

ALCUNI PROBLEMI NON BANALI CONCERNENTI I LIMITI

CARLANGELO LIVERANI

1. QUANTO SPESSO VI PAGANO GLI INTERESSI?

Supponiamo di avere un capitale di $a > 0$ euro e di metterlo in una banca che ci paga il due per cento annuo su base annua. Questo significa che, dopo un anno, il nostro capitale sarà $a + 2a/100 = a(1 + 1/50)$. A questo punto riceviamo una pubblicità di un'altra banca che ci offre lo stesso tasso di interesse ma che lo paga su di una base semestrale. Ciò significa che dopo sei mesi paga mezzo tasso annuale, dunque dopo sei mesi il nostro capitale sarà $a + a/100$ e dopo altri sei mesi ci viene pagato l'interesse su questo capitale, dunque dopo un anno avremo

$$\left(a + \frac{a}{100}\right) + \frac{1}{100} \left(a + \frac{a}{100}\right) = a \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2.$$

Per esempio, se il nostro capitale iniziale è di 10000 euro ($a = 10000$), allora nel primo caso dopo un anno abbiamo 10200 euro, nel secondo 10201 euro. Insomma, non molto di più ma comunque di più. Stiamo per trasferire i nostri fondi in tale banca quando veniamo a sapere che un'altra banca paga gli interessi su base quadrimestrale, cioè tre volte all'anno. Un rapido calcolo ci fa vedere che in questo caso alla fine di un anno il nostro capitale sarebbe

$$a \left(1 + \frac{1}{150}\right)^3.$$

Dunque, se $a = 10000$ si ottiene 10201.33 (arrotondato al centesimo), ancora un poco di più che nel caso precedente. Saputo ciò cadiamo vittima dell'avidità e ci chiediamo che succederebbe se ci pagassero gli interessi n volte all'anno. Chiaramente dopo un anno avremmo

$$(1.1) \quad a \left(1 + \frac{1}{50n}\right)^n.$$

Che succede a questa successione, cresce arbitrariamente oppure, purtroppo, è limitata?

Per capirlo studiamo il seguente caso più generale,

$$(1.2) \quad a_n = \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n,$$

per $b > 0$.

Per studiare la successione $\{a_n\}$ è conveniente riscriverla in maniera opportuna applicando il binomio di Newton.

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{b^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} b^k.$$

Poichè nell'ultima frazione ci sono k termini al numeratore si può dividere ognuno di essi per n e questo equivale a dividere numeratore e denominatore per n^k . Dunque

$$(1.3) \quad a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} b^k$$

La formula (1.3) può sembrare più complicata della formula (1.2) ma permette di ottenere immediatamente due informazioni fondamentali sulla successione altrimenti non facilmente ottenibili.

Lemma 1.1. *Per ogni $b > 0$ esiste $M > 0$ tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}_*$.*

Proof. Da (1.3) segue

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + \sum_{k=L}^n \frac{b^k}{k!}.$$

Se ora scegliamo L come il primo intero per cui $L \geq 2b$, possiamo scrivere

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + \sum_{k=L}^n \frac{b^k}{L^{L-k}L!} \leq \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + \frac{b^L}{L!} \sum_{k=0}^{n-L} \frac{b^k}{L^k} \leq \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + \frac{b^L}{L!} \sum_{k=0}^{n-L} 2^{-k}$$

visto che moltiplicare m numeri tutti più grandi di L da ovviamente un numero più grande di quello che si ottiene moltiplicando L m volte. Ci siamo perciò ridotti a calcolare l'ultima sommatoria. Per farlo esiste un simpatico trucco algebrico: per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_*$ si ha¹

$$(1 - \beta) \sum_{k=0}^n \beta^k = 1 - \beta^{n+1}.$$

Dunque

$$(1.4) \quad \sum_{k=0}^n \beta^k = \frac{1 - \beta^{n+1}}{1 - \beta}.$$

Usando tale formula per $\beta = \frac{1}{2}$ si ha

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + \frac{b^L}{L!} \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} \leq \sum_{k=0}^{L-1} \frac{b^k}{k!} + 2 \frac{b^L}{L!} = M.$$

□

Lemma 1.2. *Per ogni $b > 0$ la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente.*

Proof. Usando ancora (1.3) si ha

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1})}{k!} b^k \geq \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} b^k = a_n.$$

□

¹Verificate questa formula è un utile esercizio.

Dunque le successioni (1.2) sono monotone crescenti e limitate e quindi ammettono limite.

Un caso particolarmente interessante è il caso $b = 1$. Tale caso è così importante che il limite si merita un nome tutto suo: e . Dunque

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Notare che, sebbene abbiamo stabilito la sua esistenza, non sappiamo un gran ché sul numero e , solo che $a_1 = 2 \leq e \leq 3$.²

A questo punto possiamo tornare alla nostra successione originaria

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{50n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{50n}\right)^{50n} \right]^{\frac{1}{50}} = e^{\frac{1}{50}}.$$

Si può calcolare che $ae^{\frac{1}{50}}$ è circa uguale a 10202, dunque la differenza tra pagare gli interessi annualmente e pagarli in maniera continua è di circa due euro all'anno su 10000 euro. Non molto per il singolo cliente³ ma non trascurabile per una banca che abbia molti clienti e con depositi ben più sostanziosi.

Per calcolare più precisamente il valore dei limiti (1.2) ci si può avvalere ancora una volta della formula (1.3). Per ogni $m \in \mathbb{N}_*$ definiamo

$$\beta_{m,n} := \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} b^k.$$

La ragione per fare ciò dipende dalla seguente stima

$$|a_n - \beta_{m,n}| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} b^k \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{2^{-k+m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{2}{(m+1)!},$$

dove abbiamo assunto $m > 2b$. Dunque

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \beta_{m,n}) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \beta_{m,n}| \leq \frac{2}{(m+1)!}.$$

Per di più

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{m,n} = \sum_{k=0}^m \frac{b^k}{k!}$$

questo significa che

$$(1.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{m,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{b^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}.$$

L'ultima espressione si chiama una *serie* e è semplicemente un limite di somme, ne parleremo più ampiamente in seguito. Per di più le stime precedenti mostrano che se vogliamo conoscere e con una precisione di un millesimo basta calcolare i primi sette termini della serie, si ottiene così.⁴

$$0 \leq e - 2.718 \leq 10^{-3}.$$

²la stima inferiore segue dalla dimostrazione del Lemma 1.1 dove $b = 1$ e $L = 2$.

³Però in trenta anni (la durata di certi mutui) fa una differenza di circa cento euro, cioè l'un per cento del capitale iniziale.

⁴Il lettore che ha voglia di fare alcuni calcoli numerici può facilmente ottenere stime migliori calcolando più termini.

Rimane il dubbio che forse con un poco di astuzia si possa calcolare e esattamente. Questo è un argomento complesso, qui ci limitiamo al seguente risultato.

Lemma 1.3. *Il numero e non è un numero razionale.*

Proof. La dimostrazione è per assurdo: si supponga che esistano $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $e = \frac{p}{q}$. Allora dalla formula (1.6) segue

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

e, moltiplicando per $q!$,

$$p(q-1)! = \sum_{k=0}^q (k+1) \cdots q + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1) \cdots k}$$

poichè gli altri sono numeri interi ne segue che anche l'ultimo termine deve essere un numero intero. Tuttavia

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1) \cdots k} \leq \frac{1}{q+1} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+2)^{k-q-1}} = \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+2)^k} = \frac{q+2}{(q+1)^2}$$

dove abbiamo nuovamente usato (1.4). Poichè $\frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$ per ogni $q \in \mathbb{N}$,⁵ ne segue una contraddizione e quindi il Lemma. \square

Per finire notiamo una interessante proprietà dei limiti (1.2), già adombrata nel calcolo in (1.5). Dati $a, b > 0$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{a^k b^l}{k! l!}.$$

D'altro canto, ponendo $m = k + l$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{a^k b^l}{k! l!} &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{a^k b^l (k+l)!}{k! l! (k+l)!} = \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\min\{m, n\}} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(a+b)^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} a^k b^{m-k}. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è più piccolo di $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(a+b)^m}{m!}$ che tende a zero quando n cresce.⁶ Da ciò segue la stupefacente uguaglianza

$$(1.7) \quad \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a+b}{n}\right)^n.$$

Se dunque definiamo la funzione, $x \geq 0$,⁷

$$E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

⁵Lo si verifichi!

⁶Se il perchè non è chiaro significa che non state capendo cosa succede, in particolare non avete capito nulla della dimostrazione del Lemma 1.1. Malissimo!

⁷La seconda uguaglianza segue da (1.6).

ne segue $E(1) = e$ e, per ogni $p, q \in \mathbb{N}$, $E(\frac{p}{q})^q = E(p) = e^p$ da cui segue $E(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \geq 0$.

Che succede per $x < 0$? Si potrebbe studiare direttamente il problema come si è fatto per il caso positivo ma è più istruttivo usare la formula (1.7). Si noti che, per $b > 0$,

$$\left(1 + \frac{b}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{n^2}\right) < 1.$$

A questo punto ci serve il seguente fatto.

Lemma 1.4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$ si ha

$$(1 - x)^n \geq 1 - nx.$$

Proof. La dimostrazione si basa sul principio di induzione: se una relazione dipendente da n è vera per $n = 1$ e se si può verificare che assumendola vera per n allora deve essere vera per $n + 1$, allora tale relazione è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

Vediamo questo principio in azione: Se $n = 1$ allora la relazione in questione diventa $1 - x \geq 1 - x$ che è ovviamente vera.

Ora assumiamo che sia vero $(1 - x)^n \geq 1 - nx$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora

$$(1 - x)^{n+1} = (1 - x)^n(1 - x) \geq (1 - nx)(1 - x) = 1 - (n + 1)x + nx^2 \geq 1 - (n + 1)x.$$

□

Il Lemma precedente implica

$$1 > \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \left(1 - \frac{b}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{b^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{b^2}{n}$$

da cui segue che il limite (1.2) è ben definito anche per $b < 0$, dunque la funzione $E(x)$ è definita su tutto \mathbb{R} e, per di più, $E(x)E(-x) = 1$.

In conclusione, $E(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$, è quindi inevitabile usarla per definire potenze irrazionali. Per esempio, che significato potremmo mai dare ad una espressione come $e^{\sqrt{2}}$? Ovviamente, la cosa più naturale è di porre $e^{\sqrt{2}} = E(\sqrt{2})$ ovvero di definire

$$e^x = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente la funzione e^x appena definita si chiama *esponenziale in base e*.

Si noti che da (1.6) segue che e^x è una funzione crescente, dunque è iniettiva, sia $\ln x : \mathbb{R}_{>} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione inversa.

Problem 1. Si mostri che $\ln(e^x) = e^{\ln x} = x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ e che

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

2. IL LOGARITMO

Abbiamo visto che il logaritmo può essere definito come la funzione inversa dell'esponenziale. Tuttavia può essere più istruttivo un approccio più diretto. Si noti che quanto segue non è completamente rigoroso in quanto si basa in parte sulla nostra intuizione geometrica (anche se lo si può rendere rigoroso un volta che siano stati sviluppati gli strumenti necessari).

L'utilità del logaritmo nasce dalla sua caratteristica di trasformare prodotti in somme facilitando in tal modo calcoli complessi.⁸ Vediamo come nasce una tale funzione.

Supponiamo di cercare una funzione $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia la magica proprietà

$$(2.1) \quad \ell(ab) = \ell(a) + \ell(b),$$

esiste una tale funzione e se si come è fatta?

Prima di tutto notiamo che per ogni numero $a \in \mathbb{R}$, dovrebbe essere

$$\ell(0) = \ell(0 \cdot a) = \ell(0) + \ell(a)$$

ma questo implicherebbe $\ell(a) = 0$ sempre, una funzione non molto interessante! Rassegniamoci dunque al fatto che una tale funzione non può essere definita in 0. Limitiamoci a cercare $\ell : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprietà (2.1).

$$\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = 2\ell(1)$$

dunque deve essere $\ell(1) = 0$. D'altro canto

$$\ell(a^p) = p\ell(a)$$

e

$$0 = \ell(1) = \ell(aa^{-1}) = \ell(a) + \ell(a^{-1})$$

dunque $\ell(a^{-1}) = -\ell(a)$. Infine,

$$\ell(a) = \ell(a^{\frac{q}{q}}) = q\ell(a^{\frac{1}{q}})$$

cioè $\ell(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ell(a)$. In conclusione abbiamo che, per ogni numero $b \in \mathbb{Q}$ si ha

$$(2.2) \quad \ell(a^b) = b\ell(a).$$

Questa proprietà è ovviamente molto conveniente per calcolare potenze e radici di numeri. se $\bar{a} \in \mathbb{R}^+$ è tale $\ell(\bar{a}) = 1$ allora la (2.2) diventa $\ell(\bar{a}^b) = b$; cioè sui razionali ℓ è l'inverso della elevazione a potenza. Inoltre è chiaro che se una funzione ℓ soddisfa (2.1) allora anche la funzione $\lambda\ell$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisferà (2.1).

Questo ci da una buona idea delle proprietà di ℓ ma la domanda rimane: esiste una tale funzione sui reali con la magica proprietà (2.1)?

Per rispondere a questa ultima domanda è possibile ragionare in diversi modi. Il modo sotto riportato è interessante per il suo particolare sapore geometrico.

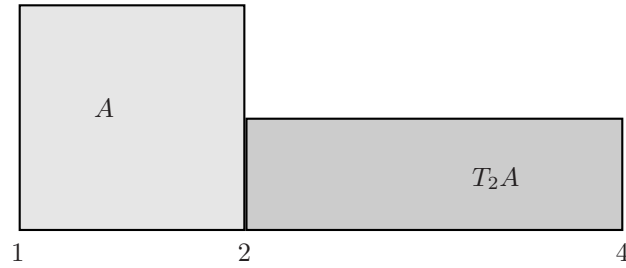
Purtroppo è necessario iniziare con una piccola digressione.

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si consideri la trasformazione del piano $T_a(x, y) := (ax, a^{-1}y)$. Se prendiamo il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 1]\}$ allora $T_a Q$ è il rettangolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, 2a], y \in [0, a^{-1}]\}$, si veda la figura 1 per un esempio della azione di T_a nel caso $a = 2$.

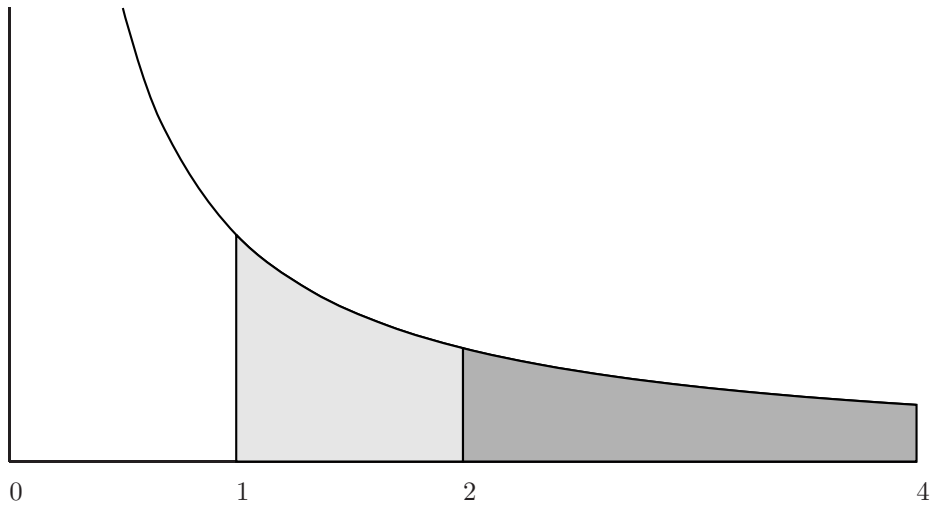
La cosa interessante delle trasformazioni T_a è che l'immagine di un rettangolo è un rettangolo e che l'area del rettangolo immagine è uguale all'area del rettangolo originario (uno nell'esempio in figura). Sembra quindi naturale che questa proprietà di conservare le aree valga per qualunque (ragionevole) regione del piano. Assumiamolo e vediamo che ne segue.⁹

⁸Con l'avvento dei calcolatori questo aspetto dei logaritmi ha perso di importanza ma non per questo l'utilità dei logaritmi è venuta a cessare.

⁹Il problema chiaramente è che non abbiamo ancora definito l'area di una figura *qualsiasi* e dunque non è ben chiaro come calcolarne algebricamente il valore, tuttavia il suo significato geometrico-intuitivo dovrebbe essere chiaro.

FIGURE 1. Azione di T_2 .

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, si tratta di una iperbole. Si definisca la funzione $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente: se $z \geq 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, z]; 0 \leq y \leq 1/x\}$. Per esempio l'area della regione grigio chiaro nella figura 2 è il valore di $\ln(2)$. Se invece $z < 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [z, 1]; 0 \leq y \leq 1/x\}$ presa col segno negativo. Chiaramente $\ln(z)$ è una funzione ben definita (almeno dal punto di vista geometrico).

FIGURE 2. Grafico di $f(x) = 1/x$

Vediamo che succede applicando la trasformazione T_a alla regione $P(z)$. Se $y \geq 0$ allora $a^{-1}y \geq 0$ inoltre se $y \leq 1/x$ allora $a^{-1}y \leq a^{-1}/x = 1/(ax)$. Ciò significa che se un punto appartiene all'iperbole anche il punto immagine apparterrà all'iperbole, mentre se un punto si trova sotto l'iperbole allora anche il punto immagine giace sotto l'iperbole, dunque $T_a P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, za]; 0 \leq y \leq 1/x\}$. Nella figura 2 si vede la regione $T_a P(z)$, nel caso speciale in cui $z = 2$ ed $a = 2$, ombreggiata in grigio scuro.

Da quanto detto segue che $P(a) \cup T_a P(b) = P(ab)$ (nel caso in figura $P(2) \cup T_2 P(2) = P(4)$). Ma questo significa

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

cioè la funzione \ln ha la proprietà (2.1)! Dunque tali funzioni esistono, ma siamo in grado di calcolarne i valori?

Chiaramente \ln è crescente ed illimitata, dunque è ragionevole assumere che esista un numero reale e tale che $\ln(e) = 1$, vediamone comunque una dimostrazione rigorosa basta su di un modo di ragionare che ci dovrebbe essere ormai familiare.

Lemma 2.1. *Esiste un numero $e \in \mathbb{R}$ tale che $\ln(e) = 1$.*

Proof. Prima di tutto vediamo che esiste un numero a_1 tale che $\ln(a_1) > 1$. Poichè dalla figura 2 è ovvio $\ln 2 > 0$ ne segue che $\ln 2^n = n \ln 2 > 1$ a patto che n sia sufficientemente grande (più grande di $(\ln 2)^{-1}$ per la precisione). Abbiamo perciò che nell'intervallo $[1, a_1]$ la funzione \ln cresce da 0 ad un valore maggiore di 1. Dividiamo l'intervallo a metà (sia a_2 il punto medio) se $\ln a_2 = 1$ abbiamo trovato il numero che cercavamo, se $\ln a_2 < 1$ allora consideriamo l'intervallo $[a_2, a_1]$; se invece $\ln a_2 > 1$ allora consideriamo l'intervallo $[1, a_2]$. In entrambi i casi abbiamo un intervallo di lunghezza $(a_1 - 1)/2$ in cui \ln vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (come sull'intervallo originario). Ora dividiamo nuovamente l'intervallo a metà, chiamiamo a_3 il punto medio, e ragionando come sopra otteniamo un nuovo intervallo, questa volta di lunghezza $(a_1 - 1)/4$, tale che \ln vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (a meno che a_3 non sia il numero cercato).

A questo punto possiamo iterare questa procedura quante volte vogliamo e, se non troviamo prima il numero voluto, otteniamo una successione $\{a_n\}$, chiaramente tale successione è di Cauchy, sia e il suo limite. Per costruzione

$$|e - a_n| \leq \frac{a_1 - 1}{2^{n-1}}.$$

Rimane da investigare che succede alla successione $\{\ln a_n\}$. Se $a > b > 1$ allora $\ln a - \ln b \leq b^{-1}(a - b)$, questo perchè $\ln a - \ln b$ è semplicemente l'area sotto l'iperbole nell'intervallo $[b, a]$ mentre $b^{-1}(a - b)$ è l'area di un rettangolo di base $[b, a]$ e altezza b^{-1} che ovviamente contiene l'area precedente (si veda la figura 3). Dunque si ha

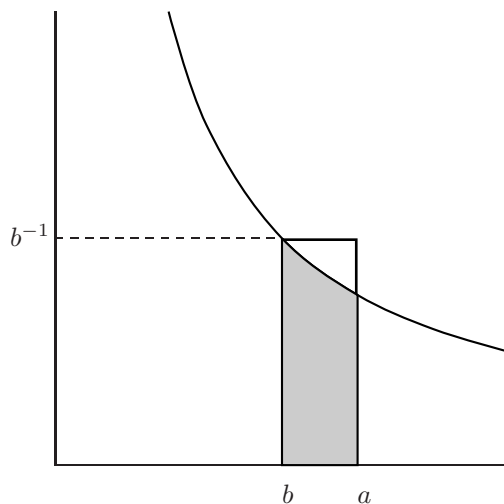


FIGURE 3. Come stimare l'area sotto l'iperbole

$|\ln a_n - \ln e| \leq |e - a_n| \leq (a_1 - 1)2^{-n+1}$, perciò $\ln e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Ma $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ per costruzione e questo conclude il Lemma. Infatti, la successione $\{\ln a_n\}$ è l'unione di due sottosuccessioni: quella degli a_n che sono il limite sinistro di uno degli intervalli che abbiamo costruito iterativamente e quella degli a_n che sono un limite destro. Queste due sottosuccessioni devono avere lo stesso limite della successione $\ln a_n$ ma una deve avere limite minore od uguale ad uno e l'altra maggiore o uguale a uno, per il modo con cui sono stati costruiti gli intervalli. Dunque l'unica possibilità è che il limite sia uno.

□

Dunque il numero e esiste, ma di che numero si tratta?

Consideriamo $\ln(1 + 1/n)$, chiaramente

$$(2.3) \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Infatti guardando alla figura 4, si vede che la prima quantità è l'area del rettangolo grigio scuro, la seconda (in grigio) è l'area sotto l'iperbole (che definisce \ln) e la terza è l'area del rettango più alto (in grigio chiaro).

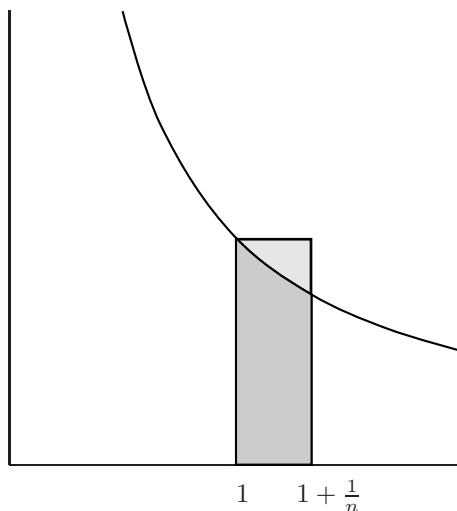


FIGURE 4. Aree rilevanti per l'equazione (2.3)

Dalla (2.3) e dalle proprietà di \ln segue che

$$(2.4) \quad 1 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{e che} \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1.$$

Poichè la funzione \ln è crescente

$$(2.5) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Vediamo dunque che e non era un nome casuale, si tratta infatti della nostra vecchia conoscenza (si veda la prima sezione di queste note). D'altro canto le (2.4) implicano

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

e da questo segue una dimostrazione alternativa del limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3. CHIEDILO AD ARCHIMEDE

In questa sezione cercheremo di calcolare l'area del cerchio seguendo una vecchia idea di Archimede (III secolo avanti Cristo).

Si consideri un cerchio di raggio r , chiaramente la sua area è più grande di quella di un qualunque poligono inscritto e più piccola di quella di un qualunque poligono circoscritto. Ispirandoci ad Archimede considereremo solo poligoni regolari con n lati. Si veda in figura 5 uno spicchio di poligono inscritto e circoscritto di angolo 2α , cioè con π/α lati (ovviamente supponendo π/α intero). Vediamo l'area del

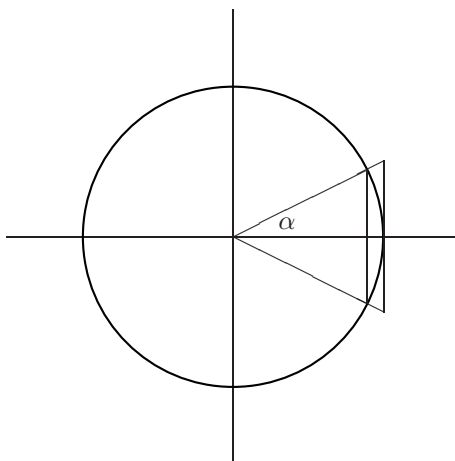


FIGURE 5. Uno spicchio di poligono inscritto e di poligono circoscritto

poligono inscritto. Se il poligono ha n lati allora $\alpha = \pi/n$. L'area del mezzo spicchio circoscritto in figura è $r^2/2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = r^2/4 \cdot \sin 2\alpha$. Chiamando $A_{i,n}$ l'area del poligono inscritto di n lati abbiamo perciò

$$A_{i,n} = r^2 \frac{n}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

Analogamente l'area del poligono circoscritto $A_{c,n}$ è data da

$$A_{c,n} = r^2 n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Chiaramente, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(3.1) \quad A_{i,n} \leq A_c \leq A_{c,n}$$

dove A_c è l'area della circonferenza (sempre che a tale quantità si possa attribuire un senso).

Studiamo cosa succede alle espressioni di cui sopra quando n tende all'infinito. La figura 5 suggerisce che per ogni angolo α si ha $\sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$, poichè $r\alpha$ è la lunghezza dell'arco. Da questo segue $\alpha \cos \alpha \leq \sin \alpha \leq \alpha$ ovvero

$$(3.2) \quad \cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1.$$

Ponendo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ in (3.2) otteniamo

$$\cos \frac{2\pi}{n} \leq \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \leq 1$$

ovvero

$$\pi r^2 \cos \frac{2\pi}{n} \leq A_{i,n} \leq \pi r^2.$$

Visto che $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2\pi}{n} = 1$, ne segue, per il confronto, che $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{i,n} = \pi r^2$.

Analogamente, da (3.2),

$$1 \leq \frac{\tan \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha}$$

e, allo stesso modo che sopra, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{c,n} = \pi r^2$.

Finalmente, prendendo il limite per n che va all'infinito nella (3.1) si ottiene la ben nota formula:

$$A_c = \pi r^2.$$

Notare che tutto si basa sul limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

la cui validità è sopra supposta e argomentata ragionevole.

4. FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

La sezione precedente non era rigorosa: abbiamo utilizzato molte idee geometriche non giustificate ed abbiamo usato funzioni trigonometriche non definite esattamente.¹⁰ Per rendere rigorosa e elegante la trattazione precedente occorrono strumenti matematici che non abbiamo ancora sviluppato. Tuttavia qualcosa può essere detto anche a questo punto, anche se pecca di eleganza.

Supponiamo che esistano $\varpi \in \mathbb{R}_>$ e due funzioni continue $\sin x$, $\cos x$ tali che¹¹

$$\begin{aligned} \sin(x) &> 0 \text{ for all } x \in (0, \varpi) \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(\varpi) &= -1 \\ (\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= 1 \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ovviamente potrebbe essere che nessuna tale funzione esista. Per verificarlo occorre studiare le conseguenze delle nostre assunzioni. Prima di tutto notiamo che la terza e quinta di (4.1) implicano

$$\sin(x + \varpi) = -\sin x.$$

¹⁰ Ovviamente la si può rendere rigorosa ma occorre definire in maniera geometricamente precisa tutti i concetti utilizzati. Questo è fatto negli *Elementi* di Euclide e in *Della sfera e del cilindro* di Archimede. Ma si tratta di uno stile di matematica non più in voga. Oggi preferiamo, io credo a ragione, degli argomenti più algebrici e meno geometrici.

¹¹ Attenzione! Qui \sin e \cos sono solo nomi di funzioni con certe proprietà, a priori non hanno nulla a che fare con le funzioni seno e coseno con cui avete familiarità dagli studi precedenti. Anche se hanno le proprietà (4.1) in comune.

Questo significa che $\sin(x + 2\varpi) = \sin x$, ovvero \sin è una funzione periodica di periodo 2ϖ . Mentre \cos deve essere una funzione pari ed anche periodica di periodo 2ϖ poichè dalla terza, quarta e quinta di (4.1) segue

$$\begin{aligned} 0 &= \sin 0 = \cos x \sin(-x) + \cos(-x) \sin x = [\cos(-x) - \cos x] \sin x \\ 0 &= \sin \varpi = \cos(\varpi - x) \sin x + \cos \varpi \sin(\varpi - x) = \sin x(\cos(\varpi - x) + \cos x). \end{aligned}$$

Inoltre, dalla terza e dalla quarta di (4.1) segue

$$0 = \sin \varpi = 2 \sin(\varpi/2) \cos(\varpi/2).$$

Siccome dalla prima di (4.1) segue che $\sin(\varpi/2) > 0$, deve essere $\cos(\varpi/2) = 0$ e quindi $\sin(\varpi/2) = 1$. Allora, dalla quinta di (4.1),

$$\sin(x + \varpi/2) = \cos(\varpi/2) \sin x + \cos x \sin(\varpi/2) = \cos x.$$

Quindi, $\cos x \geq 0$ per $x \in [-\varpi/2, \varpi/2]$. Concludiamo lo studio delle proprietà qualitative notando che, per $h > 0$ piccoli e $x \in [0, \varpi/2]$

$$\sin(x - h) = -\sin h \cos x + \cos h \sin x = \sin x + (\cos h - 1) \sin x - \sin h \cos x < \sin x$$

dunque in tale intervallo $\sin x$ è una funzione crescente. In particolare questo mostra che $\sin x \leq 1$ e quindi che la quarta proprietà di (4.1) non è contraddittoria.

Problem 2. *Si dimostri che $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.*

Poniamo ora $\alpha_n = \sin(2^{-n+1}\varpi)$. Dalla quinta di (4.1) segue

$$\alpha_n = 2 \sin(2^{-n}\varpi) \cos(2^{-n}\varpi) = 2 \sin(2^{-n}\varpi) \sqrt{1 - \sin^2(2^{-n}\varpi)} = 2\alpha_{n+1} \sqrt{1 - \alpha_{n+1}^2}.$$

Con un minimo di algebra si ottiene, per $n \geq 3$,¹²

$$\alpha_{n+1}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_n^2}}{2} = \frac{\alpha_n^2}{2 \left[1 + \sqrt{1 - \alpha_n^2} \right]}.$$

Problem 3. *Si mostri che $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Si spieghi perchè questo incoraggia a credere che le nostre assunzioni sono consistenti.*

Se avete svolto il problema qui sopra vi siete resi conto che per avere una informazione più precise su α_n è naturale considerare la successione $\beta_n = 2^{n-1}\alpha_n$. Tale successione soddisfa la relazione ricorsiva

$$(4.2) \quad \beta_{n+1} = \beta_n \sqrt{\frac{2}{\left[1 + \sqrt{1 - 2^{-2n+2}\beta_n^2} \right]}} \geq \beta_n.$$

Dunque il limite esiste se la successione è limitata. Per vedere questo scriviamo

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \beta_{n+1} &= \beta_n \left[1 + \frac{1 - \sqrt{1 - 2^{-2n+2}\beta_n^2}}{1 + \sqrt{1 - 2^{-2n+2}\beta_n^2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \beta_n \left[1 + \frac{2^{-2n+2}\beta_n^2}{\left[1 + \sqrt{1 - 2^{-2n+2}\beta_n^2} \right]^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta_n \left[1 + 2^{-2n+2}\beta_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \beta_n \left[1 + 2^{-n+1}\beta_n \right]. \end{aligned}$$

¹² La soluzione $\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_n^2}}{2}$ va scartata perchè viola la proprietà di \sin di essere crescente.

Per stimare dall'alto la formula di cui sopra notiamo che (4.2) implica la stima $\beta_{n+1} \leq \sqrt{2}\beta_n$ da cui si ha $\beta_n \leq 2^{(n-1)/2}$. Tale stima è inutile per determinare se β_n è limitato oppure no, tuttavia inserendola in (4.3) si ha

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &\leq \beta_n [1 + 2^{-(n-1)/2}] \leq \beta_3 \prod_{k=3}^n [1 + 2^{-(k-1)/2}] \leq \beta_3 \prod_{k=3}^n e^{2^{-(k-1)/2}} \\ &\leq \beta_3 e^{\sum_{k=3}^n 2^{-(k-1)/2}}. \end{aligned}$$

Dunque la successione è limitata ed ha quindi limite, ovvero esiste $\varpi_* > 0$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sin \frac{\varpi}{2^{n-1}} = \varpi_*.$$

Si noti inoltre che, poichè la successione è crescente, si ha

$$(4.4) \quad \sin \frac{\varpi}{2^{n-1}} \leq \frac{\varpi_*}{2^{n-1}}$$

La prossima domanda riguarda il valore di ϖ_* . A questo scopo è opportuna una piccola digressione. Si noti che se $\sin x$ soddisfa tutte le proprietà (4.1) allora lo stesso vale per $f(x) = \sin \lambda x$ con ϖ/λ al posto di ϖ . Il valore di ϖ nel contesto attuale non ha quindi alcun significato particolare, si tratta solo della scelta di una normalizzazione (ovvero dell'unità di misura scelta per misurare gli angoli). Semplicemente 2ϖ è il periodo di \sin .

Problem 4. *Si verifichi che, al contrario, il valore di ϖ_* non dipende dalla normalizzazione scelta.*¹³

Dunque, se facciamo la scelta $\varpi = \varpi_*$ otteniamo che

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{\varpi} \sin \frac{\varpi}{2^{n-1}} = 1.$$

Si noti che quando discusso fin qui ci permette di calcolare le funzioni $\sin x$ per qualunque x . Infatti, basta farlo per $x \in (0, \varpi/2)$. Dato tale x lo possiamo scrivere come $x = \sum_{k=2}^{\infty} a_k 2^{-k} \varpi$, con $a_k \in \{0, 1\}$. Allora

$$\sin x = \sin \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k} \varpi \right) \cos(a_2 \varpi/4) + \cos \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k} \varpi \right) \sin(a_2 \varpi/4).$$

Continuando ad applicare le formule di somma ci si riduce alla somma e prodotto di \sin e \cos calcolati in valori per cui abbiamo ottenuto formule esplicite.¹⁴

¹³ Dal punto di vista intuitivo non è così sorprendente: se \sin avesse il significato della sezione precedente, allora ϖ_* sarebbe l'area del cerchio di raggio uno che ovviamente non dipende dal fatto che gli angoli vengano misurati in gradi, radianti o spanne.

¹⁴ Incidentalmente, il fatto che possiamo calcolare la funzione \sin e che i valori calcolati soddisfano tutte le proprietà (4.1) mostra che tale funzione esiste e le proprietà assunte non sono contraddittorie (sebbene per darne una dimostrazione completa occorrerebbe lavorare un poco di più).

In particolare, se $x \leq 2^n \varpi$ per n grande, si ha che $a_k = 0$ per tutti i $k \leq n$ e quindi, ponendo $x_m = \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} \varpi$,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_n = \sin(x_{n+1}) \cos(a_n \varpi 2^{-n}) + \cos(x_{n+1}) \sin(a_n \varpi 2^{-n}) \\ &= \sin(x_{n+1}) - \sin(x_{n+1}) \frac{[\sin(a_n \varpi 2^{-n})]^2}{1 + \cos(a_n \varpi 2^{-n})} \\ &\quad + \sin(a_n \varpi 2^{-n}) - \frac{[\sin(x_{n+1})]^2}{1 + \cos(x_{n+1})} \\ &= \sin(x_{n+1}) + a_n \sin(\varpi 2^{-n}) + b_n, \end{aligned}$$

dove $|b_n| \leq Cx_n^2$ per una qualche costante $C > 0$ (calcolatela!). Iterando questa procedura si ha

$$(4.6) \quad \sin x = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \sin(\varpi 2^{-k}) + B = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varpi 2^{-k} \frac{\sin(\varpi 2^{-k})}{\varpi 2^{-k}} + B$$

dove $B \leq 2Cx^2$.

Problem 5. Usate (4.5) ed (4.6) per dimostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ |\sin x| &\leq |x| \quad \text{for all } x \in [-\varpi/2, \varpi/2]. \end{aligned}$$

L'ultima domanda che ci poniamo è: ma queste funzioni hanno qualcosa a che fare con quelle geometriche discusse nella sezione precedente? Per rispondere basta notare che hanno esattamente le stesse proprietà visto che l'unico grado di libertà era la normalizzazione e questa è fissata una volta per tutte dal limite (4.5), ovvero dalla scelta $\varpi = \varpi_*$. Ne segue che \sin e \cos sono le solite funzioni seno e coseno e che $\varpi_* = \pi$.

Si noti che quanto sopra permette anche di calcolare π (sebbene non sia il modo più efficiente di farlo). Per esempio, è banale calcolare $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_4 = \frac{1}{2} [\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^{-1}]^{\frac{1}{2}}$. Questo implica $\beta_4 = 4 [\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ che è circa 3,06 che corrisponde al valore di π con un errore inferiore al 3%.¹⁵ Se volete vedere quanto è efficiente l'algoritmo, calcolatevi β_5 .

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY, liverani@mat.uniroma2.it

¹⁵ Si tratta di un risultato piuttosto scarso, gli Egiziani, i Babilonesi e gli antichi Indiani erano tutti in grado di fare meglio. Solo la Bibbia, primo libro dei Re, capitolo 7, verso 23, dove π è approssimato con 3, fa peggio. Ma ovviamente lo scopo del libro non era di carattere matematico.