_\varepsilon = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 : \varepsilon \mathbf{z} \in A\}$. Dunque, la sua massa totale è

$$M_A = \sum_{\mathbf{z} \in A_\varepsilon} m_\varepsilon.$$

Esercizio 2.1. *Si mostri che se ∂A è abbastanza regolare (spiegare che significa), allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \#A_\varepsilon \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{z} \in A_\varepsilon} \varepsilon^3 = \int_A 1 dx$, ovvero la misura di Peano-Jordan di A .*

Ne segue che M_A è essenzialmente indipendente da ε a patto che $m_\varepsilon = \rho \varepsilon^3$ e che ε sia molto piccolo.

¹ Per *punto materiale* si intende un oggetto idealizzato che ha massa ma non estensione, ovvero la cui estensione è trascurabile rispetto a tutte le altre grandezze che si stanno considerando.

² Un reticolo è un sottogruppo di \mathbb{R}^3 . In generale si può scrivere come $\{av_1 + bv_2 + cv_3\}_{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3}$ dove $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

³ Significa che $v_1 = \ell(1, 0, 0)$, $v_2 = \ell(0, 1, 0)$ e $v_3 = \ell(0, 0, 1)$ per un qualche $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ detto *passo del reticolo*.

Esercizio 2.2. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 2.1 valgono anche se i punti materiali sono disposti su di un reticolo non cubico (per esempio la cella unitaria è un parallelepipedo oppure un cilindro a base esagonale). Oppure se ci sono due (o più) tipi di punti materiali con masse diversi disposti regolarmente sul reticolo.*

Esercizio 2.3. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 2.1 valgono anche se i punti materiali sono distribuiti casualmente con una distribuzione uniforme. (Suggerimento: si usi la legge dei grandi numeri [appena vi è stata spiegata nel corso di probabilità].)*

In tutti questi casi $m_\varepsilon = M_A(\#A_\varepsilon)^{-1} = \rho\varepsilon^3$, per ogni regione A sufficientemente regolare. Il numero ρ è la *densità* del solido e ha le dimensioni kg/m^3 .

Si noti che la proprietà essenziale che permette di definire la densità è l'omegenità del materiale. Questo significa assumere che la disposizione della massa è *essenzialmente* invariante per traslazioni.⁴ Per capire che significa *essenzialmente* occorre una piccola digressione sulle scale della nostra descrizione del mondo. Al momento abbiamo due scale: una *microscopica* (ε) e una *macroscopica* (1), queste differiscono per vari ordini di grandezza ed è quindi naturale considerare scale intermedie (oggi molto di moda in quanto relate alle *nanotecnologie*). Tale scala è chiamata *mesoscopica* ed ha la caratteristica di essere grande dal punto di vista microscopico ma molto piccola da quello macroscopico.⁵ Nel nostro caso assumeremo che tale scala sia data da ε^b per un qualche $b \in (0, 1)$ (tipicamente, per semplicità $b = \frac{1}{2}$). Data una regione $A \subset \mathbb{R}^3$, $0 \in A$, con bordo regolare e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si definisca $A_{\varepsilon,b,\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^{-b}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in A\}$. Si tratta di una copia riscalata di A traslata nel punto \mathbf{a} . La cosa interessante è che molto spesso le proprietà sulla scala mesoscopica non dipendono dai dettagli della struttura microscopica (nel nostro caso il tipo di reticolo o di distribuzione, magari causale, dei punti materiali).

Esercizio 2.4. *Con la notazione precedente, si mostri che per ogni scelta della struttura microscopica precedentemente discussa, detta $m(\varepsilon, \mathbf{a})$ la massa di $A_{\varepsilon,b,\mathbf{a}}$ si ha*

$$m(\varepsilon, \mathbf{a}) = \rho \text{Vol}(A_{\varepsilon,b,\mathbf{a}}) + o(\varepsilon^{3b}) = \rho\varepsilon^{3b} \text{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

(Suggerimento: per gli argomenti precedenti dove ε è sostituito da ε^b più un cambio di variabile per la seconda uguaglianza.)

Il fatto che la massa non dipenda da \mathbf{a} esprime esattamente quello che si intende per *materiale omogeneo*.

Tuttavia i corpi che ci circondano non sono omogenei, dunque come descriverli? Una semplice possibilità è di assumere che siano *localmente omogenei*. Questo significa che

$$m(\varepsilon, \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{a})\varepsilon^{3b} \text{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

con $\rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Nel seguito assumeremo che i corpi che consideriamo abbiano localmente una struttura come sopra. Dunque assumiamo che ad ogni punto \mathbf{x} del

⁴ Per traslazione si intende una mappa $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del tipo $T\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ per qualche $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

⁵ Tipicamente questi *microscopico* e *macroscopico* differiscono di vari ordini di grandezza, ad esempio un fattore $\varepsilon = 10^8$. Mentre la scala *mesoscopica* è tale da essere difficilmente distinguibile dal punto di vista macroscopico ma molto grande da quello microscopico, ad esempio se la scala macroscopica è di ordine 1, potrebbe essere 10^{-4} .

solido sia associata una densità $\rho(\mathbf{x})$ e che tale densità vari in modo continuo nel solido.⁶

3. FORZA PRODOTTA DA UN CORPO SOLIDO A SIMMETRIA SFERICA AL SUO ESTERNO

Per fissare le idee, consideriamo un pianeta tale che la sua densità ρ sia sfericamente simmetrica, ovvero $\rho = \rho(\|\mathbf{x}\|)$. Per esprimere la forza, è conveniente scegliere le coordinate in modo che il punto materiale abbia coordinate $\mathbf{x} = (0, 0, R+h)$. Con le ipotesi precedenti, detto $S_\varepsilon \subset S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 ; \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ l'insieme delle posizioni dei punti materiali (che sono assunti avere una distanza di ordine ε) si ha che la forza esercita sul punto è data da

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \sum_{\mathbf{z} \in S_\varepsilon} G \frac{m m_\varepsilon(\mathbf{z})(\mathbf{z} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^3}.$$

Possiamo allora introdurre un reticolo di passo $\sqrt{\varepsilon}$ (la nostra scala mesoscopica) che consiste di un cubo di lato $\sqrt{\varepsilon}$ attorno ad ogni punto $\sqrt{\varepsilon}\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$. Per quanto detto nella sezione precedente la massa in tale cubetto sarà data da $\rho(\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{z}\|)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Dunque, ponendo $\hat{S}_\varepsilon = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 : \sqrt{\varepsilon}\mathbf{z} \in S\}$, poichè $h > 0$,

$$(3.1) \quad \mathbf{F}_\varepsilon = \sum_{\mathbf{z} \in \hat{S}_\varepsilon} G \frac{m \rho(\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{z}\|)\varepsilon^3 (\sqrt{\varepsilon}\mathbf{z} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \sqrt{\varepsilon}\mathbf{z}\|^3} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(1).$$

Esercizio 3.1. *Si mostri che il limite $\mathbf{F} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_\varepsilon$ esiste e*

$$(3.2) \quad \mathbf{F} = Gm \int_S \frac{\rho(\|\mathbf{z}\|)(\mathbf{z} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^3} dz.$$

(Suggerimento: si riconosca che (3.1) è una somma di Riemann e che la funzione integrata è continua poichè $h > 0$).

Dunque, anche la forza di gravità non dipende in maniera significativa da ε , se ε è sufficientemente piccolo.

Ci proponiamo ora di calcolare l'integrale in (3.2).

Esercizio 3.2. *Si mostri, usando le coordinate sferiche, che l'integrale in (3.2) si scrive come*

$$(3.3) \quad \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \rho(r) r^2 \sin \varphi \frac{(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi - R - h)}{[r^2 - 2(R+h)r \cos \varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Inoltre, si verifichi che le prime due componenti del vettore in (3.3) sono nulle. (Suggerimento, si usi il teorema di Fubini e si integri in $d\theta$).

⁶ Questo fa parte del nostro modello di un corpo solido. Le ragioni del cambio di densità possono essere molteplici. Ad esempio il passo del reticolo può cambiare su scala mesoscopica (ad esempio a causa della pressione), oppure si ha una mistura di due tipi di punti materiali, le cui proporzioni possono cambiare. Ovviamente si possono avere dei salti discontinui di densità (ad esempio per una transizione di fase, e.g., da acqua a ghiaccio, oppure perchè cambia il tipo di materiale, e.g. da ferro a granito). In questo caso, consistentemente con l'uso comune, interpreteremo le discontinuità come superfici di divisione tra corpi diversi.

Esercizio 3.3. *Si mostri che la terza componente che compare in (3.3) si può scrivere nel modo seguente:*

$$-\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr r^2 \rho(r) .$$

Lo svolgimento di quest'ultimo esercizio richiede il calcolo di un integrale piuttosto ostico, ma sicuramente interessante. Invitiamo il lettore a provare a riprodurlo autonomamente; solo dopo diversi tentativi infruttuosi, sarà utile consultare la soluzione riportata nell'appendice A.

Unendo le tre affermazioni riportate negli esercizi 3.1–3.3, si ottiene che

$$(3.4) \quad \mathbf{F} = -\frac{Gm}{(R+h)^2} \left[4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) \right] \mathbf{e}_z = -G \frac{mM_S}{(R+h)^2} \mathbf{e}_z ,$$

dove il versore \mathbf{e}_z (nel sistema di coordinate scelto) individua la direzione congiungente il centro della sfera (occupata dal pianeta) con il punto materiale su cui viene esercitata la forza; inoltre, per un corpo la cui densità è a simmetria sferica, è facile convincersi che la sua massa è tale che $M_S = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r)$. Nel caso particolare di una sfera omogenea, allora $\rho(r) = \rho$ e $M_S = 4\pi R^3 \rho/3$, quindi, la forza è data dalla formula

$$(3.5) \quad \mathbf{F} = -G \frac{mM_S}{(R+h)^2} \mathbf{e}_z = -G \frac{4\pi \rho m R^3}{3(R+h)^2} \mathbf{e}_z .$$

Si osservi inoltre che la formula (3.4) non presenta alcun problema di discontinuità per $h = 0$. Questo significa che la forza esercitata su un oggetto posto esattamente sulla superficie di un pianeta, è proprio quella espressa in (3.4) quando $h = 0$; questa conclusione può essere completamente giustificata, interpretando il secondo membro di (3.2) come un integrale improprio per $h \rightarrow 0^+$.

L'equazione (3.4) ci consente di trarre una prima importantissima conclusione (dovuta a Newton, si veda [1, Proposizione VIII–Teorema VIII, Vol. 2]): *il punto materiale è soggetto alla stessa forza che sentirebbe se il pianeta (la cui densità di materia è assunta essere sfericamente simmetrica) fosse un punto materiale di massa M_S posto al centro dello stesso*. È quindi ben giustificato il modello in cui i pianeti sono punti materiali, persino in casi “estremi” come l'interazione Terra–Luna o lo studio del moto di un satellite artificiale in orbita attorno alla Terra, dove le dimensioni dei corpi non sembrano affatto trascurabili.

Che dire?! Persino Newton ci dovette arrivare gradualmente. Infatti, egli approssimò sicuramente il Sole (!) e i pianeti con punti materiali, quando si trattò di formulare e verificare la legge di gravitazione universale⁷. Porsi il problema dell'universalità, significava chiedersi se la forza di gravità soddisfacesse le stesse leggi sia per i corpi celesti che per gli oggetti attorno a noi. Ai nostri giorni, la risposta affermativa appare scontata, allora non lo era affatto. Questa è la vera questione celata dietro al famoso aneddoto della mela di Newton: l'accelerazione verso il basso cui è soggetto un corpo che cade, ad esempio, da un albero può essere spiegata come effetto della stessa attrazione gravitazionale, che il pianeta Terra esercita su altri corpi celesti? Per quanto riguarda la caduta dall'albero, però, non

⁷La genesi della legge di gravitazione universale fu piuttosto laboriosa e richiese parecchio tempo, come testimoniato dal manoscritto di Newton *De motu corporum in gyrum*, antecedente di 3 anni rispetto alla pubblicazione dei *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, pubblicato per la prima volta nel 1687 (si veda [1] per una traduzione in inglese).

aveva senso *assumere a priori* che la Terra potesse essere sostituita da un corpo puntiforme. Ciò è possibile solo *in seguito a una giustificazione rigorosa*, che Newton riportò appunto in Proposizione VIII–Teorema VIII del Vol. 2 dei *Principia* e che noi abbiamo ridimostrato grazie agli esercizi 3.1–3.3.⁸ Il “problema della mela di Newton” è comunemente riformulato, ai giorni nostri, nel modo seguente.

Esercizio 3.4. *Si calcoli l’accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, dopo aver effettuato le seguenti approssimazioni:*

- (A) *la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R_T = 6,375 \times 10^6$ m;*
- (B) *l’orbita della Luna sia una circonferenza di raggio $R = 3,844 \times 10^8$ m;*
- (C) *il periodo di rivoluzione della Luna sia $T = 2,3605 \times 10^6$ s ($\simeq 27,321$ giorni).*

(Suggerimento: si ricordi che, quando l’orbita è circolare, l’attrazione gravitazionale è uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso, alla forza centrifuga $m\omega^2 R$, con $\omega = 2\pi/T$).

La risposta al problema precedente è circa uguale, a meno di un errore dell’1 %, al ben noto valore dell’accelerazione sulla superficie terrestre, cioè $9,8 \text{ m/s}^2$. Un tale accordo tra il valore calcolato e quello atteso è più che soddisfacente, se si ricorda tutto ciò che è stato trascurato (l’eccentricità dell’orbita lunare, l’effetto del moto di rotazione della Terra sull’accelerazione di gravità in superficie, etc.).

4. STUDIO DELLA FORZA ESERCITATA DA UN CORPO SOLIDO A SIMMETRIA SFERICA SIA AL SUO INTERNO CHE AL SUO ESTERNO

Consideriamo ora un particolare solido “cavo al suo interno”, ovvero il guscio sferico $\mathcal{G}_{R_1, R_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 ; R_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq R_2\}$ (talvolta detto anche “corona sferica”), dove i raggi interno ed esterno soddisfano l’ovvia relazione $0 \leq R_1 \leq R_2$.

Esercizio 4.1. *Si mostri che la forza che un guscio sferico, con densità ρ sfericamente simmetrica, esercita su un qualsiasi punto materiale di coordinate $\mathbf{x} = (0, 0, R_1 - h)$ è nulla, quando $0 \leq h \leq R_1$.*

(Suggerimento: si proceda come per gli esercizi 3.1–3.3, avendo cura di completare il ragionamento utilizzando opportuni integrali impropri nei casi $R_1 = 0$ o $R_1 = R_2$ oppure $h = 0$).

Unendo il contenuto della formula (3.4) con il risultato riassunto nel precedente esercizio, si ottiene la seguente proposizione, anche nota come “teorema del guscio sferico”.

Proposizione 4.2. *La forza esercitata da un guscio sferico \mathcal{G}_{R_1, R_2} , con densità ρ sfericamente simmetrica, su un punto materiale P è nulla se la distanza di P dal centro O del guscio è minore o uguale a R_1 , mentre è come se tutto il guscio fosse in O , quando $\overline{OP} \geq R_2$.*

Si noti che, per dimostrare la seconda parte dell’enunciato precedente (cioè sotto l’ipotesi $\overline{OP} \geq R_2$), basta applicare la formula (3.4) con $\rho(r) = 0 \forall 0 \leq r < R_1$ e $R = R_2$.

Siamo finalmente in grado di dare una descrizione completa della forza di attrazione gravitazionale che un pianeta esercita su un punto materiale ovunque situato nello spazio.

⁸ Esercizi che abbiamo risolto grazie al canolo integrale, inventato, non a caso, da Newton.

Teorema 4.3. *Si consideri un corpo di centro O , raggio R e con densità a simmetria sferica $\rho = \rho(r) \forall 0 \leq r \leq R$. Esso esercita su un qualsiasi punto materiale P di massa m una forza di attrazione \mathbf{F} , che è parallela ed equiversa al vettore congiungente P con il centro O . Inoltre, la norma $F = \|\mathbf{F}\|$ è tale che*

(I) *se la distanza r tra O e P è inferiore al raggio R della sfera, allora*

$$F = G \frac{m}{r^2} \left[4\pi \int_0^r dr_1 r_1^2 \rho(r_1) \right] ;$$

(II) *se invece la distanza $r = \overline{OP} \geq R$, allora*

$$F = G \frac{M_S m}{r^2}, \quad \text{dove} \quad M_S = 4\pi \int_0^R dr_1 r_1^2 \rho(r_1) .$$

L'affermazione (II) dell'enunciato di questo teorema altro non è che una riformulazione di quanto dimostrato nella sezione precedente. La parte (I) della tesi può essere facilmente dimostrata, considerando separatamente i contributi alla forza di attrazione che sono dati da due sotto-parti della sfera: una sfera più piccola di raggio r e il guscio sferico $\mathcal{G}_{r,R}$.

La parte (I) della tesi del teorema 4.3 ci consente di discutere un altro interessante risultato. Infatti, l'espressione di F riportata al punto (I) mette in evidenza che è possibile determinare la variazione della densità ρ in funzione del raggio, grazie a un opportuno sistema di misura della forza di gravità (ad esempio, con un dinamometro) all'interno di un pozzo di trivellazione. Ovviamente, dal punto di vista pratico, una tale procedura è sottoposta a fortissime limitazioni: la tecnologia a nostra disposizione consente di effettuare delle trivellazioni di lunghezza trascurabile rispetto al raggio della Terra (per non parlare di quanto sarebbe difficile trasportare una trivella su un altro corpo celeste roccioso). In verità, le variazioni delle misure di gravità riscontrabili vicino alla superficie della Terra o di un pianeta (da una navicella orbitante vicino ad esso) vengono principalmente utilizzati per ricostruire (parzialmente) la disomogeneità della densità interna di quel corpo. Si può facilmente intuire che, però, questo è un problema inverso la cui soluzione è così complicata che esula dagli scopi di queste note.

Inoltre, a partire dal Teorema 4.3, si dimostra immediatamente il seguente

Corollario 4.4. *All'interno di una sfera omogenea di densità ρ , l'intensità della forza \mathbf{F} (di attrazione gravitazionale verso il centro) cresce linearmente con la distanza r dal centro della sfera. Infatti,*

$$F = \|\mathbf{F}\| = G \frac{4\pi m \rho}{3} r .$$

In linea di principio, ogni dispositivo che venisse inserito internamente al corpo celeste per verificare la correttezza della parte (I) del Teorema 4.3 o del Corollario 4.4, turberebbe la assai ipotetica simmetria sferica della distribuzione della materia all'interno del pianeta stesso. Si pensi all'esempio precedentemente discusso del pozzo di trivellazione, lungo il quale verrebbero effettuate misure gravitazionali. Per semplicità, ovviamente, si considerano queste piccole perturbazioni come assolutamente trascurabili e, quindi, si continua a trattare il problema in una (ideale) situazione di simmetria sferica. Quest'ultima discussione dovrebbe aiutarci a comprendere che il prossimo problema è risolvibile, sebbene possa sembrare veramente strampalato.

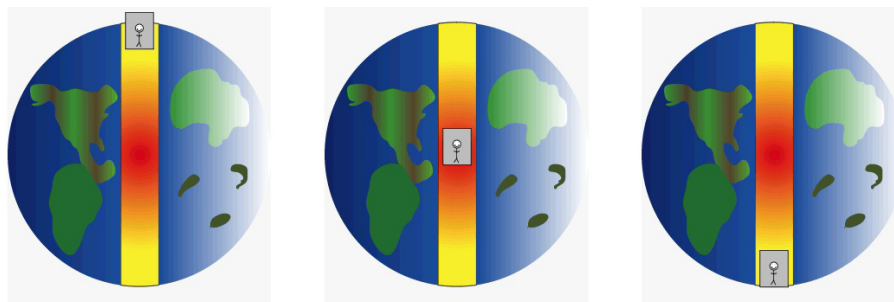


FIGURE 1. Illustrazione schematica di un ascensore gravitazionale che collega il polo nord della Terra a quello sud. Immagini prese dal sito http://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_train, dove sono reperibili molte altre informazioni riguardanti questo ipotetico progetto.

Esercizio 4.5. Verificare se è realistico che un ipotetico ascensore gravitazionale come quello che viene usato nel film di fantascienza “Total recall” (del 2012) impieghi circa 20 minuti per effettuare un viaggio di sola andata tra una stazione e quella situata ai suoi antipodi. A questo scopo si effettuino le seguenti approssimazioni:

- (A) la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R_T = 6,375 \times 10^6$ m;
- (B) l'accelerazione dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre sia uguale a $9,8 \text{ m/s}^2$ in qualunque punto della sua superficie.

Svolgimento (traccia). Per realizzare un ascensore gravitazionale, ci vorrebbe innanzitutto una condotta di forma cilindrica il cui asse è perfettamente allineato a un diametro della “sfera” terrestre. All'interno di questa condotta, una cabina priva di motore (oltre che completamente incurante della pressione e della temperatura al centro della Terra) oscilla da un estremo all'altro, senza essere soggetta ad alcun attrito. Facendo riferimento alla situazione schematica di un ascensore gravitazionale così come riportata in figura 1, quando la cabina di massa m si trova a quota z rispetto al centro della Terra (posto nell'origine del sistema di riferimento), allora si comprende facilmente che essa è soggetta a una forza

$$\mathbf{F} = -kz\mathbf{e}_z \quad \text{dove} \quad k = G \frac{4\pi m\rho}{3}$$

(altro non è che una semplice applicazione del corollario 4.4). Il moto sull'asse z della cabina sarà quindi come quello di un (gigantesco) oscillatore armonico di costante elastica k , che oscilla tra R e $-R$. Il tempo che si richiede di valutare è quello di un semiperiodo, cioè $\pi\sqrt{m/k}$. Quando la cabina si trova in uno dei due poli, i dati del problema consentono di determinare il rapporto k/m e, quindi, di risolvere il problema. \square

APPENDIX A. ALCUNI DETTAGLI TECNICI

Svolgimento dell'esercizio 3.3. Dapprima, si integri la terza componente che compare in (3.3) rispetto a θ ; successivamente, si effettui la sostituzione $\eta = R+h-r \cos \varphi$; inoltre, integrando per parti, si giustifica la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
& \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \rho(r) r^2 \sin \varphi \frac{r \cos \varphi - R - h}{[r^2 - 2(R+h)r \cos \varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{R+h} \left\{ \eta [r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2] \right\}^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\eta=R+h-r}^{\eta=R+h+r} \\
&\quad - 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{R+h} \int_{R+h-r}^{R+h+r} d\eta \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2}} \\
&= 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{R+h} \left(\frac{R+h+r}{|R+h+r|} - \frac{R+h-r}{|R+h-r|} \right) \\
&\quad - 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{(R+h)^2} (|R+h+r| - |R+h-r|) = -\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr r^2 \rho(r) .
\end{aligned}$$

□

REFERENCES

- [1] Newton, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Vol. 1,2. Translation by Motte, revised by Cajori. University of California Press, Berkeley, CA, 1962.

CARLANGLO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it

UGO LOCATELLI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: locatelli@mat.uniroma2.it