

# TEORIA DELLE PERTURBAZIONI: UN SEMPLICE ESEMPIO

CARLANGELO LIVERANI

## 1. UN SISTEMA SEMPLICE

Sia  $q \in \mathbb{R}^d$  e si consideri il sistema determinato dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\langle \dot{q}, M(q)\dot{q} \rangle}{2} - V(q).$$

Con  $M(q) = M(q)^T > 0$  e  $D^2V(q) > 0$ ,  $V(q) = V(-q)$  per ogni  $q \in \mathbb{R}^d$ . Assumiamo inoltre che  $V(0) = \nabla V(0) = 0$ .

Le equazioni di Lagrange sono

$$(1.1) \quad M\ddot{q} = -\nabla V - \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \partial_q M(q)\dot{q} \rangle,$$

e si possono facilmente trasformare in un sistema del primo ordine. Tuttavia, come abbiamo visto, un modo sistematico di farlo è di usare il formalismo Hamiltoniano.

**Esercizio 1.** *Si mostri che la Hamiltoniana associata è data da*

$$H(q, p) = \frac{\langle p, M(q)^{-1}p \rangle}{2} + V(q).$$

Dunque le equazioni di Hamilton sono

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= M(q)^{-1}p \\ \dot{p} &= -\nabla V(q) - \frac{1}{2}\langle p, \partial_q [M(q)^{-1}]p \rangle. \end{aligned}$$

Il vantaggio è che ora sappiamo che  $H$  (l'energia) è conservata lungo il moto.

Si noti che  $(q, p) = (0, 0)$  è una soluzione (punto di equilibrio) di (1.2). Come abbiamo già visto l'energia può essere usata come funzione di Lyapunov, ne segue che il punto di equilibrio è stabile, poichè il potenziale è convesso. Per comprendere meglio come è fatto il moto occorre studiare le equazioni linearizzate nel punto di equilibrio. Poniamo  $\zeta(t, \bar{q}, \bar{p}) = \frac{\partial(q(t, \bar{q}, \bar{p}), p(t, \bar{q}, \bar{p}))}{\partial(\bar{q}, \bar{p})}$ , dove  $(q(t, \bar{q}, \bar{p}), p(t, \bar{q}, \bar{p}))$  è la soluzione di (1.2) con condizioni iniziali  $(\bar{q}, \bar{p})$ . Si ricordi che  $\zeta(t, \bar{q}, \bar{p})$  è una matrice  $2d \times 2d$  che soddisfa le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} 0 & M(q(t, \bar{q}, \bar{p}))^{-1} \\ -D^2V(q(t, \bar{q}, \bar{p})) & 0 \end{pmatrix} \zeta \\ \zeta(0) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Per cominciare, siamo interessati alle condizioni iniziali  $(\bar{q}, \bar{p}) = (0, 0)$ . Essendo questo un punto di equilibrio si ha  $q(t, \bar{q}, \bar{p}) = p(t, \bar{q}, \bar{p}) = 0$ , mentre  $\zeta(t) = \zeta(t, 0, 0)$

è la soluzione delle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} 0 & M(0)^{-1} \\ -D^2V(0) & 0 \end{pmatrix} \zeta \\ \zeta(0) &= \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Per capire che tipo di punto di equilibrio abbiamo occorre studiare gli autovalori della matrice che appare nell'equazione linearizzata:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1} & -M^{-1} \\ D^2V(0) & \lambda \mathbf{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1} & 0 \\ D^2V(0) & \lambda \mathbf{1} + \lambda^{-1}M^{-1}D^2V(0) \end{pmatrix} \\ &= \lambda^d \det (\lambda \mathbf{1} + \lambda^{-1}M^{-1}D^2V(0)) = \det M^{-1} \det (\lambda^2 M + D^2V(0)).\end{aligned}$$

Poichè, per  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\lambda^2 M + D^2V(0)$  è definita positiva per ipotesi, segue che gli autovalori devono essere immaginari. Dunque il punto di equilibrio, per la equazione linearizzata, è un centro.

Sfortunatamente questo non implica che il moto originale consista ancora in rotazioni attorno al centro, infatti, tipicamente, è assai più complesso. Questa è la tematica che vorremmo investigare. Si supponga di essere interessati solo a moti con piccole energie, diciamo più piccole di un qualche  $\varepsilon > 0$  fissato. Il problema che ci volgiamo porre è di studiare il moto per tempi più lunghi possibile. Allo scopo di semplificare leggermente la trattazione consideriamo il caso

$$M(q) = M$$

in cui la matrice dell'energia cinetica è costante. Il caso generale si tratta in modo analogo ed è lasciato al lettore come esercizio.

Consideriamo condizioni iniziali, e quindi moti, tali che  $H = \varepsilon$ , per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. La prima semplice idea (più di forma che di sostanza) è di introdurre delle nuove variabili  $\xi = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}q$ ,  $\eta = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}p$ . Si noti che questo cambiamento di coordinate non è симплетico (completamente canonico), dunque non è ovvio che le nuove equazioni siano Hamiltoniane nè, se sì, quale sia la nuova Hamiltoniana. Calcoliamo

$$(1.3) \quad \begin{aligned}\dot{\xi} &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\dot{q} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}M^{-1}p = M^{-1}\eta \\ \dot{\eta} &= -\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\nabla V(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi).\end{aligned}$$

Ponendo  $A = D^2V(0)$  si può scrivere  $V(q) = \frac{1}{2}\langle q, Aq \rangle + \tilde{W}(q)$  dove, a causa della simmetria,  $\|\nabla \tilde{W}(q)\| \leq C\|q\|^3$ . Ponendo  $W(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{-2}\tilde{W}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi)$ , possiamo quindi scrivere

$$(1.4) \quad \begin{aligned}\dot{\xi} &= M^{-1}\eta \\ \dot{\eta} &= -A\xi - \varepsilon\nabla W(\xi, \varepsilon).\end{aligned}$$

È facile verificare che le nuove equazioni sono Hamiltoniane per l'Hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\xi, \eta) = \frac{\langle \eta, M^{-1}\eta \rangle}{2} + \frac{\langle \xi, A\xi \rangle}{2} + \varepsilon W(\xi, \varepsilon)$$

dove  $W$  è una funzione liscia di  $\xi$  e  $\varepsilon$ .

<sup>1</sup> Si noti che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ D^2V(0) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\det D^2V(0)}{\det M} \neq 0,$$

dunque zero non è un autovalore.

**Esercizio 2.** Si verifichi che  $W(\xi, 0) = \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_4=1}^2 w_{i_1, \dots, i_4} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_4}$ , ovvero è un polinomio omogeneo di quarto grado.<sup>2</sup>

## 2. PICCOLE OSCILLAZIONI

Il secondo passo è di confrontare le soluzioni di (1.4) con quelle della stessa equazione ma con  $\varepsilon = 0$ , che corrisponde alla linearizzata, ovvero ad un oscillatore armonico  $d$ -dimensionale. Si consideri l'Hamiltoniana  $H_0(q, p) = \frac{\langle p, M^{-1}p \rangle}{2} + \frac{\langle q, Aq \rangle}{2}$ . Poichè  $M$  è una matrice positiva è diagonalizzabile, i suoi autovalori  $m_i$  sono tutti strettamente positivi si può definire la matrice  $M^{\frac{1}{2}}$  come una matrice anche essa positiva. Possiamo dunque considerare il cambio di coordinate simplettico  $\xi = M^{\frac{1}{2}}q$ ,  $\eta = M^{-\frac{1}{2}}p$ . In tali coordinate l'Hamiltoniana ha la forma  $H_0(\xi, \eta) = \frac{\langle \eta, \eta \rangle}{2} + \frac{\langle \xi, B\xi \rangle}{2}$  dove  $B = M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$ . Si noti che  $B$  è nuovamente una matrice simmetrica ed è quindi diagonalizzabile da una trasformazione ortogonale  $U$ , cioè  $(U^{-1}BU)_{ij} = \Omega_{ij}^2 = \delta_{ij}\omega_i^2$  e  $U^T U = U U^T = \mathbf{1}$ .<sup>3</sup> Possiamo dunque fare l'ulteriore trasformazione simplettica  $\xi = Uz$ ,  $\eta = Uw$  che da la nuova Hamiltoniana  $H_0(z, w) = \frac{\langle w, w \rangle}{2} + \frac{\langle z, \Omega^2 z \rangle}{2}$  dove ora  $\Omega^2$  è una matrice diagonale. Nel gergo della meccanica abbiamo appena scritto l'Hamiltoniana in *modi normali*.<sup>4</sup> Le equazioni del moto associate hanno ora la forma

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= w \\ \dot{w} &= -\Omega^2 z. \end{aligned}$$

Dunque, dette  $z^0, w^0$  le condizioni iniziali si hanno le soluzioni  $z_i(t) = z_i^0 \cos(\omega_i t) + \frac{w_i^0}{\omega_i} \sin(\omega_i t)$ . In altre parole abbiamo  $d$  oscillatori armonici indipendenti ognuno con frequenza  $\omega_i$ .

La discussione appena fatta, sebbene semplice dal punto di vista teorico, non è molto utile dal punto di vista pratico poichè per essere implementata occorre calcolare la radice di una matrice, cosa non sempre immediata. Dal punto di vista operativo è più semplice calcolare nel modo suggerito dal seguente esercizio.

**Esercizio 3.** Siano  $\{\omega_i\}$  le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \omega^2 M) = 0$$

e  $v_i$  dei vettori tali che<sup>5</sup>

$$(2.2) \quad Av_i = \omega_i^2 Mv_i.$$

Si mostri che i vettori  $v_i$  possono essere scelti in modo che  $\langle v_i, Mv_j \rangle = \delta_{ij}$ .<sup>6</sup>

<sup>2</sup>Suggerimento: usare la formula di Taylor e la simmetria per mostrare che i termini di ordine dispari sono nulli.

<sup>3</sup>Abbiamo chiamato la matrice diagonale  $\Omega^2$  invece che  $\Omega$  seguendo la tradizione. Si noti che ciò è sempre possibile perchè la matrice è positiva e quindi ha una radice con tutti gli autovalori positivi.

<sup>4</sup>Più precisamente i modi normali sono dati da  $M^{-\frac{1}{2}}Ue_i$ , dove  $e_i$  è la solita base di  $\mathbb{R}^d$ .

<sup>5</sup>Dal punto di vista computazionale questo è tanto complicato quanto trovare gli autovalori e autovettori di una matrice.

<sup>6</sup>Suggerimento: in analogia con la discussione di cui sopra si noti che  $M^{\frac{1}{2}}v_i$  sono autovalori di  $M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$  e quindi possono essere normalizzati in modo da formare una base ortonormale.

**Esercizio 4.** Dati i vettori  $v_i$  definiti come nell'esercizio precedente si definisca la matrice  $V_{i,j} = (v_1 \dots v_d)$ , dove i  $v_i$  sono intesi come vettori colonna. Si mostri che

$$(2.3) \quad VV^T = M^{-1}.$$

Si mostri inoltre che  $V^{-1}M^{-1}(V^T)^{-1} = \mathbf{1}$  e  $V^TAV = \Omega^2$ .<sup>7</sup>

Chiaramente la relazione (2.3) fornisce un modo rapido per calcolare la giusta normalizzazione dei vettori  $v_i$ .

Questo ci permette di studiare tutte le Hamiltoniane quadratiche, ricordiamo tuttavia che noi siamo interessati alla Hamiltoniana  $H_\varepsilon$  non a  $H_0$ .

**Esercizio 5.** Si mostri che, con gli stessi cambi di variabili sopra descritti si ha

$$H_\varepsilon(z, w) = \frac{\langle w, w \rangle}{2} + \frac{\langle z, \Omega^2 z \rangle}{2} + \varepsilon U(z, \varepsilon)$$

per una qualche funzione liscia  $U$ .

Detto  $(z(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$  il moto determinato da  $H_\varepsilon$  per una data condizione iniziale, per la dipendenza liscia da un parametro delle soluzioni di una equazione differenziale si ha che  $x(t, \varepsilon) := (z(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$  dipende in maniera liscia da  $\varepsilon$ . Per stimare la differenza dei due moti si può quindi studiare la derivata rispetto a  $\varepsilon$ . Ponendo  $\zeta(t, \varepsilon) := \partial_\varepsilon x(t, \varepsilon)$  si ha

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\zeta} &= JD^2H_\varepsilon(x)\zeta + J\partial_\varepsilon \nabla H_\varepsilon(x) =: \Lambda \zeta + \varepsilon \Gamma(t)\zeta + f(x(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ \zeta(0, \varepsilon) &= 0, \end{aligned}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma(t, \varepsilon) := D^2U(x(t, \varepsilon), \varepsilon); \quad f(x, \varepsilon) = J(\partial_\varepsilon \nabla U)(x).$$

se scriviamo (2.4) in forma integrale e poniamo  $\rho := \|\zeta\|$  otteniamo

$$\rho(t, \varepsilon) \leq \int_0^t (\|\Lambda\| + \varepsilon \|\Gamma(s)\|) \rho(s, \varepsilon) ds + \int_0^t \|f(x(s, \varepsilon), \varepsilon)\| ds.$$

Dalla conservazione dell'energia segue che esiste una costante  $C > 0$  tale che  $\|f(x(s, \varepsilon), \varepsilon)\| + \|\Gamma(t)\| \leq C$  per tutti gli  $\varepsilon, s$ , quindi per tutti i tempi minori di un fissato tempo  $T$  la disuguaglianza di Gronwald implica la stima

$$\rho(t, \varepsilon) \leq CT e^{(\|\Lambda\| + \varepsilon C)t}.$$

Per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, questa stima implica  $\|x(t, \varepsilon) - x(t, 0)\| \leq \varepsilon CT e^{2\|\Lambda\|t}$  per ogni  $t \leq T$ . Si tratta di una stima pessima visto che basta aspettare un tempo ordine di  $\ln \varepsilon^{-1}$  per avere un errore di ordine uno e quindi avere un controllo pressochè nullo sulla soluzione. Si può fare di meglio?

Per una equazione differenziale di forma generale la risposta sarebbe no ma la (2.4) ha una forma molto speciale che può essere conveniente usata per migliorare la nostra comprensione delle soluzioni. Consideriamo infatti una funzione del tipo  $\zeta(t, \varepsilon) = e^{\Lambda t} \theta(t, \varepsilon)$  e calcoliamo a quale equazione differenziale deve soddisfare  $\theta$  acciocchè  $\zeta$  soddisfi (2.4). Un semplice calcolo mostra

$$\theta(t) = \varepsilon \int_0^t e^{-\Lambda s} \Gamma(s, \varepsilon) e^{\Lambda s} \theta(s) ds + \varepsilon \int_0^t e^{-\Lambda s} f(s) ds.$$

<sup>7</sup>Overo,  $V = M^{-\frac{1}{2}}U$  il che da un modo alternativo di calcolare il cambiamento di variabili sopra discusso e mostra che i vettori  $v_i$  sono appunto i modi normali del sistema.

**Esercizio 6.** *Si mostri che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|e^{\Lambda t}\| = 1$ .*

Da quanto detto segue la nuova stima

$$\rho(t, \varepsilon) \leq \varepsilon e^{\varepsilon C t} C T.$$

Questo significa che la differenza tra il moto con  $\varepsilon \neq 0$  e il moto armonico rimane di ordine  $\varepsilon$  per un tempo dell'ordine  $\varepsilon^{-1}$ .

Si tratta di un notevole miglioramento<sup>8</sup> ma spesso si tratta ancora di un tempo troppo breve o di una precisione troppo scarsa per le applicazioni, dunque la solita domanda: si può fare di meglio?

### 3. RIMUOVERE LA PERTURBAZIONE AD ORDINI SUPERIORI

L'idea è di trovare nuove coordinate simplettiche in cui la perturbazione sia più piccola. Ricominciamo da capo: data l'Hamiltoniana

$$(3.1) \quad H_\varepsilon(q, p) = \frac{\langle p, p \rangle}{2} + \frac{\langle q, \Omega^2 q \rangle}{2} + \varepsilon U(q, \varepsilon)$$

cerchiamo un cambio di coordinate con funzione generatrice  $S(\eta, q) = \langle \eta, q \rangle + \varepsilon \Xi(q, \eta)$ , da cui

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p &= \partial_q S = \eta + \varepsilon \partial_q \Xi, \\ \xi &= \partial_\eta S = q + \varepsilon \partial_\eta \Xi. \end{aligned}$$

La nuova Hamiltoniana si scrive quindi come  $H(q, \eta + \varepsilon \partial_q \Xi)$ . Quello che vorremmo è trovare  $\Xi$  tale che

$$\|H(\xi - \varepsilon \partial_\eta \Xi(\xi, \eta), \eta + \varepsilon \partial_q \Xi(\xi, \eta)) - H_0(\xi, \eta)\| \leq C\varepsilon^2.$$

Questo è equivalente a risolvere l'equazione alle derivate parziali

$$\langle \eta, \partial_q \Xi(\xi, \eta) \rangle + \langle \xi, \Omega^2 \partial_\eta \Xi(\xi, \eta) \rangle + U(q, \varepsilon) = 0$$

che, sfortunatamente, non è molto semplice da studiare. Invece di cercare di studiare questa equazione risulta essere più semplice cambiare nuovamente variabili nella Hamiltoniana (3.1) prima di cercare un cambio di coordinate che rimuova la perturbazione ad ordini superiori. L'idea è quella di usare le variabili *azione-angolo* per  $H_0$ .

**Remark 3.1.** *Si noti che fino ad ora abbiamo considerato cambi di coordinate in cui le posizioni e le velocità si trasformavano in maniera coerente. Questo significa che avremmo potuto fare gli stessi cambi di variabile in ambito Lagrangiano, senza avvalerci in alcun modo della struttura Hamiltoniana. Al contrario le variabili azione-angolo non hanno molto senso in ambito Lagrangiano: per la prima volta sfruttiamo la maggiore libertà che esiste nel cambiare coordinate in ambito Hamiltoniano.*

<sup>8</sup>Se  $\varepsilon = 10^{-3}$  allora nelle coordinate originali si può predire il moto per un tempo dell'ordine  $10^3$  con un errore di  $10^{-6}$  (ma si ricordi che tutte le coordinate sono dell'ordine  $10^{-\frac{3}{2}}$ ).

**3.1. Variabili azioni angolo.** Vogliamo mettere  $H_0$  in variabili azione angolo. Questo significa che cerchiamo una trasformazione canonica  $(q, p) = \Psi(\theta, I)$ , dove  $I \in \mathbb{R}^d$  e  $\theta \in \mathbb{T}^d$ ,<sup>9</sup> determinata da una funzione generatrice del tipo  $S(q, I)$  e tale che  $H \circ \Psi$  sia una funzione delle sole  $I$ . Si noti che  $H \circ \Psi(I, \theta) = H(q(I, \theta), \partial_q S(q(I, \theta), I))$ . Se dunque vogliamo che la nuova Hamiltoniana non dipenda dalle  $\theta$  dobbiamo imporre

$$0 = \partial_\theta H \circ \Psi = \partial_q H(q, \partial_q S) \cdot \partial_\theta q.$$

E' sorprendente che possiamo invece chiedere la condizione, apparentemente molto più forte,  $0 = \partial_q H(q, \partial_q S)$ .<sup>10</sup> Inoltre, a causa della struttura prodotto del sistema, si può richiedere che la nuova Hamiltoniana abbia una forma molto speciale, ovvero possiamo imporre

$$\frac{\langle \partial_q S, \partial_q S \rangle}{2} + \frac{\langle q, \Omega^2 q \rangle}{2} = \sum_{i=1}^d h_i(I_i)$$

che si può risolvere cercando una soluzione del tipo  $S(q, I) = \sum_{i=1}^d S_i(q_i, I_i)$  con

$$\partial_{q_i} S_i(q_i, I_i) = \pm \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 q_i^2}.$$

Poichè il moto di  $q_i$  è periodico e si svolge tra i due valori estremi  $q_\pm(I_i)$  tali che  $2h_i(I_i) = \omega_i^2 q_\pm(I_i)^2$  e quindi esistono due possibilità a secondo che  $p_i$  sia positivo o negativo. Noi analizzeremo il caso di  $p_i$  positivo, l'altro si tratta analogamente. Possiamo scrivere

$$S_i(q_i, I_i) = \beta_i(I) + \int_{q_-(I_i)}^{q_i} \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2} dy.$$

Abbiamo perciò il cambio (locale) di coordinate simplettico

$$\begin{aligned} \theta_i &= \partial_{I_i} S = \beta'(I_i) + \int_{q_-(I_i)}^{q_i} \frac{h'(I_i)}{\sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2}} dy \\ p_i &= \partial_{q_i} S = \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 q_i^2} \end{aligned}$$

Conviene scegliere  $\beta_i = -\pi I_i$ , questo corrisponde a scegliere  $\theta_i = -\pi$  quando  $q_i = q_-(I_i)$ . Inoltre volgiamo che  $\theta_i$  sia un angolo e quindi periodico di periodo  $2\pi$ . Questo significa che quando  $q_i = q_+(I_i)$  deve essere  $\theta_i = 0$  cosicchè quando il moto torna a  $q_-(I_i)$  l'angolo è aumentato esattamente di  $2\pi$  e quindi, giustamente, siamo allo stesso punto da cui siamo partiti. Questo implica che

$$(3.3) \quad \int_{q_-(I_i)}^{q_+(I_i)} \frac{h'(I_i)}{\sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2}} dy = \pi.$$

Da cui si ottiene<sup>11</sup>

$$\frac{d}{dI_i} \int_{q_-(I_i)}^{q_+(I_i)} \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2} dy = \pi,$$

<sup>9</sup>Qui per  $\mathbb{T}^d$  intendiamo  $\mathbb{R}^d$  modulo  $2\pi$  ovvero il toro  $d$ -dimensionale in cui ogni coordinata è un angolo (e quindi varia tra zero e  $2\pi$ ).

<sup>10</sup>Ecco, magari non troppo sorprendente: dopo tutto la trasformazione cercata non è unica (vedi esercizio 9) per cui c'è ampio spazio per cercare trasformazioni di tipo speciale. Nel seguito faremo parecchie scelte il cui solo scopo è quello di ottenere formule più semplici.

<sup>11</sup>La derivazione rispetto a  $I_i$  è un poco delicata visto che l'integrale (3.3) va interpretato come integrale generalizzato. Tuttavia conti esattamente uguali sono già stati fatti quando si è discusso il periodo dei moti unidimensionali.

ovvero

$$(3.4) \quad I_i = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(I_i)}^{q_+(I_i)} \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2} dy$$

dove abbiamo scelto la costante di integrazione uguale a zero. Per concludere e scoprire chi è  $h_i$  dobbiamo calcolare l'integrale (3.4). Consideriamo il cambiamento di variabili  $y = \sqrt{\frac{2h_i(I_i)}{\omega_i^2}} \sin \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \int_{q_-(I_i)}^{q_+(I_i)} \sqrt{2h_i(I_i) - \omega_i^2 y^2} dy &= \frac{2h_i(I_i)}{\omega_i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{2h_i(I_i)}{\omega_i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{h_i(I_i)\pi}{\omega_i}. \end{aligned}$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} h_i(I_i) &= \omega_i I_i \\ \theta_i = \partial_{I_i} S &= -\pi + \omega_i \int_{q_-(I_i)}^q \frac{1}{\sqrt{2\omega_i I_i - \omega_i^2 y^2}} dy = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\omega_i}{2I_i}} q \right) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ovvero

$$(3.5) \quad \begin{aligned} q_i &= \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin \left( \theta_i + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \cos(\theta_i) \\ p_i &= \sqrt{2\omega_i I_i} \sin(\theta_i). \end{aligned}$$

**Esercizio 7.** Si consideri l'Hamiltoniana  $h(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q)$ ,  $q, p \in \mathbb{R}$ , dove  $V$  è strettamente convesso. Attraverso gli stessi argomenti sviluppati sopra per un oscillatore armonico si mostri che le variabili azione angolo sono date da

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_{q_-(I)}^{q_+(I)} \sqrt{2(\bar{h}(I) - V(y))} dy \\ \theta &= \bar{h}'(I) \int_{q_-(I)}^q \frac{1}{\sqrt{2(\bar{h}(I) - V(y))}} dy \end{aligned}$$

Si mostri inoltre che  $\bar{h}'(I)$  è connesso al periodo del moto.

**Esercizio 8.** Si consideri l'Hamiltoniana  $H_\varepsilon(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 + \varepsilon \frac{1}{2}q^2$ ;  $q, p \in \mathbb{R}$ . Si faccia il cambio di coordinate che porta  $H_0$  in variabili azione angolo, si mostri che

$$(3.6) \quad H_\varepsilon(\theta, I) = \omega I + \varepsilon \frac{I}{\omega} \cos^2 \theta.$$

**Esercizio 9.** Partendo dall'Hamiltoniana  $\sum_i h_i(I_i)$  si faccia una trasformazione simplettica (diversa dall'identità) in cui le nuove coordinate  $(J, \varphi)$  sono nuovamente  $J \in \mathbb{R}^d$ ,  $\varphi \in \mathbb{T}^d$  e la nuova Hamiltoniana dipende solo dalle  $J$ .

**3.2. Riduzione della perturbazione.** Se applichiamo il cambio di variabili (3.5) alla Hamiltoniana (3.1) otteniamo la nuova Hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\theta, I) = \langle \bar{\omega}, I \rangle + \varepsilon W(\theta, I, \varepsilon),$$

dove  $\bar{\omega} = (\omega_i)$ .

**Esercizio 10.** Si ricordi l'esercizio 2, si seguano i vari cambi di variabili e si verifichi che  $W(\theta, I, 0)$  è un polinomio trigonometrico omogeneo di quarto grado. Si verifichi che può essere scritto come<sup>12</sup>

$$W(\theta, I, 0) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|k\|_1 \leq 4}} w_k(I) e^{i\langle k, \theta \rangle},$$

dove  $\bar{w}_k = w_{-k}$ .

Si noti che dalle equazioni di Hamilton segue che mentre gli angoli si muovono con velocità di ordine uno, le azioni si muovono con velocità  $\varepsilon$ . Abbiamo dunque una situazione molto simile ad un caso già studiato in maniera più ingenua: variabili lente e veloci. Dunque ci aspettiamo che, all'ordine dominante, il moto sia determinato da una equazione mediata.

Risulta dunque naturale definire

$$a(I, \varepsilon) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} W(\theta, I, \varepsilon) d\theta_1 \dots d\theta_d; \quad \widehat{W}(\theta, I, \varepsilon) := W(\theta, I, \varepsilon) - a(I, \varepsilon)$$

$$h(I, \varepsilon) := \langle \bar{\omega}, I \rangle + \varepsilon a(I, \varepsilon).$$

Cerchiamo ora nuovamente un cambio di coordinate vicino alla identità determinato dalla funzione generatrice  $S(\theta, J) = \langle \theta, J \rangle + \varepsilon \Xi(\theta, J)$ , dove  $\Xi$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  nelle variabili  $\theta$ , tale che

$$H_\varepsilon(\theta, J + \varepsilon \partial_\theta \Xi(\theta, J)) = h(J, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Un semplice calcolo mostra che questo è possibile solo se

$$(3.7) \quad \langle \bar{\omega}, \partial_\theta \Xi(\theta, J) \rangle + \widehat{W}(\theta, J, 0) = 0$$

**Esercizio 11.** Si verifichi che

$$\widehat{W}(\theta, J, 0) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \\ \|k\|_1 \leq 4}} w_k(J) e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

L'idea è di cercare una soluzione del tipo  $\Xi(\theta, J) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \xi_k(J) e^{i\langle k, \theta \rangle}$ . Sostituendola in (3.7) si ottiene

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \\ \|k\|_1 \leq 4}} [i\langle \bar{\omega}, k \rangle \xi_k(J) + w_k(J)] e^{i\langle k, \theta \rangle} = 0$$

Tale equazione ha una soluzione se

$$\xi_k(J) = \begin{cases} -\frac{w_k(J)}{i\langle \bar{\omega}, k \rangle} & \text{se } k \neq 0 \text{ e } \|k\|_1 \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque è possibile trovare una soluzione solo se  $\langle \bar{\omega}, k \rangle \neq 0$  per tutti i  $k \neq 0$ ,  $\|k\|_1 \leq 4$ . Se uno di tali prodotti è nullo si dice che il sistema ha una *risonanza* (di ordine 4) e in tal caso la soluzione per  $\varepsilon = 0$  può esibire comportamenti molto differenti da quella del caso con  $\varepsilon = 0$  rendendo quindi impossibile vederla come una piccola perturbazione. Lo studio del moto quando sono presenti risonanze è piuttosto complesso e non lo affronteremo qui.

**Assumiamo quindi che il sistema non abbia risonanze di ordine 4.**

<sup>12</sup> Qui usiamo la notazione  $\|k\|_1 = \sum_{i=1}^d |k_i|$ .

Come conclusione della nostra discussione abbiamo trovato nuove coordinate  $(\varphi, J)$  tali che nelle nuove coordinate l'Hamiltoniana ha la forma

$$H_\varepsilon = \langle \bar{\omega}, J \rangle + \varepsilon a(J, 0) + \varepsilon^2 G(J, \theta, \varepsilon)$$

**Esercizio 12.** *Si mostri che*

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi + \varepsilon \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \\ \|k\|_1 \leq 4}} \frac{w_k(J)}{\langle \bar{\omega}, k \rangle} k e^{i\langle k, \varphi \rangle} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ I &= J + \varepsilon \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \\ \|k\|_1 \leq 4}} \frac{\partial_J w_k(J)}{i \langle \bar{\omega}, k \rangle} e^{i\langle k, \varphi \rangle} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

e si verifichi che le somme definiscono funzioni reali. Mentre le equazioni del moto sono date da

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \bar{\omega} + \varepsilon \partial_J a(J, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dot{J} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

**Esercizio 13.** *Si usi il teorema della dipendenza liscia da un parametro per dimostrare che, dette  $(\varphi(t), J(t))$  le soluzioni di (3.8), si ha<sup>13</sup>*

$$\|J(t) - J(0)\| \leq C\varepsilon^2 t e^{C\varepsilon^2 t} ; \quad \|\varphi(t) - \varphi(0) - [\bar{\omega} + \varepsilon \partial_J a(J, 0)]t\| \leq C\varepsilon^2 t e^{C\varepsilon^2 t}$$

In altre parole abbiamo calcolato il moto con un errore di ordine  $\varepsilon^2 t$  per un tempo di ordine  $\varepsilon^{-2}$ . La tecnica che abbiamo usato si chiama *teoria delle perturbazioni* e quello che abbiamo fatto è un passo di teoria perturbativa. Ovviamente ora che abbiamo visto come funziona questa tecnica è inevitabile diventare avidi e domandarsi: è possibile fare un altro passo, ovvero fare un altro cambio di variabili in cui la perturbazione diventi di ordine  $\varepsilon^3$ ? È possibile fare infiniti passi e quindi risolvere le equazioni del moto? La risposta alla prima domanda è chiaramente sì, a patto che non ci siano risonanze di un qualche ordine opportuno. La risposta alla seconda è assai più complessa e la sua discussione ci porterebbe a illustrare la teoria KAM (da Kolmogorov-Arnold-Moser) che esula ampiamente dagli scopi di questo corso.

**Esercizio 14.** *Si usi la tecnica illustrata in questa sezione sull'Hamiltoniana (3.6). Si confronti la correzione della frequenza imperturbata al primo ordine con la frequenza vera del sistema.*

## REFERENCES

CARLANGLO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.  
E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it

<sup>13</sup>Suggerimento: si pensi  $\varepsilon$  fissato e si introduca un nuovo parametro  $\mu$  che moltiplica i termini  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Si confronti quindi il caso  $\mu = 0$ , in cui le equazioni sono esattamente risolubili, col caso  $\mu = 1$ , che sono le equazioni a cui siamo interessati.