

Tutorato Calcolo 2

Simone La Cesa, 22/11/2017

Esercizi vari su integrali multipli

1. Trova il baricentro e il volume del paraboloido troncato che si ottiene ruotando attorno l'asse z la funzione $f(z) = \sqrt{z}$, con $0 \leq a \leq z \leq b$
2. Calcola il volume del toro ottenuto ruotando attorno l'asse z il cerchio $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, con $0 < r < y_0$.
3. Trovare la massa e il baricentro di una lamina piana triangolare con vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ se la densità vale $\mu(x, y) = 1 + 3x + y$.
4. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (a, 0)$ e raggio a . Verificare la relazione:

$$I_0 = I_C + a^2A$$

dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia rispetto all'origine e al centro C , rispettivamente e A è l'area del disco.

5. (Dall'esame del Prof. Cannarsa, Calcolo 2, 22/06/2017)
Per ogni $t \geq 0$ sia $S(t) = B \cup C(t)$ dove:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$C(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq t, x^2 + z^2 \leq 1\}$$

Supponiamo che la regione $S(t)$ sia occupata da un solido di densità:

$$\rho(x) = \begin{cases} 4 & x \in B \\ f(y) & x \in C(t) \end{cases}$$

dove $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione continua.

- a) Per ogni $t \geq 0$ determinare il baricentro $C = (x_b(t), y_b(t), z_b(t))$ del solido.
- b) Per $f(t) = c > 0$, determinare l'unico valore $t_c > 0$ tale che $y_b(t_c) = 0$.
- c) Provare che, se esiste $\bar{t} \geq 0$ tale che $y_b(t)$ è costante per ogni $t \geq \bar{t}$, allora:

$$f(t) = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$$

Soluzioni numeriche

1. $V = \frac{\pi(b^2 - a^2)}{2}$
 $B = (0, 0, \frac{2b}{3})$.

2. $V = 2\pi^2 r^2 y_0$

3. $m = \frac{8}{3}$
 $B = \left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$

4. $I_0 = \frac{3}{2}\pi a^4$
 $I_C = \frac{1}{2}\pi a^4.$