

I prova di esonero di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
26 Aprile 2016

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \lambda\dot{x},$$

dove $\lambda \geq 0$ è il coefficiente di attrito e l'energia potenziale è definita come segue:

$$U(x) = \log\left(c - \cos x - \frac{a}{2} \cos^2 x\right),$$

con a e c parametri reali *positivi* tali che soddisfano la relazione $c > 1 + a/2$ (di modo che l'argomento del logaritmo è sempre strettamente *positivo*).

- (1) Si studi il caso conservativo ($\lambda = 0$). Al variare dei parametri a e c , si determinino tutti i valori dell'energia $\dot{x}^2/2 + U(x)$ per i quali si possono avere dei moti a meta asintotica, cioè quelle soluzioni $t \mapsto x(t)$ tali per cui il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ è un numero reale.
- (2) Limitatamente al caso con $\lambda = 0$, $c = 10$ e $a = 1/10$, si dia una stima del periodo T del moto che fa seguito alle condizioni iniziali ($x(0) = \pi/6$, $\dot{x}(0) = 0$). A tale scopo si determinino *esplicitamente*
 - (2A) un numero reale positivo T_- tale che $T \geq T_-$;
 - (2B) un numero reale^[⊙] $T_+ \geq T$ tale da soddisfare la seguente proprietà riguardante l'errore relativo della stima: $(T_+ - T_-)/(2T_-) \leq 0.5$.
- (3) Si studi il sistema nel caso in cui i parametri assumano i seguenti valori: $\lambda = 1$, $c = 3$ e $a = 2$. In particolare, si consideri il moto $x(t)$ che fa seguito alle condizioni iniziali ($x(0) = -2\pi/3$, $\dot{x}(0) = 1$). Si verifichi che il comportamento asintotico è tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

^[⊙] Un piccolo suggerimento riguardo al punto (2B): il faticosissimo calcolo della derivata terza del potenziale è assolutamente sconsigliato.