

# Calcolo I

## Esercizi in formato d'esame

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata o incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri la successione ricorsiva  $x_1 = 1/2$ ,  $x_{n+1} = x_n - x_n^2$  e si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n.$$

2. Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-2} \left[ \cos(\sqrt{x}) - \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}} \right].$$

3. Si considerino le funzioni

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Si dica per quali  $\alpha \in (0, 2)$   $f_\alpha$  è ovunque derivabile.

4. Sia  $g(x) = x^3 - 3x + 1$ . Si tracci il grafico della funzione

$$f(x) = g \left( 4 \int_0^x e^{-y^2} dy \right).$$

5. Si calcolino gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2 (\sin x)^3 dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2 (\sin x)^2 dx.$$

6. Usando la definizione di  $e^x$  come serie di potenze si mostri che  $e^{x+y} = e^x e^y$ .