Calcolo II

Esame del 21/09/2018

Cognome......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione
$$y'' + y = \sin x.$$

2. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3x^2 - 6x + 2 \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x} &= v. \end{aligned}$$
Si dica per quali $v \in \mathbb{R}$ esite $t_* > 0$ tale che $x(t_*) \geqslant 10^{10}$.

3. I calcoli l'area superficiale della calotta sferica $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|(x, y, z)\| = 2,\ z \geqslant 1\}$.

4. Data una superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = g(x, y);\ (x, y) \in U = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2\}$ e un campo vettoriale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, si mostri che
$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}(f), n\rangle \, dS = \int_\Sigma d\omega$$
dove $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ e n è la normale alla superifice.

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2, definita da
$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \forall x \in [-1, 0] \\ x(1-x) & \forall x \in [0, 1]. \end{cases}$$
Si trovi una funzione $g(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \pi k x$ tale che
$$\sup_x |f(x) - g(x)| \leqslant 10^{-3}.$$

6. Dati $\omega \notin \mathbb{Q}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo uno, definita, per $x \in [0, 1]$, da
$$f(x) = x + \omega,$$
si trovino tutte le funzioni g a quadrato sommabile, di periodo uno, tali che
$$g \circ f = g.$$

Soluzione

1. Si verifica facilmente che $y_p(x) = -\frac{x}{2}\cos x$ è una soluzione particolare dell'equazione. Se ne evince che la soluzione generale è
$$y(x) = a\cos x + b\sin x - \frac{x}{2}\cos x.$$

2. Si può verificare direttamente che l'energia $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$, per il potenziale $V(x) = x(x-1)(2-x)$, è conservata lungo le soluzioni del moto. Il massimo locale del potenziale si ha per $x_* = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ne segue che il moto può superare il punto x_* solo se
$$v^2 = 2E(0) \geqslant 2V(x_*) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$
Se $v > 0$ si avrà sempre $\dot{x} \geqslant 0$. Se $v < 0$, allora il moto arriverà al punto in cui $V(x) = \frac{1}{2}v^2$ e quindi tornerà indietro fino ad arrivare al punto $x = 0$ con velocità $-v > 0$ e ci siamo riportati al caso precedente. Per concludere si noti che iper $x > 0$ il potenziale è sempre minore di $V(x_*)$ e dunque
$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - V(x(t))} \geqslant \sqrt{v^2 - V(x_*)}; = \gamma > 0.$$
Ne segue che il moto arriveà arbitrariamente lontano, in particolare dopo un tempo $10^{10}\gamma^{-1}$ il punto avrà certamente superato il punto 10^{10}. In effetti, calcolando il tempo necessario per arrivare ad un generico punto z si vede che il moto esplode all'infinito in un tempo finito.

3. La superficie in coordinate sferiche è data da $\psi(\theta, \phi) = 2(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$ per $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Dunque
$$\text{area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \|\partial_\theta\psi \wedge \partial_\varphi\psi\| d\theta d\varphi = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi d\theta d\varphi = 8\pi(1 - \cos(\frac{\pi}{3})) = 4\pi.$$
In alternativa, si può fare il calcolo in coordinate cartesiane. In questo caso la superficie è descritta da $\psi(x, y) = 2\left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$ per $x^2 + y^2 \leqslant 4(\sin\frac{\pi}{3})^2 = 3$. Dunque
$$\text{area}(\Sigma) = \int_{x^2+y^2\leqslant 3} dxdy\sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\, \rho\sqrt{\frac{4}{4 - \rho^2}} = 4\pi.$$

4. Si ha che $n = [1 + (\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2]^{-\frac{1}{2}}(-\partial_x g, -\partial_y g, 1)$, dunque
$$\int_\Sigma \langle \text{rot}(f), n\rangle\, dS = \int_U \langle \text{rot}(f)(x, y, g(x, y)), (-\partial_x g, -\partial_y g, 1)\rangle\, dxdy.$$
D'altro canto,
$$\begin{aligned}\int_\Sigma d\omega &= \int_\Sigma [(\partial_x f_2 - \partial_y f_1)dx \wedge dy + (\partial_y f_3 - \partial_z f_2)dy \wedge dz + (\partial_x f_3 - \partial_z f_1)]\, dx \wedge dz \\ &= \int_U [(\partial_x f_2 - \partial_y f_1) - (\partial_y f_3 - \partial_z f_2)\partial_x g + (\partial_x f_3 - \partial_z f_1)\partial_y g]\, dxdy \\ &= \int_U \langle \text{rot}(f)(x, y, g(x, y)), (-\partial_x g, -\partial_y g, 1)\rangle\, dxdy,\end{aligned}$$
come volevasi dimostrare.

5. Si noti che
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \forall x \in [-1, 0] \\ -2 & \forall x \in [0, 1]. \end{cases}$$
Ne segue che
$$\begin{aligned}\widehat{f}_k &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi kx} f(x)dx = -\frac{1}{2\pi^2 k^2}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi kx} f''(x)dx = \frac{2i}{\pi^2 k^2}\int_{0}^{1} \sin \pi kx dx \\ &= \frac{i(1-\cos \pi k)}{\pi^3 k^3}.\end{aligned}$$
Ovvero
$$|\widehat{f}_k| \leqslant \frac{4}{\pi^3 k^3}.$$
Per altro $f_{-k} = -f_k$ da cui segue che
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{4(1-\cos \pi k)}{\pi^3 k^3} \sin \pi kx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \pi(2k+1)x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \pi(2k+1)x + R_n(x).\end{aligned}$$
Dove
$$R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2x+1)^3} dx \leqslant \frac{2}{\pi^3(2n+1)^2}.$$
Ne segue che il resto è più piccolo di 10^{-3} se $n \geqslant \sqrt{\frac{1000}{2\pi^3}} - \frac{1}{2}$, ovvero è sufficiente $n = 4$. Il polinomio trigonometrico cercato è dunque
$$\sum_{k=0}^{4} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \pi(2k+1)x,$$
e consiste solo di 5 termini.

6. Se g è a quadrato sommabile, allora
$$\int_{\mathbb{R}} |g \circ f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x+\omega)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx$$
dunque anche $g \circ f$ è a quadrato sommabile. Possiamo quindi calcolarne i coefficienti di Fourier
$$\widehat{(g \circ f)}_k = \int_0^1 e^{-i2\pi kx} g(f(x))dx = \int_0^1 e^{-i2\pi kx} g(x+\omega)dx = e^{i2\pi k\omega}\int_0^1 e^{-ikx} g(x)dx = e^{i2\pi k\omega}\widehat{g}_k.$$
Ne segue che se $g \circ f = g$ deve essere $\widehat{g}_k = e^{i2\pi k\omega}\widehat{g}_k$, ovvero o $g_k = 0$ oppure deve essere $e^{i2\pi k\omega} = 1$. Ma questo ultima uguaglianza è possibile solo se $k\omega = n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Il che significherebbe o $k = 0$ oppure $\omega = \frac{n}{k}$ il che è impossibile visto che $\omega \notin \mathbb{Q}$. Ne segue che $\widehat{g}_k = 0$ per tutti i $k \neq 0$. Ovvero $g(x) = \widehat{g}_0 = \int_0^1 g(z)dz$. In altre parole, le sole funzioni con la proprietà cercata sono le costanti.