VINCOLI IDEALI

CARLANGELO LIVERANI

1. Un sistema vincolato

Nella vita di tutti i giorni siamo adusi a sistemi vincolati, ovvero sistemi i cui moti sono sottoposti a limitazioni. Per esempio un tram è limitato a muoversi sulle rotaie oppure i vari punti di un corpo solido sono limitati a muoversi tutti di concerto in modo da mantenere la forma del corpo. Se adottiamo il modello del moto dato dalle leggi di Newton, allora deve essere che queste limitazioni sono dovute a forze che agiscono sui corpi o sulle loro parti.

Vediamo di essere più precisi: si consideri un sistema con N particelle in $\mathbb{R}^3$ soggette ad $m < 3N$ vincoli specificati da un funzione $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^m)$ attraverso la condizione

$$\Phi(x) = 0. \tag{1.1}$$

Se il vincolo di cui sopra fosse esattamente rispettato allora le equazioni del moto sarebbero $3N$ equazioni del tipo

$$M\ddot{x} = F + R \tag{1.2}$$

dove M è una matrice definita positiva rappresentate le masse, F sono le forze esterne applicate ai punti mentre R sono le reazioni vincolari che fanno si che i moti soddisfino i vincoli (1.1). Ovviamente le forze R sono incognite dunque abbiamo $6N$ funzioni incognite e $3N + m < 6N$ equazioni. Dunque il problema non è ben determinato e quindi occorre introdurre qualche altra condizione per determinare la soluzione in maniera univoca. Non è tuttavia chiaro quale altra condizione imporre che possa avere una validità abbastanza generale ed indipendente dalle proprietà peculiari del sistema considerato. Allo scopo di farci una idea di cosa sia ragionevole risolveremo esplicitamente un semplice caso concreto: un pendolo.

2. Un pendolo (non del tutto) ideale

Conideriamo un punto materiale di massa m soggetto alla forza di gravità ed ad una forza interna determinata dal potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}(\ell - \|x\|)^2$, ovvero una molla di costante ε^{-2}. Tale molla rappresenta un modello dell'asta a cui è attaccato il punto materiale: una asta di peso trascurabile, di lunghezza circa ℓ e di grande rigidità (e quindi poco deformabile). Infatti per deformare la lunghezza della barra occorre una energia di ordine ε^{-2}.[1] Per semplicità assumeremo $x \in \mathbb{R}^2$, un piano

Date: Versione di April 26, 2014.

[1] In realtà l'asta stessa è composta da moltissimi punti materiali uniti da forze che possiamo modellizzare con molle. Il nostro modello rappresenta quindi l'effetto cumulativo di tutte queste forze interne.

verticale. Le equazioni del moto sono dunque

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x} = -mg(0,1) + \frac{1}{\varepsilon^2\|x\|}(\ell - \|x\|)x \\
&x(0) = \bar{x}\ ; \dot{x}(0) = v.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Sia x_ε l' unica soluzione di (2.1),[2] la domanda naturale è di chiedersi se esiste un limite per $\varepsilon \to 0$. Se così fosse, allora il moto limite potrebbe suggerire un naturale candidato per un punto materiale che si muove sotto l'influenza della forza di gravità e sottoposto al vincolo $\Phi(x) := \ell - \|x\| = 0$ e dal suo studio potremmo desumere eventuali condizioni ragionevoli a cui devono soddisfare le reazioni vincolari R. Procediamo quindi allo studio di (2.1).

Per cominciare si ricordi che l'energia

$$
E = \frac{1}{2}m\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + mgx_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(\ell - \|x\|)^2 = \frac{1}{2}m\langle v, v\rangle + mg\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}(\ell - \|\bar{x}\|)^2
$$

è una quantità conservata. È quindi naturale richiedere che l'energia iniziale sia indipendente da ε, questo significa che deve esistere ξ_0 tale che

$$
|\ell - \|\bar{x}\|\,| = \varepsilon\, \xi_0.
$$

Consideriamo dunque condizioni iniziali in cui v non dipende da ε mentre $\bar{x} = (\ell + \varepsilon\xi_0)(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, con θ_0 indipendente da ε.

Dunque $E = \frac{1}{2}m\langle v, v\rangle + mg(\ell + \varepsilon\xi_0)\sin\theta_0 + \frac{1}{2}\xi_0^2$.

A questo punto risulta conveniente riscrivere tutte le quantià di interesse in coordinate polari, ovvero porre $x = \rho v(\theta)$ dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Un conto diretto mostra che

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + \varepsilon^{-2}(\ell - \rho) \\
&2m\dot{\rho}\,\dot{\theta} + m\rho\ddot{\theta} = -mg\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Ripensando all'analisi precedente sembra poi naturale porre $\rho = \ell + \varepsilon\xi$. In queste nuove variabili si ha

$$
\begin{aligned}
&m\varepsilon\ddot{\xi} - m(\ell + \varepsilon\xi)\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta - \varepsilon^{-1}\xi \\
&2m\varepsilon\dot{\xi}\,\dot{\theta} + m(\ell + \varepsilon\xi)\ddot{\theta} = -mg\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

inoltre $E = \frac{m}{2}(\varepsilon^2\dot{\xi}^2 + (\ell + \varepsilon\xi)^2\dot{\theta}^2) + mq(\ell + \varepsilon\xi)\sin\theta + \frac{1}{2}\xi^2$. Questo implica immediatamente che $\xi, \dot{\theta}$ e $\varepsilon\dot{\xi}$ sono uniformemente limitate in t e ε. Da questo e dalla seconda delle (2.2) segue che anche $\ddot{\theta}$ è uniformemente limitata. Possiamo quindi usare Ascoli-Arzelà per trovare sottosuccesioni $\{\varepsilon_j\}$ tali che $\theta_{\varepsilon_j}, \dot{\theta}_{\varepsilon_j}$ convergono uniformemente a funzioni $\theta_*, \dot{\theta}_*$. A questo punto conviene moltiplicare la seconda delle (2.2) per $(\ell + \varepsilon\xi)$ e riscriverla come

$$
\frac{d}{dt}\left[(\ell + \varepsilon\xi)^2\dot{\theta}\right] = -g(\ell + \varepsilon\xi)\cos\theta.
$$

Si noti che non sappiamo se $\ddot{\theta}_{\varepsilon_j}$ converge, sarebbe quindi meglio avere una equazione in cui questa quantità non compare. A questo scopo basta integrare l'equazione di

[2] Nel seguito spesso sopprimeremo la sottoscritta ε, quando questo non crea conduzione, per alleggerire la notazione.

cui sopra per ottenere

$$(\ell+\varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(t))^2\dot\theta_{\varepsilon_j}(t)=(\ell+\varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(0))^2\dot\theta_{\varepsilon_j}(0)-\int_0^t g(\ell+\varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(s))\cos\theta_{\varepsilon_j}(s)ds.$$

Possiamo ora prendere il limite per $j\to\infty$ e otteniamo

$$\ell^2\dot\theta_*(t)=\ell^2\dot\theta_*(0)-\int_0^t g\ell\cos\theta_*(s)ds,$$

questa equazione mostra che θ_* è una funzione liscia e si può quindi differenziare ottenendo

$$\ell^2\ddot\theta_*(t)=-g\ell\cos\theta_*(t).$$

Poichè, date le condizioni iniziali tale equazione ha una unica soluzione, questo implica che esiste il limite di θ_ε e $\dot\theta_\varepsilon$, uniformemente, quando $\varepsilon\to 0$.

Il trucco che abbiamo usato per eliminare $\dot\xi$ è un molto carino, e anche profondo, ma ha lo svantaggio che non ci dice un gran che sul moto di ξ, mentre una maggiore comprensione di tale moto era appunto la motivazione del nostro modello. Per ottenere una migliore comprensione di ξ occorre tuttavia risolvere tutto il sistema di equazioni differenziali. Vediamo dunque un approccio alternativo, più laborioso ma che fornisce molte più informazioni su cosa sta accadendo.

Per semplificare la notazione, cominciamo con l'introdurre le funzioni $\bar\varphi(t)=(0,\varphi(t))$ e $\varphi(t)=(\ell+\varepsilon\xi)\dot\theta^2-g\sin\theta$. Ovviamente φ è una funzione incognita, visto che dipende dalle soluzioni dell'equazione differenziale, tuttavia nulla ci impedisce di pensarla come una funzione data di t e risolvere il sistema lineare non omogeneo in tal modo ottenuto col metodo della variazione delle costanti (anzi, useremo una tecnica leggermente pù generale che, se volete fare più scena, potete chiamare *principio di Duhamel*). Ovviamente la "soluzione" sarà implicita e costituirà semplicemente un'altra equazione per le variabili ξ,θ, tuttavia tale equazione sarà molto più semplice da analizzare. Per procedere con questa strategia, notiamo che la prima delle (2.2) si può riscrivere in modo più utile, introducendo le funzioni $z=(\xi,\eta)$, come

$$\dot z=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\varepsilon^2 m} & 0\end{pmatrix}z+\bar\varphi=:Az+\bar\varphi.$$

Cercando una soluzione del tipo $z=e^{At}\zeta$ si ha

$$z(t)=e^{At}z(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}\bar\varphi(s)ds.$$

Poichè $A^2=-\frac{1}{\varepsilon^2 m}\mathbb{1}$, usando la definizione per serie dell'esponenziale, segue che

$$e^{At}=\mathbb{1}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)+A\sqrt{m}\varepsilon\sin(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}).$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione cercata:

$$\xi(t)=\xi_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)+\dot\xi(0)\varepsilon\sqrt{m}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)+\sqrt{m}\varepsilon\int_0^t\varphi(s)\sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)ds.$$

Quindi per capire come è fatta ξ occorre studiare l'ultimo integrale:

$$\int_0^t\varphi(s)\sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)ds=\int_0^t\left[\ell\dot\theta^2(s)-g\sin\theta(s)\right]\sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)ds+\mathcal{O}(\varepsilon t).$$

Ovviamente la funzione in parentesi quadre è ancora incognita, tuttavia sappiamo che la sua derivata è uniformemente limitata. Possiamo quindi considerare una funzione arbitraria $f \in \mathcal{C}^1$ e studiare l'integrale

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(s) \sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right) ds &= \sqrt{m}\varepsilon \int_0^t f(s) \frac{d}{ds} \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right) ds \\
&= \sqrt{m}\varepsilon \left[f(t) - f(0) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right)\right] - \sqrt{m}\varepsilon \int_0^t f'(s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m}\varepsilon}\right) ds \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon t [\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty]).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$
\xi(t) = \xi_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right) + \dot{\xi}(0)\varepsilon\sqrt{m} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m}\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 t). \tag{2.4}
$$

Per concludere dobbiamo inserire questa espressione nella seconda delle (2.2). Tuttavia si noti che questo va fatto con astuzia, infatti nè $\dot{\xi}_{\varepsilon_j}$ nè $\ddot{\theta}_{\varepsilon_j}$ sono successioni convergenti. Questo corrisponde al fatto fisico (illustrato dalla equazione (2.4)) che la lunghezza della barra sta oscillando molto rapidamente (anche se solo con ampiezza ε) e queste oscillazioni sono presenti anche in $\ddot{\theta}$. Tuttavia una funzione può avere una derivata che oscilla pazzescamente ed essere, ciò nonostante, quasi costante. Quindi il limite può essere costituito da una funzione in cui le oscillazioni sono scomparse. Questo è esattamente quello che succede in questo caso e, per metterlo in evidenza, conviene riscrivere la seconda delle (2.2) nella seguente forma integrale:

$$
\ell\dot{\theta}(t) = -g \int_0^t \cos\theta(s) ds + \ell\dot{\theta}(0) - 2\varepsilon \int_0^t \dot{\xi}(s)\,\dot{\theta}(s) ds + \mathcal{O}(\varepsilon t).
$$

Per concludere si noti che, sostituendo (2.4) nell'espressione qui sopra, il secondo integrale è nuovamente del tipo (2.3) e quindi la stessa stima si applica. Dunque, per ogni $T > 0$ fissato e per $t \leq T$ si ha

$$
\ell\dot{\theta}_{\varepsilon_j}(t) = -g \int_0^t \cos\theta_{\varepsilon_j}(s) ds + \ell\dot{\theta}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon_j T).
$$

Possiamo finalmente prendere il limite per $j \to \infty$ e otteniamo

$$
\ell\dot{\theta}_*(t) = -g \int_0^t \cos\theta_*(s) ds + \ell\dot{\theta}(0).
$$

Da questa equazione segue che θ_* è una funzione liscia e soddisfa il problema di Cauchy

$$
\ell\ddot{\theta} = -g\cos\theta \tag{2.5}
$$

con condizioni iniziali fissate. Dunque θ_* è unicamente determinato e dunque il moto θ_ε converge uniformemente (assieme alla sua derivata) a quello di un pendolo ideale descritto dalla (2.5).

3. Conclusioni

Che cosa abbiamo dunque imparato dalla massa di conti della sezione precedente?

Prima di tutto il nostro modello di vincolo ha fatto quello che ci aspettavamo: nel limite il moto avviene come se la molla fosse inchiodata alla lunghezza ℓ e le equazioni del moto fossero quelle di un pendolo ideale di lunghezza ℓ. Abbiamo scoperto la presenza di rapide vibrazioni che tuttavia non influenzano sostanzialmente il moto di θ e $\dot\theta$. In particolare, l'equazione (2.5) ha associata la sua energia, ovvero la quantità $\frac{\ell}{2}\dot\theta^2 + mg\sin\theta$ che è conservata. Questo significa che le vibrazioni (dovute alle forze interne del vincolo) non trasmettono energia al moto della variabile vincolata θ (almeno, non in tempi che non crescano essi stessi con ε^{-1}), ovvero *non fanno lavoro.*

In conclusione, abbiamo ottenuto il seguente suggerimento per una condizione da imporre alle reazioni vincolari R in (1.2): se v è la velocità di un moto permesso dal vincolo nel punto x, ovvero $D\Phi(x)v = 0$ allora deve essere

$$\langle R, v\rangle = 0 \tag{3.1}$$

ovvero, appunto, *il lavoro fatto dalle reazioni vincolari è nullo.*[3] La condizione (3.1) viene comunemente chiamata *principio dei lavori virtuali.* Poichè (se $D\Phi$ ha rango massimo) i moti possibili indipendenti sono $3N - m$ ora abbiamo $3N$ (le equazioni di Newton) $+m$ (i vincoli) $+3N - m$ (il principio dei lavori virtuali) $= 6N$ equazioni per, appunto, $6N$ funzioni incognite. Sembra quindi che ora sia possibile cercare di risolvere le equazioni del moto in maniera univoca.

Ne segue che è ragionevole assumere che un *vincolo ideale* possa essere modellizzato da reazioni vincolari che soddisfano il principio dei lavori virtuali.

Esercizio 3.1. *Si cerchi di raffinare l'analisi della sezione 2 in modo da capire cosa succede per tempi di ordine $\varepsilon^{-1}T$ invece che di ordine T come è stato fatto.*

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it

[3] Il lavoro è dato dallo spostamento per la forza, quindi a rigore la (3.1) da la sua derivata, ovvero la *potenza*. Comunqe se la potenza è nulla, nullo sarà anche il suo integrale, il lavoro, appunto.