ALCUNI FATTI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

CARLANGELO LIVERANI

1. Generalità

Una equazione differenziale (del primo ordine) è una relazione del tipo

$$f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

che deve valere per ogni t in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Dove $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{R})$.[1] Questa formulazione è un poco troppo generale per essere utile. Solitamente si è interessati a casi in cui $\partial_y f(x, y, t) \neq 0$. In questa situazione è possibile (nell'intorno di un punto (x, y, t)) applicare il teorema della funzione implicita e scrivere l'equazione differenziale nella forma

$$\dot{x}(t) = V(x(t), t). \tag{1.1}$$

Da ora in poi, per semplicità, supporremo $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$. La funzione V è sovente chiamata *campo vettoriale*. Il caso più semplice è quello in cui V non dipende da x, allora si ha $\dot{x}(t) = V(t)$. Ovvero x è la primitiva di V. È dunque chiaro che (1.1) non ha, in generale, una unica soluzione (ammesso che ne abbia una). Per determinare unicamente la soluzione occorre, almeno, specificare il valore di x ad un tempo fissato. Si ha così quello che viene comunemente chiamato il *problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Allora il teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali afferma che esiste un intervallo aperto $I \ni x_0$ e una funzione $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ tale che (1.2) è soddisfatta in I. Inoltre, qualunque altra funzione differenziabile che soddisfa (1.2) in un intervallo $J \ni x_0$ deve coincidere con x in $I \cap J$.

Si noti che l'intervallo I fa parte delle incognite del problema e potrebbe essere molto piccolo. Si considerino, ad esempio, i problemi unidimensionali

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^a \\ x(0) &= b, \end{aligned} \tag{1.3}$$

con $a, b \geq 0$. Si noti che se $b > 0$, allora la soluzione, per continuità, è diversa da zero per t sufficientemente piccolo. Dunque

$$1 = x^{-a}\dot{x}$$

Date: Versione aggiornata March 21, 2016.

[1] Con $\mathcal{C}^r(A, \mathbb{R}^m)$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n$, e $m, r \in \mathbb{N}$, si intende lo spazio vettoriale delle funzioni da A a $\mathbb{R}^m$ differenziabili r volte in ogni punto e con derivate r-esime continue. In effetti è possibile considerare f meno regolari che $\mathcal{C}^1$, ma rendiamoci la vita semplice.

e integrando entrambi i membri da zero a t si ottiene

$$t = \frac{x(t)^{1-a}}{1-a} - \frac{b^{1-a}}{1-a}.$$

Da cui

$$x(t) = \left[b^{1-a} + (1-a)t\right]^{\frac{1}{1-a}}.$$

Ne segue che se $a > 1$, allora la soluzione esplode per $t = b^{1-a}(a-1)^{-1}$. D'altro canto se $a < 1$, allora x^a non è differenziabile in zero e quindi ci si può aspettare che qualcosa di strano accada. Infatti, sebbene la derivazione sia stata fatta per $b > 0$, si pò controllare che, se $b = 0$, $x(t) = [(1-a)t]^{\frac{1}{1-a}}$ è soluzione. Dunque la soluzione esiste, tuttavia è facile verificare che, per ogni $t_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq t_1 \\ [(1-a)(t-t_1)]^{\frac{1}{1-a}} & \text{for } t > t_1 \end{cases}$$

è $\mathcal{C}^1$ ed è soluzione di (1.3) con $b = 0$. Dunque se il campo vettoriale ha poca regolarità l'unicità delle soluzioni può venire a mancare in maniera abbastanza drammatica.

Si noti che se V non dipende dal tempo e (1.2) ha una soluzione nell'intervallo $I = (a, b)$ e $\sup_{t\in I} \|x(t)\| < \infty$ allora $\sup_{t\in I} \|\dot{x}(t)\| \leq \sup_{t\in I} \|V(x(t))\| < \infty$.

Esercizio 1.1. *Si dimostri che se* $\sup_{t\in I} \|x(t)\| < \infty$*, allora esiste* $\lim_{t\to b} x(t)$ *e* $\lim_{t\to a} x(t)$*. Inoltre, questo implica che l'intervallo di esistenza delle soluzioni può essere esteso.*

2. Disuguaglianza di Gronwall

Poichè abbiamo visto che la soluzione di una equazione differenziale si può sempre prolungare a meno che non esploda, è importante essere in grado di stimare come crescono le soluzioni. Uno strumento fondamentale per questo scopo è il seguente.

Lemma 2.1 (Disuguaglianza integrale di Gronwall)**.** *Siano* $L, T \in \mathbb{R}_+$ *e* $\xi, f \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$*. Se, per ogni* $t \in [0,T]$*,*

$$\xi(t) \leq L \int_0^t \xi(s)\, ds + f(t),$$

allora

$$\xi(t) \leq f(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\, ds.$$

Proof. Consideriamo prima il caso $f \equiv 0$. In tal caso il Lemma afferma semplicemente $\xi(t) \leq 0$. Poichè ξ è una funzione continua, esiste $t_* \in [0, (2L)^{-1}] \cap [0, T] =: I_1$ tale che $\xi(t_*) = \sup_{t\in I_1} \xi(t)$. Allora,

$$\xi(t_*) \leq L \int_0^{t_*} \xi(s)\, ds \leq \xi(t_*) L t_* \leq \frac{1}{2}\xi(t_*)$$

che implica $\xi(t_*) \leq 0$, quindi $\xi(t) \leq 0$ per ogni $t \in I_1$. Se $I_1 = [0,T]$, abbiamo dimostrato quanto volevamo. Altrimenti, ponendo $t_1 := (2L)^{-1}$ si ha

$$\xi(t) \leq L \int_{t_1}^t \xi(s)\, ds$$

e possiamo ripetere il ragionamento precedente per l'intervallo $[t_1, 2t_1]$. Iterando questo modo di procedere si ha $\xi(t) \le 0$ per tutti $t \in [0, T]$.

Il caso generale si riduce a quello appena trattato. Sia

$$\zeta(t) := \xi(t) - f(t) - L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\, ds.$$

Allora

$$\begin{aligned}\zeta(t) &\le L \int_0^t \xi(s)\, ds - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s)\, ds \\ &= L \int_0^t \zeta(s)\, ds + L \int_0^t ds \left\{ f(s) + L \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \\ &\quad - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s)\, ds.\end{aligned}$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\int_0^t ds L \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau)\, d\tau &= L \int_0^t d\tau f(\tau) \int_\tau^t ds e^{L(s-\tau)} \\ &= \int_0^t f(s) \{e^{L(t-s)} - 1\} ds.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\zeta(t) \le L \int_0^t \zeta(s)\, ds.$$

Abbiamo quindi ridotto il problema al caso precedente. Quindi $\zeta(t) \le 0$ da cui segue quello che vogliamo. $\square$

Facciamo una semplice applicazione.

Lemma 2.2. *Per ogni $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, M(d \times d))$,*[2] *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) x(t) \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Allora, ponendo $L_t = \sup_{|s| \le t} \|A(s)\|$, $\|x(t)\| \le e^{L_t t} \|x_0\|$ per tutti $0 \le t \le T$. In particolare, la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Proof. Scriviamo l'equazione in forma integrale: per ogni $t > 0$ e $t_1 < t$

$$\|x(t_1)\| \le \|x_0\| + \int_0^{t_1} \|A(s)x(s)\|\, ds \le \|x_0\| + L_t \int_0^{t_1} \|x(s)\|\, ds.$$

Ponendo $\xi(t_1) := \|x(t_1)\|$ e applicando il Lemma 2.1 si ha il risultato annunciato. $\square$

[2] Con $M(d \times d)$ si intende lo spazio delle matrici reali $d \times d$.

3. Studio qualitativo ingenuo delle equazioni differenziali

Abbiamo visto che il caso più semplice si equazione differenziale corrisponde a trovare la primitiva di una funzione. È ben noto che questo problema non sempre ammette una soluzione esplicita in termini di funzioni elementari. Non è quindi sorprendente che lo stesso capiti (molto più facilmente) per quasi tutte le equazioni differenziali. Tuttavia a volte si possono ottenere precise informazioni qualitative sulla soluzione senza anche senza una formula esplicita. Questo modo di ragionare si chiama *studio qualitativo*. Si tratta di un campo molto vasto e che richiede una notevole teoria, tuttavia nei casi più semplici (quelle che chiamo studio qualitativo ingenuo) lo si può capire facilmente. In fatti, in un certo senso, siete come il tizio che ha scoperto di avere parlato in prosa tutta la vita senza saperlo.

Per cominciare consideriamo il caso $d = 1$. In questo caso la soluzione sarà la funzione reale di una variable $x(t)$. Se vogliamo avere una idea intuitiva di come è fatta ci hanno insegnato che dobbiamo tracciarne il grafico. Ma come si fa a tracciare il grafico? Si studia la derivata. Ora $\dot{x} = V(x,t)$, quindi non c'è nessuna difficoltà a studiare la derivata e tutto quello che sapete su come tracciare il grafico di una funzione si applica immediatamente.

Consideriamo ora il caso $d = 2$. Quanto detto sopra è ancora vero, tuttavia sappiamo che tracciare il grafico di una funzione di due variabile è assai più complicato che tracciare quello di una. Tuttavia esistono trucchi per semplificarsi la vita. Ad esempio, consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= V_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2 &= V_2(x_1,x_2)\end{aligned}$$

con $V_2(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Allora ne seque che x_2 è una funzione invertibile di t e si può quindi usare la coordinata x_2 per parametrizzare il moto invece che t. Questo corrisponde ad ignorare la velocità con cui il moto percorre l'orbita e a concentrarsi solo sulla forma dell'orbita. Così facendo, dopo aver posto $z(x_2(t)) = x_1(t)$, si ottiene

$$z'(x_2) = \frac{V_1(z(x_2),x_2)}{V_2(z(x_2),x_2)}.$$

Ci siamo quindi ridotti al caso di una singola equazione differenziale e le considerazioni sullo studio qualitativo di cui sopra si applicano anche in questo caso.

4. Dipendenza da un parametro

Avendo stabilito l'esistenza e l'unicità delle soluzioni, la prossima domanda naturale è:

Domanda: Come dipendono le soluzioni dalle condizioni iniziali? Come dipendono le soluzioni da un parametro nel campo vettoriale?

Teorema 4.1 (Dipendenza liscia da un parametro)**.** *Sia $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{d+1+m},\mathbb{R}^d)$. Si assuma che esista $C_0 > 0$ tale che $\|\partial_x V\|_{\mathcal{C}^1} + \|\partial_\lambda V\|_{\mathcal{C}^1} < C_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*[3] *Quindi per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V(x,t,\lambda)\\ x(0) &= x_0\end{aligned} \tag{4.1}$$

[3] Data una funzione $f \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R}^k)$ poniamo $\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{z\in A}\|f(z)\|$ e $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \sup_{z\in A}\|\partial_z f(z)\|$.

ammette una soluzione $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$*, chiamiamola* $X(t, x_0, \lambda)$*. Allora, per ogni* $(x_0, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$*,* $X(t, x_0, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$*. Inoltre detto* $\xi(t) = \partial_\lambda X(t, x_0, \lambda)$*,*[4] *si ha*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \cdot \xi(t) + \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)\\ \xi(0) &= 0,\end{aligned} \tag{4.2}$$

Infine, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}^m$*, esistono* $c_1, c_2 > 0$ *tali che, per ogni* $h \in \mathbb{R}^m$ *e* $|t| \le c_1 \ln \|h\|^{-1}$*, si ha*[5]

$$\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t)h\| \le c_2 \|h\|^{\frac{3}{2}}.$$

Proof. Prima di tutto si noti che il campo vettoriale dell'equazione (4.2) è lineare in ξ e dunque, come per (4.1), la soluzione esiste per tutti i tempi e, da una semplice applicazione del Lemma di Gronwall, $\|X(t) - x_0\| \le e^{C_1 t}$ e $\|\xi(t)\| \le e^{C_1 t}$ per una qualche costante $C_1 > 0$.

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che, dati $(t, x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+d+m}$, per ogni $h \in \mathbb{R}^m$ abbastanza piccolo, ponendo $\zeta(t, h, \lambda) := X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t)h$, si ha $\|\zeta(t, h)\| \le C\|h\|^2$ per qualche costante $C > 0$. Da questo segue immediatamente che ξ è il differenziale rispetto a λ di X. Si noti che $\zeta(0) = 0$.

Dalla formula di Taylor al secondo ordine segue che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,[6]

$$\begin{aligned}V(X(t, x_0, \lambda + h), t, \lambda + h) =& V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)\\ &+ \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)(X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda))\\ &+ \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)h\\ &+ \mathcal{O}(\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda)\|^2 + \|h\|^2).\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t, h) &= V(X(t, x_0, \lambda + h), t, \lambda + h) - V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)\\ &\qquad - \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t) \cdot \xi(t)h - \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)h\\ &= \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t) \cdot \zeta(t, h) + R(t)\end{aligned} \tag{4.3}$$

dove $R(t)$ è una funzione continua in t tale che

$$\begin{aligned}\|R(t)\| &\le C_2 \left(\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda)\|^2 + \|h\|^2\right)\\ &\le 2C_2(\|\zeta(t, h)\|^2 + (1 + \|\xi(t)\|^2)\|h\|^2).\end{aligned}$$

Concludiamo usando nuovamente il Lemma di Gronwall. Sia $T_h \ge 0$ il tempo più piccolo per cui $\|\zeta(t, h)\| \le \frac{C_0}{2C_2}$. Allora, per $t \le T_h$, (4.3) implica

$$\|\zeta(t, h)\| \le 2C_0 \int_0^t \|\zeta(s)\| ds + \frac{2C_2}{C_1} e^{2C_1 t} \|h\|^2.$$

Applicando il Lemma 2.1 segue esiste $C_3 > 0$ tale che

$$\|\zeta(t, h)\| \le C_3(e^{2C_1 t} + e^{2C_0 t})\|h\|^2.$$

Si noti che la stima di cui sopra implica che $\lim_{h \to 0} T_h = \infty$. Da questa stima segue sia la differenziabilità che l'ultima stima del Teorema. La continuità della derivata è usualmente ottenuta usando la continuità dalle condizioni iniziali per

---

[4] Si noti che ξ ha valori nell'insieme delle matrici $M(d \times m) \sim \mathbb{R}^{dm}$ e che dipende da λ, x_0. Eviteremo di scrivere $\xi(t, x_0, \lambda)$, ove possibile, per alleggerire la notazione.

[5] La scelta della potenza $\frac{3}{2}$ è completamente arbitraria. Il punto è che si può ottenere qualunque esponente nell'intervallo $(1, 2)$ a patto di scegliere c_1 in maniera opportuna.

[6] Per $a = \mathcal{O}(b)$ qui intendiamo che $\|a\| \le C_2 b$ per una costante fissata indipendente da t.

l'equazione (4.2) (teorema facile, ma che non abbiamo dimostrato). Tuttavia è istruttivo il seguente argomento alternativo: abbiamo visto che esiste una costante $c \geq 2\max\{C_0, C_1\}$ tale che, per ogni $t \leq T$ e per ogni $h, v \in \mathbb{R}^m$ sufficientemente piccoli, si ha

$$
\begin{aligned}
\|[\xi(t,\lambda+v)-\xi(t,\lambda)]h\| \leq\ & \|X(t,x_0,\lambda+h+v)-X(t,x_0,\lambda+v)-\xi(t,\lambda+v)h\| \\
&+\|X(t,x_0,\lambda+h)-X(t,x_0,\lambda)-\xi(t,\lambda)h\| \\
&+\|X(t,x_0,\lambda+h+v)-X(t,x_0,\lambda+h)-\xi(t,\lambda+h)v\| \\
&+\|X(t,x_0,\lambda+v)-X(t,x_0,\lambda)-\xi(t,\lambda)v\| \\
&+\|\xi(t,\lambda+h)v-\xi(t,\lambda)v\| \\
\leq\ & 2ce^{cT}(\|h\|^2+\|v\|^2)+\|\xi(t,\lambda+h)-\xi(t,\lambda)\|\,\|v\|.
\end{aligned}
$$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varepsilon) := \sup_{\|v\|\leq\varepsilon}\|\xi(t,\lambda+v)-\xi(t,\lambda)\| &= \sup_{\frac{1}{2}\|h\|\leq\|v\|\leq\varepsilon} 2^{-1}\varepsilon^{-1}\|[\xi(t,\lambda+v)-\xi(t,\lambda)]h\| \\
&\leq \frac{5ce^{cT}}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\sup_{\|h\|\leq 2\varepsilon}\|\xi(t,\lambda+h)-\xi(t,\lambda)\| \\
&\leq \frac{5ce^{cT}}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta(2\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi mostrare, per induzione,

$$
\Delta(\varepsilon) \leq 5c\varepsilon + 2^{-n}\Delta(2^n\varepsilon).
$$

Scegliendo n tale che $\varepsilon^{-1} \leq 2^n \leq 2\varepsilon^{-1}$ si ha

$$
\Delta(\varepsilon) \leq= 5ce^{cT}\varepsilon + 8\varepsilon \sup_{\|\sigma-\lambda\|\leq 2}\|\xi(t,\sigma)\| \leq (5c+8)\varepsilon e^{cT},
$$

da cui segue

$$
\lim_{\|v\|\to 0}\|\xi(t,\lambda+v)-\xi(t,\lambda)\| = 0
$$

come annunciato. □

Esercizio 4.2. *Provare la prima affermazione del Teorema 4.1 sotto l'ipotesi, più debole, $V \in \mathcal{C}^1$.*

Corollario 4.3 (Dipendenza liscia dalle condizioni iniziali)**.** *Sia $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$, come nel Lemma precedente. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sia $X(t, x_0)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy allora, $X(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e $\xi = \partial_{x_0}X$ è la soluzione di*

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}(t) = \partial_x V(X(t,x_0),t)\cdot\xi(t) \\
&\xi(0) = \mathbb{1}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$, esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che, per ogni $h \in \mathbb{R}^m$ e $|t| \leq c_1 \ln\|h\|^{-1}$, si ha

$$
\|X(t,x_0+h)-X(t,x_0)-\xi(t)h\| \leq C_2\|h\|^{\frac{3}{2}}.
$$

Proof. Si ponga $z = x - x_0$. Allora z soddisfa l'equazione

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = V(z+x_0,t) =: \bar{V}(z,t,x_0) \\
&z(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Si può quindi considerare x_0 come un parametro. Il risultato voluto segue quindi applicando il Teorema 4.1. □

Un problema naturale che appare nello studio della evoluzione delle equazioni differenziali è il seguente: se si considera un insieme di condizioni iniziali, e si osserva il sistema al tempo t, come si è evoluto questo insieme? Questo è in generale un problema molto difficile, tuttavia se uno si accontenta di sapere come cambia la misura dell'insieme a cosa è assai più semplice. Detta infatti $x(t,x_0)$ la soluzione con dato iniziale x_0 e un insieme A, sia $A_t = \{z \in \mathbb{R}^d \,:\, \exists x_0 \in A \text{ tale che } x(t,x_0) = z\}$, allora

$$\int_{A_t} dz = \int_A \det(\partial_{x_0} x(t,x_0))\, dx_0.$$

Il problema si riduce quindi allo studio di $\eta = \det(\xi)$.

Teorema 4.4 (Teorema di Liouville)**.** *Con la notazione di cui sopra*[7]

$$\begin{aligned}\dot\eta &= \mathrm{Tr}(\partial_x V(X(t,x_0),t))\eta\\ \eta(0) &= 1.\end{aligned}$$

Proof. Per comodità poniamo $A(t) = \partial_x V(X(t,x_0),t)$. Poichè $\det(\xi(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1$, per continuità $\eta(t) \neq 0$ per t piccoli. In tal caso calcoliamo[8]

$$\begin{aligned}\det(\xi(t+h)) &= \det(\xi(t) + \dot\xi(t)h + o(h)) = \det(\xi(t) + A(t)\xi(t)h + o(h))\\ &= \det(\mathbb{1} + A(t)h + o(h))\det(\xi(t)) = \det(e^{A(t)h+o(h)})\det(\xi(t)).\end{aligned}$$

Esercizio 4.5. *Si verifichi che per qualsiasi coppia di matrici $d \times d$ A, U, con $\det U \neq 0$, si ha*

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(UAU^{-1}).$$

(Suggerimento, si mostri che, per ogni tre matrici A, B, C, $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.)

Esercizio 4.6. *Si verifichi che per ogni matrice $d \times d$ A si ha*

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

(Suggerimento: si consideri prima il caso in A è diagonalizzabile, poi si consideri il caso in cui presenti blocchi di Jordan.)

Usando i due esercizi precedenti possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\dot\eta(t) &= \lim_{h\to 0} h^{-1}\left[\det(\xi(t+h)) - \det(\xi(t))\right] = \lim_{h\to 0} h^{-1}\left[e^{\mathrm{Tr}(A(t))h+o(h)} - 1\right]\eta(t)\\ &= \lim_{h\to 0}[\mathrm{Tr}(A(t)) + o(1)]\eta(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\eta(t).\end{aligned}$$

□

Sia $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ un campo vettoriale e $\bar x \in \mathbb{R}^d$ tale che $V(\bar x) = 0$. Allora $x(t) = \bar x$ è una soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{aligned}\dot x &= V(x)\\ x(0) &= \bar x.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ci si può quindi chiedere che succede per condizioni inziali che differiscono di poco da $\bar x$. Sappiamo che le soluzioni dipendono con continuità dal dato iniziale e la derivata in $\bar x$ è data dalla soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}\dot\xi &= DV(\bar x)\xi\\ \xi(0) &= \mathbb{1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

[7] Con $\mathrm{Tr}(A)$ si intende la traccia della matrice A, ovvero $\sum_i A_{i,i}$.

[8] Se non conoscete il significato di e^A, fate l'Esercizio 5.3.

Sembra quindi essenziale comprendere per prima cosa le equazioni lineari.

5. Equazioni lineari

Sia A una matrice $d \times d$ e si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^d$. Dalla sezione precedente sappiamo che le soluzioni esistono per tutti i tempi.

Esercizio 5.1. *Si mostri che se $x_1(t), x_2(t)$ sono due soluzioni di $\dot{x} = Ax$ allora anche $\lambda x_1(t)+\mu x_2(t)$ è una soluzione. Si usi tale risultato e l'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali per mostrare che, detta $x(t,x_0)$ la soluzione di (5.1), $x(t,x_0)$ è una funzione lineare di x_0 per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se ne evinca che l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = Ax$ forma uno spazio vettoriale di dimensione d.*

Dal problema precedente segue che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$, possiamo scrivere la soluzione di (5.1) come $x(t,x_0) = \xi(t)x_0$ dove $\xi(t)$ è una matrice $d \times d$. Differenziando si ha che

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi \\ \xi(0) &= \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Esercizio 5.2. *Si definisca $\|A\| = \sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^d} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Si mostri che abbiamo definito una norma nello spazio vettoriale delle matrici $d \times d$. Si mostri che $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. (suggerimento: per induzione).*

Esercizio 5.3. *Si verifichi che la funzione a valori nelle matrici $\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$ è una soluzione di (5.2). (suggerimento: si mostri che la serie converge totalmente, e quindi si derivi allegramente termine a termine)*

Non dovrebbe quindi sorprendere che si usi la notazione $\xi(t) = e^{At}$. Rimane il problema di calcolare il valore della serie. Per semplicità limitiamoci al caso di matrici diagonalizzabili (ovvero assumiamo che A non abbia blocchi di Jordan). Questa assunzione è parzialmente giustificata dal seguente fatto.

Lemma 5.4. *Arbitrariamente vicino ad ad ogni matrice A esiste una matrice senza blocchi di Jordan (in termini tecnici* i blocchi di Jordan non sono generici*).*

Proof. Se la matrice A non ha blocchi di Jordan allora non c'è nulla da dimostrare. Se si, allora esiste una matrice V tale che $B = V^{-1}AV^{-1}$ è in forma normale di Jordan. Si consideri quindi la matrice $B + \varepsilon C$ con $C_{i,j} = i\delta_{i,j}$ e ε arbitrariamente piccolo. Questa ha autovalori tutti distinti ed è simile ad una matrice arbitrariamente vicina ad A. □

Dunque possiamo assumere che esiste V tale che $V^{-1}AV$ è diagonale. Si noti tuttavia che questo è possibile solo sul campo complesso.

Esercizio 5.5. *Si mostri che tutto quanto detto sulle equazioni lineari vale anche se $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Esercizio 5.6. *Si mostri che, posto* $\Lambda = V^{-1}AV$, $e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1}$. *(suggerimenti: 1) si usi nuovamente la convergenza uniforme della serie; oppure 2) si noti che* $\zeta = V^{-1}e^{At}V$ *soddisfa l'equazione* $\dot{\zeta} = \Lambda\zeta$ *).*

Esercizio 5.7. *Si mostri che se* $\Lambda_{i,j} = \lambda_j \delta_{i,j}$ *allora* $\left(e^{\Lambda t}\right)_{i,j} = e^{\lambda_i t}\delta_{i,j}$.

Risulta quindi che l'evoluzione delle soluzioni di (5.1) dipendono solo dagli autovalori della matrice A. In particolare se $\sup_i \Re(\lambda_i) = \lambda_* < 0$, allora $\|e^{At}\| \leq \|V^{-1}\|\|V\|e^{-\lambda_* t}$. In tal caso il punto zero si dice *asintoticamente stabile* perchè tutte le soluzioni tendono asintoticamente a zero.

Esercizio 5.8. *Si mostri che* $(e^{At})^* = e^{A^* t}$.[9] *(suggerimento: si usi lo sviluppo in serie)*

Esercizio 5.9. *Si mostri che gli autovalori di* A^* *sono i complessi coniugati degli autovalori di* A^**, con la stessa molteplicità. Inoltre se* A *ha blocchi di Jordan se e solo se* A^* *ne ha. (suggerimento: si mostri che* A^* *è coniugata a* $\overline{\Lambda}$*)*

Esercizio 5.10. *Dati* $v, w \in \mathbb{C}^d$ *si definisca il prodotto scalare* $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^d \overline{v}_i w_i$. *Si mostri che* $\langle v, Aw\rangle = \langle A^* v, w\rangle$.

Se invece esiste λ_j tale che $\Re(\lambda_j) > 0$, allora zero è *instabile*, infatti se v_j è l'autovettore corrispondente all'autovalore $\overline{\lambda}_j$ di A^* e $\langle v_j, x_0\rangle \neq 0$ allora

$$\langle v_j, e^{At}x_0\rangle = \langle e^{A^* t}v_j, x_0\rangle = \langle e^{\overline{\lambda}_j t}v_j, x_0\rangle = e^{\lambda_j t}\langle v_j, x_0\rangle.$$

Quindi $\lim_{t\to+\infty} |\langle v_j, e^{At}x_0\rangle| = +\infty$. Rimane il caso in cui $\Re(\lambda_j) = 0$ per tutti gli autovalori. Poichè la matrice A in (5.1) è reale, ne segue che tutti gli autovalori di A sono a due a due complessi coniugati.

Esercizio 5.11. *Nel caso di cui sopra si mostri che esiste* $C > 0$ *tale che* $\|e^{At}x_0\| \leq C\|x_0\|$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$. *Ovvero il moto è* stabile *(Suggerimento: si usi nuovamente la matrice* V *che coniuga con una matrice diagonale)*

Il caso in cui A dipende da t è assai più complesso e non ammette soluzione generale a meno che non sia $d = 1$. L'unica cose semplice che si può dire è che i risultati dell'esercizio 5.1 restano validi in questo caso più generale (lo si controlli). Esiste tuttavia un caso molto interessante: il caso in cui $A(t)$ sia periodico, ovvero esista $T > 0$ tale che $A(t + T) = A(t)$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Spendiamo una parola al riguardo. Sia

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) \\ &\xi(0) = \mathbb{1}, \end{aligned}$$

e si supponga che esista una matrice B tale che $\xi(T) = e^{BT}$.[10] Definiamo allora $\eta(t) = e^{-Bt}\xi(t)$.

Esercizio 5.12. *Si mostri che* η *è periodica. (suggerimento: Si verifichi che se la condizione iniziale è* D *invece che* $\mathbb{1}$ *allora la soluzione è* $\xi(t)D$. *Se ne deduca che* $\xi(nT) = \xi(T)^n$.*)*

L'esercizio precedente costituisce un abbozzo della cosiddetta *Teoria di Floquet.*

---

[9] Data una matrice, $d \times d$, B con B^* si intende la matrice aggiunta, cioè $(B^*)_{i,j} = \overline{B}_{j,i}$, dove dato $a \in \mathbb{C}$, $\overline{a}$ è il complesso coniugato di a.

[10] Infatti si può dimostrare che tale matrice esiste, ma semplifichiamoci la vita assumendolo.

6. Comportamento vicino ad un punto fisso

Nel capitolo precedente abbiamo visto come si comporta la soluzione di una equazione lineare nell'intorno di un punto fisso (che in questo caso è necessariamente zero). La domanda naturale è che succede nel caso non lineare?

Rendiamo la domanda più precisa. Sia $V \in \mathcal{C}^2$, $V(\bar{x}) = 0$ e poniamo $A := DV(\bar{x})$. Per ogni $h > 0$ sufficientemente piccolo consideriamo la palla $B_h(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^d \;:\; \|x - \bar{x}\| \leq h\}$. Si consideri una condizione iniziale $x_0 \in B_h(\bar{x})$ e sia $x(t)$ la corrispondente soluzione. Sia $\tilde{T}_h = \inf\{t \geq 0 \;:\; x(t) \notin B_{2h^{\frac{2}{3}}}(\bar{x})\}$. La domanda precisa che ci vogliamo porre è: si può descrivere con una buona precisione il moto per $t \leq \tilde{T}_h$? Si noti che il moto lineare è dato da $e^{At}x_0$ ed è quindi facile calcolare $T_h = \inf\{t \geq 0 \;:\; e^{At}x_0 \notin B_{h^{\frac{2}{3}}}(\bar{x})\}$. La prima domanda che ci vogliamo fare è: che relazione c'è tra $\tilde{T}_h$ e T_h?

Esercizio 6.1. *Si mostri che esistono costanti $C, C_1 > 0$ tali che, per tutti i $|t| \leq \min\{T_h, C_1 \ln h^{-1}\}$ e $\|x - \bar{x}\| \leq h$ si ha*

$$\|x(t) - \bar{x} - e^{At}(x_0 - \bar{x})\| \leq Ch^{\frac{5}{4}}.$$

(suggerineto: si usi il Corollario 4.3)

Inoltre si possono ottenere informazioni precise anche sulla derivata rispetto alle condizioni iniziali $\xi = \partial_{x_0} x(t, x_0)$.

Esercizio 6.2. *Esistono costanti $C, C_1 > 0$ tali che, per ogni $|t| \leq \min\{T_h, C_1 \ln h^{-1}\}$ e $\|x - \bar{x}\| \leq h$ si ha*

$$\|\xi(t) - e^{At}\| \leq Ch^{\frac{1}{4}}.$$

(suggerimento: si usi il Teorema 4.1.)

Siamo dunque in grado di seguire il moto in un intorno dell'origine per tempi *relativamente* lunghi, tuttavia è naturale chiedersi: cosa succede per tempi ancora più lunghi? A questa domanda non si può rispondere nella generalità che stiamo discutendo, occorre fare qualche ipotesi sulle proprietà della dinamica lineare.

6.1. **Il caso attrattivo.**

Nel caso in cui la parte reale di tutti gli autovalori di $DV(\bar{x})$ sia negativa, si ha $\lim_{t\to\infty} e^{At}x_0 = 0$ dunque sembrerebbe le soluzioni che partono vicine a $\bar{x}$ tendono a $\bar{x}$, dunque il punto fisso $\bar{x}$ è stabile. Ma questo vale solo per l'equazione linearizzata, la vera dinamica si comporterà nello stesso modo?

Proposizione 6.3. *Se $V(\bar{x}) = 0$ e $DV(\bar{x})$ ha tutti autovalori con parte reale strettamente negativa allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio* asintoticamente stabile. *Ovvero esiste $h > 0$ tale che per ogni $x_0 \in B_h(\bar{x})$, detta $x(t)$ la soluzione di (1.2) si ha*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x}.$$

Proof. Poiché gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa, ne segue che esiste $t_* > 0$ tale che $\|e^{At_*}\| \leq \frac{1}{4}$. Ma allora, per ogni $h > 0$ sufficientemente piccolo possiamo applicare l'Esercizio 6.1 e ottenere che per ogni condizione iniziale $x_0 \in B_h(\bar{x}) \setminus B_{h/2}(\bar{x})$ si ha

$$\begin{aligned}\|x(t_*) - \bar{x}\| &\leq \|e^{At_*}(x_0 - \bar{x})\| + \|x(t_*) - \bar{x} - e^{At_*}(x_0 - \bar{x})\| = \frac{1}{4}\|x_0 - \bar{x}\| + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}})\\ &\leq \frac{1}{2}\|x_0 - \bar{x}\|.\end{aligned}$$

Quindi in ogni intervallo di tempo t_* la distanza di $x(t)$ da $\bar{x}$ cala, almeno, di un fattore 2. Da ciò la Proposizione segue immediatamente. $\square$

Remark 6.4. *Si noti che se $\dot{x} = V(x)$ e si pone $z(t) = x(-t)$ soddisfa $\dot{z} = -V(z)$. Da questo segue che il caso repulsivo (tutti gli autovalori positivi) può essere ricondotto al caso attrattivo.*

6.2. **Il caso iperbolico.**
Il prossimo caso di interesse è quando tutti gli autovalori di $A = DV(\bar{x})$ hanno parte reale diversa da zero ma di segno diverso. Si possono dunque separare gli autovalori in due gruppi: quelli con parte reale positiva e quelli con parte reale negativa. Per la teoria spettrale delle matrici si ha che esistono $\mathbb{V}_\pm \subset \mathbb{R}^d$ tali che $\mathbb{V}_+ \cap \mathbb{V}_- = \{0\}$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-$ e corrispondono esattamente agli autospazi associati agli autovalori con parte reale positiva e negativa, rispettivamente. In particolare $A\mathbb{V}_\pm \subset \mathbb{V}_\pm$. Per essere più precisi notiamo che per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ possiamo scrivere, in maniera unica, $v = v_- + v_+$ dove $v_\pm \in \mathbb{V}_\pm$. Possiamo quindi definire $\Pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ come $\Pi v = v_-$.

Esercizio 6.5. *Si mostri che Π è un proiettore, cioè $\Pi^2 = \Pi$. Si mostri che $\Pi A = A\Pi$. Si mostri che $\Pi A \Pi$ ha un autovalore nullo, corrispondente all'autospazio $\mathbb{V}_+$ e tutti gli altri con parte reale negativa. Si mostri che $(\mathbb{1} - \Pi)A(\mathbb{1} - \Pi)$ ha un autovalore nullo, corrispondente all'autospazio $\mathbb{V}_-$ e tutti gli altri con parte reale positiva.*

Esercizio 6.6. *Si mostri la seguente descrizione del moto per l'equazione linearizzata: se la condizione iniziale appartiene a $\mathbb{V}_-$ allora il moto avviene su $\mathbb{V}_-$ e tende asintoticamente a zero. Se la condizione iniziale appartiene a $\mathbb{V}_+$ allora il moto avviene su $\mathbb{V}_+$ e tende asintoticamente a zero nel passato. Se la condizione iniziale ha una distanza h da $\mathbb{V}_-$, allora si avvicina a zero per un tempo proporzionale a $\ln h^{-1}$ e quindi si allontana lungo una traiettoria vicina a $\mathbb{V}_+$.*

Esercizio 6.7. *Si mostri che esistono matrici reali U, $\det(U) \neq 0$, e numeri $d_\pm$, $d_+ = d - d_-$, tali che $U\mathbb{V}_- = \{x \in \mathbb{R}^d \;:\; x_i = 0 \;\forall\; i > d_+\}$ e $U\mathbb{V}_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \;:\; x_i = 0 \;\forall\; i \leq d_+\}$. Si mostri inoltre che, data una tale matrice, si ha*

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} =: \Lambda \tag{6.1}$$

dove B ha tutti autovalori con parte reale positiva e E ha tutti autovalori con parte reale negativa.

Anche qui la domanda naturale è: $x(t) - \bar{x}$ si comporterà come la soluzione dell'equazione lineare? La risposta è essenzialmente si, ma per capire in che senso occorre fare qualche conto. È ovviamente conveniente introdurre una nuova variabile $z = U(x - \bar{x})$, chiaramente

$$\dot{z} = U\dot{x} = UV(x) = UV(\bar{x} + U^{-1}z) =: W(z)$$

inoltre un semplice calcolo mostra che $W(0) = 0$ e $DW(0) = \Lambda$. Possiamo quindi ridurci, senza perdita di generalità al caso in cui il punto di equilibrio è zero e la matrice derivata è della forma (6.1).

Possiamo ora enunciare il fatto fondamentale di questa sezione: l'analogo non lineare dell'esercizio 6.6.

Teorema 6.8 (Hadamard-Perron)**.** *Esiste $h_* \geq 0$ e $G^u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d_+}, \mathbb{R}^{d_-})$ tale, ponendo $x_0(y) = (y, G^u(y))$, $\|y\| \leq h_*$, e detta $x(t, y) = (x_1(t), x_2(t))$ la soluzione* *di $\dot x = W(x)$ con condizione iniziale $x_0(y)$, se $\|x_1(s)\| \leq \sqrt{h}_*$, per tutti gli $s \leq t$, allora $x_2(t) = G^u(x_1(t))$.*

Proof. L'idea di base per capire il comportamento dell'equazione non lineare è quella di seguire contemporaneamente un insieme di condizioni iniziali invece che una sola. In particolare, per h sufficientemente piccolo, considereremo insiemi del tipo $\mathbb{G} = \{(s, G(s)) \ : \ s \in \mathbb{R}^{d_+}, \|s\| \leq h\}$ dove, detta $B(x,r) \subset \mathbb{R}^{d_+}$ la palla di centro x e raggio r, le funzioni G appartengono all'insieme

$$\Omega_h = \{G \in \mathcal{C}^1(B(0,h), \mathbb{R}^{d_-}) \ : \ \|G(0)\| \leq h\,, \sup_{\|x\|\leq h} \|DG\| \leq C_* h^{\frac14}\}$$

per qualche costante $C_* > 0$ che sceglieremo in seguito. In alte parole consideriamo insiemi $\mathbb{G}$ che sono il grafico di una funzione $G \in \Omega_h$.

Sia $x(t, x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale x_0 e $\xi(t, x_0) = \partial_{x_0} x(t, x_0)$. Per $x_0 \in \mathbb{G}$, possiamo applicare il Lemma 6.1 e l'esercizio 6.2 a questa situazione ottenendo che esiste $c_0, h_* > 0$ tale che, per ogni $h \in (0, h_*)$ e $t \leq c_0 \ln h^{-1}$, e $\|(s,w)\| \leq 2h$

$$\begin{aligned} x(t,(s,w)) &= (e^{Bt}s, e^{Et}w) + \mathcal{O}(h^{\frac54}) \\ \xi(t,(s,w) &= \begin{pmatrix} e^{Bt} & 0 \\ 0 & e^{Et} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\frac14}). \end{aligned}$$

Quindi, per la regola della catena,

$$\partial_s x(t,(s,G(s))) = \xi(t) \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ DG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{Bt} \\ e^{Et} DG \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\frac14}).$$

Ne segue che ponendo $x(t,(s,G(s))) = (\alpha_t(s), \beta_t(s))$, si ha $\partial_s \alpha_t(s) = e^{Bt} + \mathcal{O}(h^{\frac14})$ e quindi $\det(\partial_s \alpha_t(s)) \neq 0$. Dunque, per il teorema della funzione inversa, α_t è localmente invertibile attorno a zero inoltre, per t sufficientemente grande $\sigma_t(B(0,h)) \supset B(0,h)$. Possiamo quindi rappresentare $\mathbb{G}_t = \{x(t,x_0)\}_{x_0 \in \mathbb{G}_h} \cap B(0,h)$ come $(u, G_t(u))$ dove $G_t = \beta_t \circ \alpha_t^{-1}$. In altre parole abbiamo definito una mappa $\mathcal{K}_t : \Omega_h \to \mathcal{C}^1(B(0,h), \mathbb{R}^{d_-})$ tale che $G_t = \mathcal{K}_t(G)$ e $\mathbb{G}_t$ è il grafico di G_t.

Lemma 6.9. *Esistono $t_*, h_0, c > 0$ tali che, per ogni $h \leq h_0$ e $t \in [t_*, c \ln h^{-1}]$, $\mathcal{K}_t(\Omega_h) \subset \Omega_h$.*

Proof. Usando di nuovo la regola della catena si ha, per $t \leq c_0 \ln h^{-1}$

$$DG_t = (e^{Et} DG + \mathcal{O}(h^{\frac14}))(e^{Bt} + \mathcal{O}(h^{\frac14}))^{-1} = e^{Et} DG e^{-Bt} + \mathcal{O}(h^{\frac14}).$$

Si può quindi scegliere $t_* > 0$ tale che $\|e^{Et_*}\| \leq \frac12$, $\|e^{-Bt_*}\| \leq \frac12$, quindi $\|e^{Et} DG e^{-Bt}\| \leq \frac34 \|DG\|$. Ne segue che, per qualche $C > 0$,

$$\|DG_{t_*}\| \leq \frac34 \|DG\| + C h^{\frac14} \leq C_* h^{\frac14},$$

a patto che C_* sia sufficientemente grande. Inoltre

$$\begin{aligned} G_{t_*}(0) &= G_{t_*}(\alpha_{t_*}(0) + \mathcal{O}(h^{\frac54})) = G_{t_*}(\alpha_{t_*}(0)) + \mathcal{O}(h^{\frac32}) = \beta_{t_*}(0) + \mathcal{O}(h^{\frac32}) \\ &= e^{Et_*} G(0) + \mathcal{O}(h^{\frac32}). \end{aligned}$$

Dunque $\|G_{t_*}(0)\| \leq \frac34 \|G(0)\|$ a patto che h sia sufficientemente piccolo (per esempio $h \leq 2\|G(0)\|$). □

Il prossimo passo è di studiare $\mathcal{K}_t$. Siano $G_1, G_2 \in \Omega_h$ allora

$$|\mathcal{K}_t(G_1)(u) - \mathcal{K}(G_2)(u)| = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\mathcal{K}(G_1\lambda + (1-\lambda)G_2)(u)d\lambda.$$

Per calcolare la derivata di cui sopra definiamo $G_\lambda = G_1\lambda+(1-\lambda)G_2$ e $x(t,(s,w)) = (\bar{\alpha}_t(s,w), \bar{\beta}_t(s,w))$ allora possiamo porre $\alpha_\lambda(s) = \bar{\alpha}(s, G_\lambda(s))$ e quindi $\mathcal{K}(G_\lambda)(u) = \bar{\beta}(\alpha_\lambda^{-1}(u), G_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}(u)))$. Dal teorema della funzione implicita applicato a $F(a,u,\lambda) = u - \bar{\alpha}(a, G_\lambda(a)) = 0$ segue che

$$\partial_\lambda\left(\alpha_\lambda^{-1}\right) = -(\partial_s\bar{\alpha})^{-1}\partial_w\bar{\alpha}(G_1 - G_2).$$

Dopo qualche calcolo questo implica

$$\|\frac{d}{d\lambda}\mathcal{K}(G_\lambda)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|G_1 - G_2\|_\infty.$$

Dunque $\mathcal{K}_t$ è una contrazione nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

Esercizio 6.10. *Si concluda la dimostrazione del Teorem 6.8. (suggerimento: si usi il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli).*

□

Dunque la dinamica nel caso non lineare è molto simile a quella lineare, solo gli spazi stabile e instabile sono ipersuperfici invece che spazi vettoriali.

7. Un esempio interessante: l'equazione di Van der Pol

L'equazione di van der Pol è stata sviluppata come modello per certi circuiti elettrici che esibiscono comportamenti oscillatori. Ha varie forme equivalenti, noi considereremo la seguente

$$\ddot{x} - (1-3x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{7.1}$$

La si può studiare qualitativamente nel modo precedentemente descritto: prima di tutto la si trasforma in un equazione del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1-3x^2)y - x. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ovviamente $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio. Se linearizziamo l'equazione in zero otteniamo l'equazione lineare

$$\frac{d}{dt}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ne segue che il punto fisso è repulsivo e le soluzioni si allontanano spiraleggiando. Questo comportamento è confermato dallo studio del segno di $\frac{dy}{dx}$ dove $\dot{x} \neq 0$. Rimane il problema di sapere come si comportano le soluzioni lontano dall'origine. A questo scopo consideriamo la funzione (di "Lyapunov")

$$L(x,y) = 2(x - x^3 - y)^2 + (x-y)^2 + 3x^2.$$

Se $(x(t), y(t))$ è una soluzione di (7.2), allora un calcolo diretto mostra che

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = x^2\left[6 - x^2 - 3(x-y)^2 - 3y^2\right].$$

Dunque L è decrescente al di fuori di una ellisse. Inoltre si noti che $2xy \leq 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$.[11] Quindi

$$L(x,y) \geq 3x^2 + y^2 - 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Dunque gli insiemi $A_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ L(x,y) \leq \alpha\}$ sono contenuti all'interno delle ellissi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq \alpha\}$ e sono quindi compatti.

Ne segue che se la traiettoria è sufficientemente lontana da zero, allora tenderà ad avvicinarsi all'origine e quindi a spiraleggiare verso l'interno. Per continuità deve esistere una trattoria che torna esattamente al punto di partenza, dunque una traiettoria periodica. Questa traiettoria periodica è attrattiva, dunque per quasi tutte le condizioni iniziali la soluzione tenderà verso la soluzione periodica e quindi il sistema tende ad esibire un comportamento periodico, esattamente il comportamento che Van der Pol voleva spiegare introducendo la sua equazione.

8. Equazioni della meccanica

Le equazioni che appaiono in meccanica sono del secondo ordine ed hanno spesso la forma speciale

$$M\ddot{x} = -A\dot{x} + F(x,t) \tag{8.1}$$

dove M e A sono una matrici simmetriche definite positive[12] e M ̀definita strettamente positiva[13] Inoltre assumiamo $F \in \mathcal{C}^1$. La matrice A rappresenta (fenomenologicamente) l'*attrito*.

Dunque poichè quanto detto fin qui si riferisce ad equazioni del primo ordine, sembra essere irrilevante per le equazioni della meccanica. Tuttavia basta porre $v(t) = \dot{x}(t)$, $z(t) = (x(t), v(t))$, $V(z,t) = (v, F(x,t))$ e $z_0 = (x_0, v_0)$ per ricondursi al caso (1.2).

Esercizio 8.1. *Si mostri che se $A = 0$ allora si applica il Teorema di Liouville 4.4.*

Un caso molto comune in meccanica è quello in cui F non dipende da t ed esiste una funzione $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tale che $F = \nabla U$. La funzione U è chiamata il *potenziale* della forza. Un'altra funzione fondamentale è $E(x,v) = \frac{1}{2}\langle v, Mv\rangle + U(x)$.[14] La ragione della sua rilevanza dipende dal seguente conto: data una soluzione $x(t)$ di (8.1) si ha

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = \langle \dot{x}, M\ddot{x}\rangle + \langle \nabla U, \dot{x}\rangle = -\langle \dot{x}, A\dot{x}\rangle. \tag{8.2}$$

Dunque, se $A = 0$ allora l'energia si conserva, mentre se $A \neq 0$ allora l'energia diminuisce lungo il moto. Questo significa che l'energia può essere usata come *funzione di Lyapunov*. Che significa?

Sia $\bar{x}$ un punto di equilibrio, ovvero un punto tale che $F(\bar{x}) = 0$. Allora $x(t) = \bar{x}$ è una soluzione del moto, un punto di equilibrio. Si noti che questo significa che $\bar{x}$ è un punto stazionario di U. Si supponga che sia un minimo locale e $D^2U > 0$.

Esercizio 8.2. *Si mostri che $(\bar{x}, 0)$ è un minimo locale per E.*

---

[11] Questo segue da $(\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}})^2 \geq 0$.

[12] Ovvero, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$, si ha $\langle v, Av\rangle \geq 0$.

[13] Ovvero se $\langle v, Mv\rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

[14] A chi si chieda: ma che cavolo è l'*energia*? Consiglio di leggersi lo splendido capitolo 4, relativo all'energia, nelle Lezioni di Feynman.

Dunque (8.2) implica che gli insiemi $\{(x, \dot{x}) \ : \ E(x, \dot{x}) \leq E(\bar{x}, 0) + c\}$, $c > 0$, sono insiemi invarianti per il moto.

Proposizione 8.3 (Lyapunov)**.** *Si mostri che se $A = 0$ allora $(\bar{x}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile. Si mostri che se $A \geq \gamma \mathbb{1}$, $\gamma > 0$, allora $(\bar{x}, 0)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Proof. Se $A = 0$ allora sappiamo che $(\bar{x}, 0)$ è un punto di minimo di E, dunque gli insiemi $C_h = \{(x, v) \ : \ E(x, v) \leq h\}$ sono intorni di $(\bar{x}, 0)$ (contenuti in palle di diametro $C\sqrt{h}$) e sono insiemi invarianti per la dinamica (ovvero se $(x, v) \in C_h$ allora $(x(t), v(t)) \in C_h$ visto che $E(x, v) = E(x(t), v(t))$).

Consideriamo ora il caso $A > 0$. Visto che i potenziali sono definiti a meno di una costante non si perde nulla in generalità supponendo $U(\bar{x}) = 0$. Poichè E è decrescente lungo le traiettorie e limitata dal basso ne segue che esiste $\lim_{t\to\infty} E(x, \dot{x}) = \ell$. Se $\ell = 0$ allora abbiamo concluso, consideriamo quindi il caso $\ell > 0$. Mostreremo che questa possibilità porta ad una contraddizione e quindi non può accadere. Infatti in questo caso (8.2) implica facilmente che $\|\dot{x}\|^2$ è integrabile su $\mathbb{R}_{\geq 0}$, ma, con un poco di lavoro, si può dimostrare ancora di più.

Lemma 8.4. *Nelle ipotesi di cui sopra si ha*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Proof. Supponiamo che ciò non sia vero, allora esiste $\varepsilon > 0$ e una successione di tempi $\{t_j\}$ tali che $\|\dot{x}(t_j)\| \geq \varepsilon$. D'altro canto, poichè il moto avviene in un compatto, (8.1) implica che esiste $C > 0$ tale che $\|\ddot{x}(t)\| \leq C$. Questo implica che esiste un intervallo di tempi $I = [a, b]$ di lunghezza $\frac{1}{2}C^{-1}\varepsilon$ tale che $\|\dot{x}(t)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $t \in I$. Ma allora l'ipoesi $A \geq \gamma \mathbb{1}$ e (8.2) implicano

$$E(b) - E(a) \leq -\gamma \int_a^b \|\dot{x}(s)\|^2 ds \leq -\gamma \frac{\varepsilon^3}{8C}.$$

Quindi vicino ad ogni tempo t_j l'energia cala di una quantità fissata. Poichè l'energia è positiva, può calare in questa maniera solo un numero finito di volte contraddicendo così l'ipotesi. □

Usando ancora il fatto che $x(t)$ rimane per tutti i tempi in un compatto, si ha che esiste una sottosuccessione t_j tale che $x(t_j)$ è convergente, sia x_* il limite, dal Lemma 8.4 segue $U(x_*) = \ell$. Dunque $x_* \neq \bar{x}$ e $F(x_*) \neq 0$. Quindi $\ddot{x}(t_j)$ converge verso $F(x_*) \neq 0$. Siamo pronti a concludere: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che $\|\dot{x}(t)\| \leq \varepsilon$ per ogni $t \geq t_\varepsilon$. Sia $t_j > t_\varepsilon$ sufficinetemente grande tale che $\|F(x(t_j))\| \geq \frac{1}{2}\|F(x_*)\|$, allora, per $t \geq t_j$,

$$F(x(t)) = F(x(t_j)) + \mathcal{O}(|t - t_j|\varepsilon).$$

Dunque

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j) = \int_{t_j}^t \ddot{x}(s) ds = M^{-1} \int_{t_j}^t \left[F(x(s)) - A\dot{x}(s)\right] ds.$$

Ovvero esiste $c > 0$ tale che[15]

$$\|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j)\| \geq \frac{1}{2}(\|M^{-1}F(x_*)\| - c\varepsilon)(t - t_j) - c\varepsilon(t - t_j)^2,$$

che ovviamente, scegliendo ad esempio $t = t_j + 2\|M^{-1}F(x_*)\|^{-1}$ e ε piccolo, contraddice $\|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j)\| \leq 2\varepsilon$. □

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it

[15] Si noti che, per definizione, $\inf_{\|v\|=1}\langle v, Mv\rangle > 0$ e siccome $\{\|v\| = 1\}$ è un compatto allora esiste $m > 0$ tale che $\inf_{\|v\|=1}\langle v, Mv\rangle \geq m$. Me segue che tutti gli atuovalori di M sono maggiori di m. Infatti, sia λ un autovalore e v, $\|v\| = 1$, il corrispondente autovettore, allora $m \leq \langle v, Mv\rangle = \lambda$. Poichè M è simmetrica allora tutti autovettori $\{v_i\}$, corrispondenti agli autovalori λ_i, formano una base ortonormale. Dunque $\|M^{-1}v\|^2 = \|\sum_i \alpha_i M v_i\| = \|\sum_i \alpha_i \lambda_i^{-1} v_i\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i^{-2} \geq m^{-2}\sum_i \alpha_i^2 = m^{-2}\|v\|^2$.