

Calcolo I

Esercizi in formato d'esame

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata o incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Data la funzione $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$ si determini il dominio naturale di definizione e si dica quali di questi integrali è ben definito

$$\int_{-1}^0 f(x)dx ; \quad \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

2. Si trovi una successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $0 \leq b_n \leq 1$, tale che il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_i$$

non esiste.

3. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

se ne determini il raggio di convergenza. Detta $f(x)$ la funzione determinata dalla serie se ne scriva la serie di Taylor nel punto $1/2$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

4. Si tracci il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{1-x^2}$$

e si classifichi il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha x$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Mostrare che tra tutte le curve $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ che congiungono i punti $x, y \in \mathbb{R}^2$ la retta è la curva più corta.

6. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

si dica se è esatta.