Calcolo I (Fisica)

Esame 15/09/2017

Cognome........................ Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $a = 0.\overline{123}$ dove la barra sopra 123 significa che le cifre sono ripetute indefinitivamente (cioè $a = 0.123123123...$). Si dimostri che $a \in \mathbb{Q}$.
2. Si studi il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}.$$
3. Data la forma differenziale $\omega = \sin(x+y)dx + \sin(x+y)dy$ e la curva $\gamma = \{(2\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ si calcoli l'integrale
$$\int_\gamma \omega.$$
4. Calcolare la derivata millesima di $f(x) = \ln((1+x)(1-x))$ in $x = 0$.
5. Risolvere l'equazione $e^z = 1$ nel campo complesso.
6. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2^k}.$$

SOLUZIONE

1. Si noti che, per la definizione della numerazione decimale,
$$a = \sum_{k=0}^{\infty} 0.123 \cdot 10^{-3k}.$$
Dunque, sommando la serie geometrica, si ha
$$a = \frac{0.123}{1-10^{-3}} = \frac{123}{999} \in \mathbb{Q}.$$

2. Si noti che la funzione è negativa per < 0 e positiva per $x > 0$, inoltre in zero ha un asintoto verticale. Ha un asintoto orizzontale a -1 per $x \to -\infty$ metre va all'infinito per $x \to +\infty$. Finalmente ha un solo minimo locale per $x = \ln(1+\sqrt{2})$. Queste considerazioni sono più che sufficienti per tracciarne il grafico.

3. La forma differenziale è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (insieme semplicemente connesso, e stellato) ed è chiusa, γ è una curva chiusa, quindi esatta. Dunque l'integrale è nullo.

4. Cominciamo col calcolare la derivata prima:
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{2x}{1-x^2}.$$
Se $|x| < 1$ possiamo usare la somma della serie geometrica per scrivere
$$f'(x) = -2x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}.$$
Poichè la serie converge uniformemente per $|x| \leqslant 1/2$ e visto che $f(0) = 0$ possiamo integrare termine a termine ottenendo
$$f(x) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k}.$$
Dunque la funzione è sviluppabile in serie di potenze (serie di Taylor). D'altro canto sappiamo che la serie di Taylor si scrive come
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$
Ne segue che i coefficienti devono essere uguali e quindi
$$\frac{f^{(1000)}(0)}{1000!} = -\frac{2}{1000}.$$
Ovvero
$$f^{(1000)}(0) = -2 \cdot 999!.$$
In alternativa, se conoscete lo sviluppo di Taylor del logaritmo (ma poi all'orale vi chiederei: "ma questo da dove salta fuori?")
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
potete scrivere
$$\ln(1-x)(1+x) = \ln(1-x^2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$
e quindi procedete come prima.

5. Ponendo $z = x + iy$ si ha
$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1.$$
Prendendone il modulo si ottiene $e^x = 1$ che ha come unica soluzione $x = 0$. Ne segue che deve essere $\cos y = 1$ e $\sin y = 0$. Le soluzioni di tali equazioni sono $y = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Si noti che se $|x| \geqslant 1$ allora il termini della serie non tendono a zero e quindi la serie non può convergere (criterio necessario per la convergenza). D'altro canto, se $|x| < 1$ allora
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k |x^{2^k}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|x|^n.$$
Siccome la seconda serie ha raggio di convergenza 1, ne segue che la nostra serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Commenti

- Molti hanno risolto l'esercizio 1 usando una formuletta che probabilmente gli era stata insegnata alle elementari. Ho contato questo zero: che uno si faccia imbrogliare alle elementari è comprensibile, ma all'università è necessario essere in grado di distinguere i fatti aneddotici da quelli veri (e, in matematica, il criterio di verità è la dimostrazione).
- La maggioranza delle persone non ha la più pallida idea di come si manipolano i numeri complessi. Per molte attività questo non ha molta importanza, ma per un fisico è un disastro.
- Nell'esercizio 3 alcune persone usano parole a casaccio (compatto o connesso invece che semplicemente connesso). Mi rendo conto che nel linguaggio normale si tendono ad usare parole a casaccio, ma in matematica le parole contano.