SI POSSONO SENTIRE GLI ATOMI?

CARLANGELO LIVERANI

1. Atomi? Mai visti.

Nel IV secolo avanti Cristo Zenone (allievo e seguace di Parmenide) argomentava, in contrapposizione ad Eraclito, che il molteplice non esiste. I suoi principali argomenti in tal senso si basavano sulla infinita divisibilità:

. . . Infatti tra un essere e l'altro ve ne saranno sempre altri e tra l'uno e l'altro di questi altri ancora. E cosi gli esseri sono infiniti.[1]

Questa conclusione ovviamente portava a molteplici problemi:

. . . Cosí se gli esseri sono molti, è necessario che essi siano piccoli e grandi ad un tempo: piccoli fino a non avere grandezza affatto, grandi fino ad essere infiniti.[2]

Esistono almeno due soluzioni a tali argomenti

- Accettare l'infinita divisibiltà. Questo porta alla necessità di sviluppare una teoria consistente per un numero non numerabile di quantità.[3] Questo fu fatto, essenzialmente, nella teoria delle proporzioni che si trova nel V libro di Euclide.
- Non accettare l'infinita divisibilitá. Questo conduce alla esistenza di atomi indivisibili, come argomentato da Democrito.

Dal punto di vista fisico il primo approccio porta alla descrizione continua della realtà, per esempio attraverso equazioni differenziali alle derivate parziali. Il secondo porta ad una descrizione atomistica, per esempio come la si trova nella meccanica statistica.

Ambedue le descrizioni sono efficaci e sono ampiamente usate al giorno d'oggi, tuttavia ognuno di noi "sa" che la descrizione atomistica è quella piú fondamentale. Tuttavia nessuno di noi ha mai visto un atomo.[4]

A questo proposito Zenone dice

. . . non vi è parte di un grano di miglio che non faccia rumore cadendo.[5]

Tradotto nel nostro linguaggio potrebbe significare:

Domanda 1.1. *Se esistono gli atomi, e gli atomi si muovono e urtano tra di loro, perché non ne sentiamo il rumore?*

Date: January 31, 2006.

[1]Citato in Simplicio, Phys. 140, 27.

[2]Citato in Simplicio, Phys. 140, 34.

[3]Infatti, se si pensa lo spazio fatto di punti senza lunghezza o il tempo fatto di istanti senza durata allora tali punti devo essere non numerabili se si vuole che lo spazio abbia estensione o il tempo durata.

[4]Per la verità oggigiorno si trovano spesso articoli ed illustrazioni che dichiarano "ecco un singolo atomo." Tuttavia, se leggete accuratamente cosa vi stanno facendo vedere vedrete che si tratta di cose altamente inferenziali. Per esempio, il risultato della applicazione di forti campi elettrici a certi materiali che causano effetti su altri materiali e cosi via. Certo una cosa molto diversa dal modo in cui noi intendiamo normalmente la parola "vedere".

[5]Citato in Aristotele Phys. 250 a 19.

Ovviamente si puó rispondere semplicisticamente: perchè il nostro orecchio non è sufficientemente sensibile e un singolo atomo fa un rumore piccolissimo. Ma a questo si potrebbe replicare: si ma gli atomi sono tanti e tanti piccoli rumori ne fanno uno grande.

In questo modo, a chiacchere, si può andare avanti all'infinto senza concludere nulla. Se vogliamo capire qualcosa occorre prendere sul serio la domanda di Zenone e capirla in profondità. In particolare, cosa intendiamo per *sentire*, per *rumore* e per *atomi*?

2. Un misuratore di pressione economico ma molto preciso: l'orecchio

Ovviamente noi sentiamo grazie alle orecchie,[6] dobbiamo dunque sapere qualcosa di più su questa parte del corpo.

L'orecchio consiste in un canale uditivo della lunghezza di circa 26 mm di lunghezza e 7 mm di diametro. Alla fine del canale uditivo si trova il timpano (posizionato obliquamente), di circa 8-9 mm di diametro. Il timpano reagisce alla pressione atmosferica (inclusa ovviamente la pressione generata dalle onde acustiche) e trasmette i suoi eventuali movimenti all'orecchio interno. Al momento noi non siamo interessati in cosa avviene oltre questo punto,[7] basti dire che il nostro cervello eventualmente interpreta tali movimenti come *suono*.

L'orecchio percepisce suoni tra i 20 Hz e i 20 KHz (con una certa dipendenza da individuo ad individuo).[8] Invece la soglia di audibilità si ha per onde di pressione (onde sonore) con un ampiezza di 20 μPa mentre la soglia del dolore per pressioni dell'ordine dei 100 Pa.[9] Quindi si potrebbe pensare che l'orecchio è in grado di percepire variazioni di pressione della durata di $5 \cdot 10^{-5}$ secondi e dell'ampiezza di $20\,\mu$Pa. Questo non è necessariamente esatto, per discutere questo punto sarebbe necessario capire più a fondo il meccanismo con cui il timpano reagisce al rumore.

Il modello più semplice è quello del timpano come membrana omogenea vibrante sollecitata da una forza esterna $F(t)$ e quindi studiare il moto della membrana. Considerando dunque una membrana circolare sul domino $D := \{x^2 + y^2 \le r\}$ avremmo dunque, in prima approssimazione, una equazione del tipo

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt} u = c\Delta u + F(t)\\
&u_{|D} = 0\\
&u(x, y, 0) = \partial_t u(x, y, 0) = 0.
\end{aligned}$$

dove $u : D \to \mathbb{R}$ da la posizione della membrana e inoltre abbiamo assunto che al tempo zero la membrana è a riposo. Lo studio di tale problema costituirebbe di per se il contenuto di un breve corso, limitiamoci perciò a riassumere alcuni fatti.[10] Tale membrana ammette delle vibrazioni proprie della forma (in coordinate polari)

[6] Basta tapparsele per convincersene.

[7] Anche perchè la cosa è assai lungi dall'essere compresa adeguatamente.

[8] Una frequenza di ω Hz (ω hertz) corrisponde ad un moto oscillatorio con un periodo di $T := \omega^{-1}$ secondi. Dunque dal punto di vista delle unità di misura gli Hertz non sono altro che secondi^{-1} or s^{-1}. Un KHz corrisponde a 1000 Hz.

[9] Il Pa (Pascal) è una misura di pressione. Corrisponde ad una forza applicata di un Newton (N) per metro quadro. Un Newton corrisponde alla forza occorrente per imprimere ad un kilo una accelerazione di un metro al secondo quadro. Dunque, in unità di misura un Newton corrisponde a $Kg \cdot m \cdot s^{-2}$, mentre un Pascal a $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$. Un μPa corrisponde a 10^{-6} Pa.

[10] Chi è interessato può vedere una semplice trattazione di tale problema in *A first course in Partial Differential Equations*, H.F. WeinbergerJohn Wilwy & Sons, Inc. (1965), pp. 182-187.

$R(r)\cos m\theta\cos\left(cr\sqrt{\lambda_k^{(m)}}t\right)$ dove $\pi^2(k-1)^2 < \lambda_k^{(m)} \le \pi^2(k+m)^2$. Dato che il timpano può vibrare alla frequenza di 20 Hz ne segue che rc deve essere dell'ordine dell'unità. Ora il meccanismo con cui il timpano si mette in moto è quello della risonanza, cioè se viene investito da una forza periodica di periodo ω vicina ad una sua frequenza propria allora aumenta le propria ampiezza di oscillazione linearmente nel tempo (ovviamente solo fino a quando l'equazione *lineare* della membrana ha un senso, in realtà ben presto si fanno sentire effetti non lineari). Se quindi assumiamo di essere in grado di sentire un suono con pressione di 20μPa e della durata di 10^{-1} secondi allora per avere una stessa ampiezza di oscillazione a causa di un suono della durata di τ secondi occorre una pressione di $2\tau^{-1}\mu$Pa.

Nel caso di una fluttuazione la forza, semplicisticamente, è nulla fino al tempo zero, poi rimane costante ad un certo valore F fino al tempo τ e poi sparisce nel nulla. Chiaramente occorrerebbe analizzare la risposta della membrana a questo tipo di sollecitazione, per semplicità assumiamo che per l'udibilità sia necessario $F > 2\tau^{-1}\mu$Pa.

In realtà la situazione è assai più complessa visto che n'è il timpano è una membrana omogenea, n'è l'orecchio consiste solo del timpano. Ad esempio il canale uditivo funziona come una cassa di risonanza fornendo un guadagno di prestazione dell'ordine dei 10 dB.[11] Date tutte queste incertezze (che richiederebbero ulteriori considerazioni e dati) assumiamo, forse ottimisticamente, che l'orecchio sia in grado di percepire uno sbalzo di pressione della durata di 10^{-3} secondi e dell'intensità di 10^{-2} Pa.

Commento 2.1. *Si noti che la pressione atmosferica è di circa 100 KPa (1 bar), dunque l'orecchio sembrerebbe in grado di percepire un cambiamento di pressione, della durata di* 10^{-3} *secondi, di una parte su dieci milioni, una precisione non trascurabile.*

Quindi la domanda di Zenone diventa

Domanda 2.2. *Il rumore degi atomi è sufficiente debole da non potere essere percepito dall'orecchio?*

In questa sezione abbiamo visto che il *rumore* è riconducibile a variazioni della pressione; abbiamo chiarificato cosa intendiamo per *sentire* e abbiamo discusso cosa significa *essere sufficiente debole da non potere essere percepito dall'orecchio*. Ma cosa si intende per *Il rumore degli atomi*?

Per rispondere ad una tale domanda occorre avere una teoria che permetta una descrizione quantitativa della materia basata sui suoi costituenti atomici. Questa è la Meccanica Stastica introdotta, nella sua forma moderna, da Boltzamann. Prima di descriverla occorre però richiamare alcune nozioni della teoria della probabilità.

[11]Il decibel (dB) è una misura del rapporto tra due quantità p_1, p_2 definita secondo la (bizzarra) formula

$$10\log_{10}\frac{I_1}{I_2}$$

dunque 10 dB corrispondono ad una amplificazione di un fattore 10. Si noti che tale misura differisce dai dB che sono usati per misurare il suono. In questo caso si prende $p_0 = 20\mu$Pa come pressione di riferimento e usa la (ancora più bizzarra) relazione

$$20\log_{10}\frac{p}{p_0}$$

per calcolare i dB corrispondenti alla pressione p.

3. Probabilità: il minimo

Descriverò qui il minimo di teoria della probabilità necessaria per i nostri scopi.

Fissato $N \in \mathbb{N}$, si consideri un insieme rettangolare[12] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Questo sarà il nostro *spazio di probabilità*. Gli eventi a cui saremo interessati non sono altro che una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F}$ con le proprietà

i) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$,
ii) $A \in \mathcal{F} \iff \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
iii) $A, B \in \mathcal{F}$ implica $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Noi saremo interessati solo alla più piccola famiglia $\mathcal{F}$ contenente insiemi del tipo

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^N \; : x \in [a_1, b_1],\, x_2 \in [a_2(x_1), b_2(x_1)],\, \dots,\\ \dots,\, x_N \in [a_N(x_1, \dots, x_{N-1}), b_N(x_1, \dots, x_{N-1})]\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

dove gli estremi degli intervalli sono funzioni continue delle variabili.

Esercizio 3.1. *Si mostri che l'insieme $\mathcal{F}$ dei plurirettangoli soddisfa le proprietà (i–iii) di cui sopra.*

Gli insiemi in $\mathcal{F}$ rappresentano tutti i possibili eventi osservabili (le cose che possono accadere). Per definire la probabilità occorre allora definire una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ tale che

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
ii) se A, B sono disgiunti, allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Dunque la probabilità che non accada nulla è zero, mentre quella che accada qualche cosa è uno. Inoltre la probabilità che accada questo o quello (quando le due cose sono incompatibili) è la somma delle probabiltà.

Tutto ciò è molto astratto[13] ma è facile costruire esempi concreti.

Sia $h : \Omega \to \mathbb{R}_+$ una funzione continua integrabile e, per ogni funzione continua f, si definisca

$$\mu(f) := \frac{\int_\Omega fh}{\int_\Omega h}.$$

Questo è detto il *valore medio* di f. L'idea per definire una probabilità è di procedere come segue: dato $A \in \mathcal{F}$ definiamo[14]

$$\mathbb{P}(A) := \mu(\mathbf{Id}_A).$$

L'unico problema con tale definizione è che occorre assicurarsi che $h\mathbf{Id}_A$ sia integrabile. Poichè ogni insieme in $\mathcal{F}$ si può decomporre in insiemi del tipo (3.1), basta considerare tali insiemi.

Esercizio 3.2. *Utilizzare Fubini per mostrare che $\mu(\mathbf{Id}_A)$ è ben definito.*

[12] Cioè del tipo $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$ dove gli $I_i \subset \mathbb{R}$ sono intervalli (eventualmente non limitati).

[13] Sebbene la definizione usuale, essendo più generale, è ancora più astratta.

[14] Dato un insieme A, con $\mathbf{Id}_A$ indico la funzione caratteristica di A, cioè $\mathbf{Id}_A(\xi) = 0$ se $\xi \notin A$ e $\mathbf{Id}_A(\xi) = 1$ se $\xi \in A$.

4. Meccanica statistica: una introduzione fulminea

Pensiamo ad un gas di N particelle identiche di massa m contenute in una scatola $\Lambda = [0, L]^3$. Chiaramente per specificare la configurazione di un tale gas dobbiamo dare le posizioni $q_i = (x_i, y_i, z_i)$ e le velocità $v_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$ di tutte le particelle. Lo spazio delle configurazioni è dunque $\Omega = \Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}$. Il moto delle particelle è rettilineo fino a quando non interagiscono o non urtano le pareti. Per semplicità cominciamo con l'assumere che le interazioni siano trascurabili e che le interazioni con le pareti siano elastiche.

In questo caso ogni particella si muove per conto suo ignorando le altre e la sua energia è data dalla formula

$$h_i := \frac{1}{2} m \|v_i\|^2.$$

Mentre l'energia totale del gas è $H = \sum_{i=1}^N h_i$.

Se noi vogliamo misurare una qualche quantità, per esempio la velocità per particella nella direzione x, dobbiamo definire una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, in questo caso

$$f(q, v) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_{x,i}.$$

Chiaramente il valore di f ci da la velocità per particella in una data configurazione. Tuttavia se N è grande non abbiamo alcuna speranza di conosce esattamente la configurazione. A questo punto ci viene in aiuto la meccanica statistica che ci dice:[15] bisogna considerare lo spazio delle configurazioni come uno spazio di probabilità dotato delle misure

$$\mu_\beta(f) := Z_\beta^{-1} \int_\Omega f(q, v) e^{-\beta H(q,v)} dq dv$$
$$Z_\beta := \int_\Omega e^{-\beta H(q,v)} dq dv.$$

Questo significa che la probabilità di misurare una velocità per particella nell'intervallo $[a, b]$ è data da $\mu(\mathbf{Id}_{[a,b]} \circ f) = \mu(\{\xi \in \Omega \ : \ f(\xi) \in [a, b]\})$. D'altro canto la velocità per particella media è data da $\mu(f)$.

Non è subito chiaro cosa sia questo strano parametro β, per capirlo vediamo quanto otteniamo per l'energia per particella.

$$\mu\left(\frac{H}{N}\right) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mu(h_i)$$

Ora, integrando rispetto a tutte le variabili da cui h_i non dipende si ha

$$\int_\Omega h_i(q, v) e^{-\beta H(q,v)} dq dv = \Lambda^N Z_\beta \frac{3 \int_{\mathbb{R}} \frac{m}{2} \nu^2 e^{-\frac{\beta m \nu^2}{2}} d\nu}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\beta m \nu^2}{2}} d\nu}$$

Per calcolare questo integrale usiamo un piccolo trucco: sia

$$I(\beta) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\beta m \nu^2}{2}} d\nu$$

[15] Questo è un assioma della meccanica statistica, come le leggi di Newton sono un assioma della meccanica newtoniana.

allora, facendo il cambio di variabile $z = \sqrt{\frac{\beta m}{2}}\nu$ si ha

$$I(\beta) = \left[\frac{\beta m}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz. \tag{4.1}$$

D'altro canto

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\int_{\mathbb{R}} \frac{m}{2}\nu^2 e^{-\frac{\beta m \nu^2}{2}} d\nu = -\frac{m}{4}\left[\frac{\beta m}{2}\right]^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz.$$

Usando tale formula si ottiene

$$\mu\left(\frac{H}{N}\right) = \frac{3}{2\beta}.$$

Poichè i gradi di libertà del sistema sono $3N$ risulta che β^{-1} non è altro che la media dell'energia per grado di libertà. Questa viene interpretata come temperatura. Più precisamente la temperatura T in Kelvin è data dalla formula

$$\beta^{-1} = kT$$

dove k è la costante di Boltzmann circa uguale a $1.4 \cdot 10^{-23}$ joules/kelvin.[16]

Per fissare le idee supponiamo di essere in estate alla temperatura di 27 gradi Celsius, questo corrisponde a 300 K°.

Un'altra quantità rilevante è la massa in un cubetto V di lato ℓ, dato da

$$M_V(q, v) := \sum_{i=1}^{N} m\mathbf{Id}_V(q_i).$$

Si può facilmente calcolare

$$\mu(M_V) = \frac{N\ell^3 m}{L^3} = \rho\ell^3.$$

Dove $\rho := mNL^{-3}$ è la densità del gas. Vediamo dunque che la densità media è ovunque la stessa.

Abbiamo così determinato quale misura, secondo la meccanica statistica, è rilevante hai nostri scopi.

5. Pressione

Il prossimo passo è quello di capire a quale funzione corrisponde la misurazione della pressione nel nostro caso.

Nella meccanica statistica la pressione è interpretata come il risultato degli urti delle particelle contro una parete (nel nostro caso, il timpano). Se pensiamo, per esempio, alla parete $x = 0$, allora una particela con velocità v, collidendo elasticamente con la parete verrà riflessa. La sua velocità dopo la riflessione sarà $(-v_x, x_y, v_z)$, dunque la quantità di momento scambiata con la parete sarà $-2mv_x$.[17]

Come abbiamo visto nella sezione 2 il timpano non è in grado di reagire a cambiamenti più brevi di 10^{-4}, dunque la pressione avvertita sarà data dal momento

[16] Il joule è una unità per misurare l'energia e corrisponde al lavoro fatto da un forza di un Newton applicata per lo spostamento di un metro. Quindi un joule corrisponde a $Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$.

[17] Ovviamente deve essere $v_x < 0$ altrimenti la particella si starebbe allontanando dalla parete e quindi non ci sarebbe alcuna collisione.

comunicato da tutti gli urti che avvengono in un intervallo di tempo $\tau > 10^{-4}$ diviso per il tempo e per l'area $|A|$ del timpano,[18] in formule

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(q,v) &:= -\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Id}_{(-\infty,0]}(x_i+\tau v_{x,i})\mathbf{Id}_A\left((z_i,y_i)-\frac{x_i}{v_{x,i}}(v_{y,i},v_{z,i})\right)\frac{2mv_{x,i}}{|A|\tau}\\ &=: \sum_{i=0}^{N}P(q_i,v_i).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Come prima cosa vogliamo calcolare la pressione media $\mu(\mathbf{P})$.

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{P}) &= N\frac{-\int_{\mathbb{R}^3}dv\int_{[0,L]^3}dq\mathbf{Id}_{(-\infty,0]}(x+\tau v_x)\mathbf{Id}_A\left((z,y)-\frac{x}{v_x}(v_y,v_z)\right)2mv_xe^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2}}}{L^3I(\beta)^3|A|\tau}\\ &= -N\frac{\int_{\mathbb{R}^3}dv\int_{[0,L]}dx\mathbf{Id}_{(-\infty,0]}(x+\tau v_x)2mv_xe^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2}}}{L^3I(\beta)^3\tau}\\ &= -N\frac{\int_{-\infty}^{0}d\nu\int_0^{-\tau\nu}dx2m\nu e^{-\frac{\beta m\nu^2}{2}}}{L^3I(\beta)\tau} = N\frac{\int_{\mathbb{R}}d\nu m\nu^2e^{-\frac{\beta m\nu^2}{2}}}{L^3I(\beta)} = \frac{N}{L^3\beta} = \frac{\rho}{m\beta}.\end{aligned}$$

Abbiamo dunque come conseguenza il fatto che la pressione, a temperatura fissata, è proporzionale alla densità. Inoltre, si ha la ben nota relazione

$$\mu(\mathbf{P})L^3 = \frac{N}{\beta}$$

che stabilisce una relazione tra la pressione, temperatura e numero di particelle per unità di volume.

Tuttavia, nella realtà gli atomi si troveranno in una specifica configurazione la cui pressione non sarà necessariamente uguale al valore medio calcolato. Possiamo però calcolare quale è la probabilità delle configurazioni in cui la pressione ha un valore sufficientemente differente dal suo valore medio da potere essere percepita dall'orecchio.

Finalmente, la domanda di Zenone da puramente qualitativa diventa una precisa domanda quantitativa a cui si può cercare di dare una risposta esatta:

Domanda 5.1. *Quale è la probabilità che si abbia una fluttuazione di pressione in un tempo 10^{-3} secondi più grande di una parte su dieci milioni?*

Commento 5.2. *Si noti che nel processo di rendere la domanda precisa si sono introdotte un quantità impressionante di nuove idee e concetti tra cui i più importanti sono: un modello della trasmissione del suono nell'aria, un modello dell'orecchio, un modello dei gas ideali. Questi modelli contengono al loro interno conoscenze e semplificazioni quindi, in un certo senso, la nostra domanda finale è completamente diversa da quella originale di Zenone. Ipotesi diverse sul funzionamento dell'orecchio o sulla natura e il comportamento degli atomi avrebbero condotto a domande diverse. Solo il continuo confronto con la realtà (esperimento) e la costante rimessa in discussione dei modelli utilizzati, realizzata attraverso il loro studio* rigoroso*, può portare ad un progresso delle nostre conoscenze.* ***Questa, in sostanza, è l'essenza della fisica matematica.***

[18]Per fissare al situazione, supponiamo che il timpano sia una regione $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = 0, (x,y)\in A\}$, dove $A\subset\mathbb{R}^2$ è un disco del diametro di 8 mm.

6. Fluttuazioni

Nella sezione precedente abbiamo visto che $\mu(\mathbf{P}) = \frac{N}{L^3\beta}$, e che il nostro problema si è ridotto a stimare

$$\mu(\{(q,v) \in \Omega \ : \ \mathbf{P}(q,v) - \mu(\mathbf{P}) \geq \delta\mu(\mathbf{P})\})$$

dove $\delta = 10^{-7}$ mentre, nella definizione di $\mathbf{P}$ in formula (5.1), $\tau = 10^{-3}$ e $|A| = 5 \cdot 10^{-5}$.[19] È quindi utile introdurre la funzione

$$g(\xi,\nu) := P(\xi,\nu) - (1+\delta)(L^3\beta)^{-1}.$$

Detta $G(q,v) := \sum_{i=1}^N g(q_i,v_i)$ abbiamo che il problema si riduce a stimare la misura dell'insieme $E := \{(q,v) \in \Omega \ : \ G(q,v) \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{Id}_E) &\leq \mu(e^{zG}\mathbf{Id}_E) \leq \mu(e^{zG})\\ &= \left(\frac{\int_\Lambda d\xi \int_{\mathbb{R}^3} dv e^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2} + zg(\xi,v)}}{I(\beta)^3 L^3}\right)^N =: \varphi(z)^N.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Chiaramente $\varphi(0) = 1$, d'altro canto

$$\varphi'(0) = \frac{\int_\Lambda d\xi \int_{\mathbb{R}^3} dv g(\xi,v) e^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2}}}{I(\beta)^3 L^3} = -\frac{\delta}{L^3\beta},$$

e

$$\varphi''(z) = \frac{\int_\Lambda d\xi \int_{\mathbb{R}^3} dv g(\xi,v)^2 e^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2} + zg(\xi,v)}}{I(\beta)^3 L^3} \geq 0.$$

Quindi φ è una funzione convessa con minimo strettamente più piccolo di uno. Dunque la stima migliore che possiamo ottenere è

$$\mu(E) \leq \left[\inf_{z\geq 0} \varphi(z)\right]^N .$$

Tuttavia calcolare tale minimo è un poco laborioso, per semplificarci la vita consideriamo il minimo della funzione $\bar\varphi(z) := 1 + \varphi'(0)z + \frac{1}{2}\varphi''(0)z^2$ e usiamolo in (6.1). Per fare ciò è sufficiente, e necessario, calcolare $\varphi''(0)$. Nota che, ponendo $\bar P := (L^3\beta)^{-1}$ e

$$\bar\mu(f) := \frac{\int_\Lambda d\xi \int_{\mathbb{R}^3} dv g(\xi,v)^2 e^{-\frac{\beta m\|v\|^2}{2}}}{I(\beta)^3 L^3}$$

si ha $\bar P = \bar\mu(P)$ e

$$\varphi''(0) = \bar\mu\left([P - (1+\delta)\bar P)]^2\right) = \bar\mu(P^2) - (1-\delta^2)\bar P^2.$$

[19] Ho preso per l'area di A, una semplice approssimazione.

Inoltre,[20]

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(P^2) &= \frac{\int_{-\infty}^{0} 4m^2\nu^3 e^{-\frac{\beta m\nu^2}{2}} d\nu}{L^3 I(\beta)|A|\tau} = \frac{\int_{0}^{\infty} 2m^2 u e^{-\frac{\beta m u}{2}} du}{L^3 I(\beta)|A|\tau} \\ &= \frac{\int_0^\infty \frac{4mu}{\beta} e^{-\frac{\beta m u}{2}} du}{L^3 I(\beta)|A|\tau} = \frac{2m^2}{L^3|A|\tau}\left(\frac{2}{m\beta}\right)^2\left(\frac{m\beta}{2(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2m^2}{L^3|A|\tau}\left(\frac{2}{m\beta}\right)^2\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Il minimo di $\bar{\varphi}$ si ha dunque per

$$z_* = \delta\beta\left\{\frac{8}{|A|\tau}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - (1-\delta^2)L^{-3}\right\}^{-1}.$$

Chiaramente possiamo considerare che L è molto grande (per esempio potremmo trovarci all'esterno che corrisponde, essenzialmente ad $L \to \infty$) e dunque assumere

$$z_* \sim \frac{\delta|A|\tau\beta}{8}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da cui[21]

$$\varphi(z_*) \sim 1 - \frac{\delta^2|A|\tau}{16L^3}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dunque

$$\mu(E) \leq e^{-\frac{\delta^2|A|\tau}{16L^3}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}N} = e^{-\frac{\delta^2|A|\tau}{16}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\beta}.$$

A questo punto notiamo che $m\beta = \frac{\rho}{\mu(\mathbf{P})}$ e visto che la densità dell'aria è di circa 1 Kg per metro cubo abbiamo $m\beta \sim 10^{-5}$.[22]

Poichè a 300 gradi kelvin si ha $\beta \sim 2.5 \cdot 10^{20}$, finalmente si ha [23]

$$\mu(E) \sim e^{-60}.$$

Dunque la probabilità è super piccola e quindi sembra che Zenone avesse torto: anche se l'aria è fatta di atomi noi non possiamo sentirli. Tuttavia è interessante notare che l'esponente è ottenuto dalla cancellazione tra numeri giganteschi e dunque un piccolo cambiamento nei dati iniziali porta e differenze sostanziali. Ad esempio se avessimo un orecchio 100 volte più sensibile della nostra stima otterremo una probabilità vicinissima ad uno. Sembrerebbe dunque che il nostro orecchio abbia una sensibilità non troppo lontana da quella necessaria per sentire rumori casuali

[20]Nell'ultima riga abbiamo calcolato $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

[21]In realtà per rendere rigorosa la stima qui sotto occorre stimare la derivata seconda anche per $z \neq 0$ oppure occorre una stime della derivata terza. Lascio al lettore questo interessante esercizio.

[22]Come abbiamo visto, la media del quadrato di della velocità di una molecola nella direzione x è data da $(m\beta)^{-1}$, dunque per l'aria abbiamo una velocità media di una molecola di circa 300 m s^{-1} cioè circa 1000 kilometri all'ora. Questo numero no va però preso troppo seriamente poichè si basa sulla ipotesi che il gas sia fatto di particelle tutte uguali mentre è ben noto che l'aria è una miscela di vari gas (principalmente azoto, 78%, e ossigeno, 21 %).

[23]Questo è l'unico punto in cui stiamo usando il valore di una quantità microscopica: la costante di boltzmann discussa alla fine della sezione 4. Questo non è strano, infatti lo studio delle fluttuazioni è appunto un modo per determinare tale costante come ha splendidamente spiegato Einstein nel suo articolo sul moto Browniano.

derivanti dalla agitazione molecolare. Ciò non è poi cosi strano perchè chiaramente da un lato conviene avere un udito sensibile ma, d'altro canto, la possibilità di udire un mucchio di rumore senza senso è indubbiamente deleteria (come si può facilmente constatare accendendo la televisione in un qualunque momento).

Commento 6.1. *L'attento lettore avrà notato che la presente nota più che risolvere un problema lo apre: infatti tantissime questioni sono state lasciate in sospeso o si sono superate facendo ipotesi "a occhio" la cui validità rimane assai discutibile. Spero che questo dia un idea di come possa diventare complessa l'applicazione della matematica a problemi reali quando questa venga presa sul serio.*

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it