

ARISTOTELE VERSUS NEWTON

CARLANGELO LIVERANI

1. IL MONDO SECONDO ARISTOTELE

Il modo di parlare del mondo di Aristotele non era facilmente comparabile al nostro, visto che i suoi intenti erano quelli di *spiegare le cause* in maniera *qualitativa* mentre noi siamo più propensi a *descrivere* il mondo in maniera *quantitativa*. Comunque Aristotele postulava che ogni moto avesse una causa e che dunque assenza di cause implicasse assenza di moto. Divideva quindi il moto in naturale (conforme alla natura del mobile) e forzato. La causa del moto naturale non era apparente e non voglio qui inoltrarmi nella discussione di questo punto (che ci porterebbe alla sua dottrina del *motore immobile* tanto cara alla scolastica, San Tommaso in primis), più interessante per noi è il moto forzato. Da quello che viene detto nella Fisica [1, Libro VII, capitolo 5] sembrerebbe che una descrizione equa della teoria del moto forzato secondo Aristotele si data, in termini moderni, dalla formula

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \lambda \dot{x} &= F \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

dove F è la forza applicata, λ una proprietà del corpo che descrive la sua resistenza al moto e \dot{x} la velocità del corpo. Questa è radicalmente differente dalle equazioni del moto secondo Newton e predice fatti un poco strani: se un corpo smette di essere spinto, si ferma istantaneamente, cosa contraria alla nostra esperienza quotidiana. Tuttavia Newton predice che il corpo continuerà a muoversi con la stessa velocità e anche questo è contrario alla nostra esperienza. Dunque ambedue le teorie abbisognano di modifiche per cercare di dare conto del mondo che ci circonda, nel caso di Newton si deve introdurre l'*attrito*, nel caso di Aristotele la teoria dell'*impeto* (introdotta per primo da Giovanni Filopono nel sesto secolo e poi raffinata dai filosofi arabi).

Sebbene oggi sia facile farsi beffe della teoria Aristotelica questa è tutt'altro che stupida e solo la mancanza di comprensione dei meccanismi del progresso scientifico può giustificare un tale comportamento. In particolare vorrei argomentare che la dinamica di Aristotele è in realtà un caso estremo di quella di Newton.

2. IL MONDO DI NEWTON CON UN ATTRITO ENORME

Consideriamo un moto che si muove sotto l'influenza di un attrito molto grande. Per spostare tale corpo occorrerà una forza molto grande. Questa situazione può essere modellizzata in meccanica Newtoniana (nel caso più semplice possibile) come segue

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\varepsilon^{-1}\lambda\dot{x} + \varepsilon^{-1}F(x) \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

dove ε è un numero piccolo che rende quantitativi i termini *molto grande* usati sopra. Sia $x_\varepsilon(t)$ la soluzione di (2.1). La domanda che ci poniamo è la seguente:

Come è fatto il moto quando ε è molto piccolo?

In termini precisi ci si può chiedere: esiste $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t)$?

La risposta a questa domanda verrà ottenuta attraverso vari risultati intermedi. Cominciamo dal primo, debole ma incoraggiante, fatto. Per semplificare la discussione assumiamo che $F(x) \leq C|x|$ e che quindi la soluzione esista per tutti i tempi. Inoltre, detta $-V$ la primitiva di F , assumiamo $V \geq 0$.

Lemma 2.1. *Per ogni $T > 0$ sia $x_\varepsilon \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ la soluzione di (2.1). Allora esiste ε_0 tale che l'insieme $K = \{x_\varepsilon\}_{\varepsilon \leq \varepsilon_0}$ è relativamente compatto nella topologia di $C^0([0, T], \mathbb{R})$.*

Proof. Prima di tutto è conveniente riscrivere (2.1) come

$$(2.2) \quad \varepsilon m \ddot{x} = -\lambda \dot{x} + F(x).$$

L'idea di base è di usare la conservazione della energia da cui si ha

$$0 \leq \frac{\varepsilon m}{2} \dot{x}_\varepsilon(t)^2 + V(x_\varepsilon(t)) = -\lambda \int_0^t \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds + \frac{\varepsilon m}{2} \dot{v}_0^2 + V(x_0).$$

Ovvero,

$$\int_0^t \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds \leq \frac{\varepsilon m}{2\lambda} \dot{v}_0^2 + \lambda^{-1} V(x_0).$$

L'equazione di cui sopra implica che esiste $C > 0$, indipendente da ε , tale che $\int_0^T \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds \leq C$. Ma questo implica che, per ogni $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)| \leq \int_s^t |\dot{x}_\varepsilon(r)| dr \leq \sqrt{t-s} \cdot \sqrt{\int_0^T \dot{x}_\varepsilon(r)^2 dr} \leq C^{\frac{1}{2}} \sqrt{t-s},$$

dove, nella seconda disuguaglianza, abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz. Da questa stima segue che tutte le funzioni in K sono uniformemente limitate e uniformemente continue, dunque relativamente compatte per Ascoli-Arzelà. \square

Dal Lemma 2.1 segue che K ha dei punti di accumulazione. Se potessimo mostrare che ha *un solo* punto di accumulazione questo immediatamente implicherebbe che le funzioni x_ε tendono uniformemente ad un limite: il moto per attriti enormi. L'idea per ottenere questo risultato è di mostrare che tutti i punti di accumulazione devono soddisfare una qualche proprietà che caratterizza una sola funzione. Un candidato naturale per questo sarebbe mostrare che devono essere soluzioni di una qualche equazione differenziale. Questo è esattamente quello che andiamo a fare.

Sia $x_*(t)$ un punto di accumulazione di K ovvero esiste una successione $\{\varepsilon_j\}$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |x_{\varepsilon_j} - x_*(t)| = 0.$$

Moltiplicando la (2.2) per $e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m} t}$ si ha

$$\frac{e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m} t}}{m\varepsilon} F(x_{\varepsilon_j}) = e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m} t} \ddot{x}_{\varepsilon_j} + \frac{\lambda}{\varepsilon m} e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m} t} \dot{x}_{\varepsilon_j} = \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m} t} \dot{x}_{\varepsilon_j} \right]$$

Integrando si ha

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\varepsilon_j}(t) &= e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}t} v_0 + \varepsilon^{-1} m^{-1} \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}(t-s)} F(x_{\varepsilon_j}(s)) ds \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}t} v_0 + \lambda^{-1} \int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}t}^0 e^{\tau} F(x_{\varepsilon_j}(t + \varepsilon m \lambda^{-1} \tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Per concludere ci serve un altro piccolo Lemma.

Lemma 2.2. *Per ogni $T > 0$ si ha*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}t}^0 e^{\tau} F(x_{\varepsilon_j}(t + \varepsilon m \lambda^{-1} \tau)) d\tau - F(x_*(t)) \right| = 0.$$

Proof. Si ricordi che le x_ε sono equicontinue, dunque per ogni $\delta > 0$ esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ si ha, per ogni $t \in [0, T]$, e $|s| \leq \sqrt{\varepsilon}$

$$|F(x_\varepsilon(t+s)) - F(x_\varepsilon(t))| \leq \delta.$$

Inoltre esiste j_0 tale che, per $j > j_0$,

$$|F(x_{\varepsilon_j}(t)) - F(x_*(t))| \leq \delta.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon m}t}^0 e^{\tau} F(x_{\varepsilon_j}(t + \varepsilon m \lambda^{-1} \tau)) d\tau &= \int_{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^0 e^{\tau} F(x_{\varepsilon_j}(t + \varepsilon m \lambda^{-1} \tau)) d\tau + \mathcal{O} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} e^{\tau} \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\tau} F(x_*(t)) + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} + \delta).\end{aligned}$$

Da cui il Lemma segue per l'arbitrarietà di δ . \square

Dunque \dot{x}_ε converge uniformemente. Questo implica che $x_* \in \mathcal{C}^1$ e soddisfa (1.1). Ovvero abbiamo recuperato la dinamica Aristotelica come caso limite di quella Newtoniana.

3. UN ALTRO PUNTO DI VISTA

Per concludere notiamo che l'equazione (2.2) suggerisce un'altra interpretazione del nostro limite: il moto di una massa molto piccola. Ma allora se noi fossimo molto più piccoli, tipo moscerini o ancora più piccoli, avremmo una esperienza molto più vicina alla dinamica (1.1) che a quella (2.1). Essendosi il nostro cervello evoluto in tali condizioni troverebbe intuitiva la meccanica Aristotelica. Basandoci sul *buon senso* ci verrebbe quindi spontaneo ridicolizzare Newton e trovare il discorso di Aristotele *secondo natura*. Probabilmente la dinamica di Newton, una volta scoperta (dopo sofisticati esperimenti e, magari, qualche rogo), ci parrebbe tanto esoterica come a noi sembra controintuitiva la teoria della relatività ristretta (di cui quella Newtoniana è, appunto, un caso limite a basse velocità).

REFERENCES

- [1] Aristotele, Fisica, Libri I–VIII. *Translated in english by R. P. Hardie and R. K. Gaye*
- [2] Newton, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Vol. 1,2. Translation by Motte, revised by Cajori. University of California Press, Berkeley, CA, 1962.

CARLANGELLO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: `liverani@mat.uniroma2.it`