Alcuni piccoli commenti

(che possono essere utili a risolvere qualche esercizio!)

• Se G è un gruppo e $g \in G$, allora il sottogruppo generato da g è $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

• Se G è un gruppo *abeliano* e $g, h \in G$, allora il sottogruppo generato da g ed h è l'insieme di tutti i prodotti del tipo $g^n h^m$, al variare di n, m in $\mathbb{Z}$ (verificare!).

• Quanto sopra non è necessariamente vero quando si tratta di un gruppo non abeliano. Ad esempio, in S_3, il sottogruppo generato da $(1, 2)$ e $(1, 3)$ è tutto S_3.

• Un gruppo G è abeliano se e solo se $ghg^{-1}h^{-1} = e$, per ogni $g, h \in G$.

Quindi, se H è un sottogruppo normale di G, il gruppo G/H è abeliano se e solo se $ghg^{-1}h^{-1} \in H$ per ogni $g, h \in G$.

• Se $f : G \to H$ è un omomorfismo, e G è ciclico generato dall'elemento g, allora f è completamente determinato da $f(g)$.

È vero il viceversa? Cioè, se $h \in H$, esiste sempre un omomorfismo da G in H che manda g in h?

• Se $f : G \to H$ è un omomorfismo, e G è generato dagli elementi g, g', allora f è completamente determinato da $f(g), f(g')$.

Se G è abeliano, chi è $f(g^n g'^m)$?

• Nel caso più generale, per determinare tutti gli omomorfismi $f : G \to H$ conviene utilizzare il teorema di isomorfismo.

Se $f : G \to H$ è un omomorfismo, allora $G/Ker(f)$ ed $Im(f)$ sono isomorfi, ed f induce un isomorfismo.

Quindi bisogna cercare tutti i gruppi del tipo G/N, con N normale in G, e tutti i sottogruppi H' di H. Quando si verifica che G/N ed H' sono isomorfi, allora ogni isomorfismo fra G/N ed H' darà luogo ad un omomorfismo da G in H. Viceversa, come detto sopra, per ogni omomorfismo $f : G \to H$ si presenta questa situazione, con $N = Ker(f)$ e $H' = Im(f)$.