Tutorato Calcolo 2
Simone La Cesa, 15/11/2017

Esercizi stabilità dei sistemi di equazioni differenziali e Funzioni di Lyapunov

1. Si consideri l'equazione:

$$mx'' + k(x + x^3) = 0$$

moto di una particella di massa m attaccata ad una molla di costante elastica $k(x + x^3)$, con $k > 0$. Si dimostri che la soluzione nulla è di equilibrio stabile. A questo punto si consideri l'equazione:

$$mx'' + k(x + x^3) + hx' = 0$$

si dimostri che la soluzione nulla è di equilibrio asintoticamente stabile.

2. Una popolazione (isolata) è colpita da un virus potenzialmente mortale, che si diffonde per contatto ravvicinato tra Sani e Infetti.
Il sistema di equazioni differenziali che descrive la diffusione delle epidemie è detto sistema SIR (Sani, Infetti e Ristabiliti):

$$\begin{cases} S'(t) = \mu k - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

$k, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti reali *positive* che indicano il tasso di nascita, morte, interazione fra persone Sane e Infette etc.
Determina la relazione che deve intercorrere fra i parametri per salvare la popolazione dall'estinzione.

3. Dato il sistema:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - xy \end{cases}$$

Determina i punti di equilibrio e la loro natura

4. Dato il sistema:

$$\begin{cases} u' = v - u^2 v - v^3 \\ v' = u^2 + v^2 - 1 \end{cases}$$

Determina un integrale primo e discuti le orbite delle soluzioni.

5. Dato il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(5 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(5 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Studia la stabilità e dimostra che esiste un ciclo limite per le soluzioni.

6. Dato il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x(y^2 - 1) \\ y' = y(x^2 - 1) \end{cases}$$

Determinane gli equilibri e, in caso di un punto di equilibrio Asintoticamente Stabile, determina il bacino di attrazione.

7. Sia dato il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t) \\ y'(t) = \alpha sin(x(t)) - y(t) \qquad |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

[a] Determina e studia gli eventuali punti di equilibrio al variare di $|\alpha| < 1$.

[b] Per $\alpha = 0$ Risolvi esplicitamente il sistema.

[c] Analizza i punti di equilibrio per $\alpha = 1$. *Suggerimento*: Dimostra che $V(x, y) = x^2 + y^2$ è una funzione di Lyapunov.

Esercizi integrali Multipli

1 Calcola l'integrale doppio:

$$\iint_\Omega \sqrt{x}\, dx\, dy$$

Sull'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq e^y\}$.

2 Calcola l'integrale doppio:

$$\iint_\Omega xcos(y)\, dx\, dy$$

Sull'insieme Ω delimitato dalle curve $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.

3 Calcola con un opportuno cambiamento di variabili l'integrale doppio:

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

Dove l'insieme Ω è: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x + y \geq 0, 3 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

4 Calcolare:

$$\iint_\Omega arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy$$

Con $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, |y| \leq |x|\}$
Attenzione alla simmetria del problema

5 Calcola l'integrale doppio:

$$\iint_\Omega \frac{|x|(1+xy)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

Sull'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, |y| \geq 1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.
Anche in questo caso per non fare conti improponibili bisogna riflettere sulla simmetria.

6 Si calcoli l'integrale triplo:

$$\iiint_\Omega \sqrt{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Dove Ω è il dominio dato dal Paraboloide: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, y^2+z^2 \leq x\}$.

7 Calcola il volume del solido formato intersecando la sfera $x^2+y^2+z^2-z=0$ con il cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

8 Calcola, passando in coordinate cilindriche:

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Dove Ω è la regione contenuta all'interno del cilindro $x^2+y^2=1$, con $z \leq 3$, sopra il paraboloide $x^2+y^2+z=1$.

9 Calcola il volume del solido formato intersecando i due cilindri $x^2+y^2 \leq 1$ e $x^2+z^2 \leq 1$.

10 Calcola il volume dell'ellissoide scaleno:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

11 Calcola l'area del quadrilatero delimitato dalle curve:

$$y^2=ax,\ y^2=bx,\ xy=\alpha,\ xy=\beta$$

$0<a<b$ e $0<\alpha<\beta$. *Suggerimento:* $xy=u$, $y^2=vx$ con $\alpha \leq u \leq \beta$ e $a \leq v \leq \beta$

Soluzioni

Esercizi stabilità dei sistemi di equazioni differenziali e Funzioni di Lyapunov

1 Ponendo $x' = v$, il sistema in (x, v) ha come punto di equilibrio sul piano delle fasi $(0, 0)$. La funzione di Lyapunov del sistema è data dall'energia meccanica:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}mv^2 + k(x^2 + x^4),\ v = x'$$

La sua derivata covariante è strettamente uguale a zero, infatti si dimostra che l'energia del sistema è un integrale primo del moto. Di conseguenza il punto è Stabile ma non Asintoticamente stabile.
Con l'aggiunta dell'attrito viscoso hx', si vede col metodo del Linearizzato che la soluzione è Asintoticamente Stabile.

2 Le prime due equazioni sono indipendenti dalla terza, quindi possiamo considerare il sistema bidimensionale (S, I). I punti di equilibrio sono $P_0 = (S_0, I_0) = (k, 0)$ e $P_1 = (S_1, I_1) = (\frac{\delta}{\beta}, \mu\left(\frac{k}{\delta} - \frac{1}{\beta}\right))$, ove $\delta = \mu + \gamma + \alpha$.
Possiamo studiare 2 casi:
1) $\beta k < \delta$: Il punto P_1 non ci interessa, perché $I_1 < 0$ (il numero di infetti è negativo e non ci sarebbe la diffusione dell'infezione). Con il metodo del linearizzato si vede immediatamente che P_0 è punto Asintoticamente Stabile. La popolazione converge a $I = 0$, quindi guarisce.
2) $\beta k > \delta$: Ho entrambi i punto di equilibrio. Stavolta però P_0 è instabile, mentre P_1 è asintoticamente instabile. Dunque la popolazione tenderà ad infettarsi e, conseguentemente, a estinguersi.

3 I punti di equilibrio sono $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. La matrice Jacobiana è:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

Dallo studio degli autovalori si evince che $(1, 1)$ è un punto di sella, mentre $(-1, -1)$ è un fuoco instabile (perché la parte reale dei suoi autovalori è positiva.

4 L'integrale primo del sistema è $H(u, v) = u + \frac{v^2}{2}$. Le orbite delle soluzioni si trovano sugli insiemi di livello dell'integrale primo, che sono delle parabole sul piano (u, v).

5 Passando alle coordinate polari, usando le relazioni:

$$\begin{cases} \rho\rho' = xx' + yy' \\ \rho^2\theta' = xy' - yx' \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} \rho' = 5 - \rho^2 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

Si deduce che la circonferenza di raggio $\sqrt{5}$ è una traiettoria periodica, ed p un ciclo limite per l'equazione. Tale traiettoria viene percorsa in verso orario ($\theta' < 0$). Studiando il segno di ρ', ricaviamo che tale ciclo limite è stabile. (Inoltre l'equazione per ρ si risolve esattamente).

6 Il sistema ha 5 punti di equilibrio: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (-1,-1)$, $P_4 = (-1,1)$. Dal Linearizzato si ricava che i punti P_i, con $i = 1,2,3,4$ sono degli punti di equilibrio instabile. Invece in un intorno del punto $(0,0)$ è possibile definire la funzione di Lyapunov $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, che è stretta soltanto se $2x^2y^2 \leq x^2 + y^2$, quindi nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Questo insieme è positivamente invariante ed è il bacino di attrazione.

7 L'unico punto di equilibrio al variare di α è dato da $(0,0)$. Mediante il linearizzato si vede che se $|\alpha| < 1$ il punto è Asintoticamente Stabile. Posto $\alpha = 0$ la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} \\ y(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, per studiare il sistema dobbiamo trovare una Funzione di Lyapunov. Provando con $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, la derivata covariante è pari a:

$$\frac{du(x,y)}{dt} =< \nabla u, F(x,y) >= 2xy - 2x^2 + 2ysin(x) - 2y^2$$

Maggiorando con $|sin(x)| \leq |x|$, allora $\frac{du(x,y)}{dt} \leq -(x+y)^2$, funzione di Lyapunov stretta. Il punto è Asintoticamente stabile.

Integrali Multipli

1 $I = \frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{45}$

2 $I = \frac{1-cos(1)}{2}$

3 $I = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4 $I = 0$

5 $I = \frac{5}{4}$

6 $I = \frac{16}{15}\sqrt{2}\pi$

7 $V = \frac{\pi}{8}$

8 $I = \frac{4\pi}{3}$

9 $V = \frac{16}{3}$

10 $V = \frac{4}{3}\pi abc$

11 $A = \frac{\beta-\alpha}{3} log \left(\frac{b}{a}\right)$