Commenti ad alcuni esercizi del primo appello

Nota bene: la terminologia non è identica in tutti i testi. In questi commenti potrei per caso usare una terminologia leggermente diversa da quella usata dal docente del corso. Se così fosse, adattatela a quella da voi conosciuta. (Alcuni calcoli potrei averli sbagliati, devo ancora ricontrollare tutto) (Esclusivamente per problemi tecnici, a volte l'uso degli accenti in questo documento non combacia con l'uso comune nella lingua italiana)

Esercizio 1.

Siccome $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ costituiscono una base di V, e T è lineare, $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$, $T(\mathbf{v}_3)$ generano l'immagine di T. $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ sono linearmente indipendenti, perchè non proporzionali, ed entrambi non nulli; $T(\mathbf{v}_3) = T(\mathbf{v}_1) - 2T(\mathbf{v}_2)$ è combinazione lineare di $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$, quindi $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ formano **una** base (fra le tante possibili) dell'immagine di T, che ha pertanto dimensione 2.

Per un teorema noto, la dimensione dell'immagine di T + la dimensione del nucleo di T è uguale alla dimensione di V (spazio di partenza), quindi la dimensione del nucleo di T è $3 - 2 = 1$. Per determinare una base del nucleo, si può procedere come segue. Siccome $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ costituiscono una base di V, ogni vettore di $\mathbf{v} \in V$ si può esprimere in maniera unica nella forma $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$, dove α_1, α_2, α_3 appartengono al campo degli scalari. Poichè T è lineare, $T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \alpha_3 T(\mathbf{v}_3) = \alpha_1(2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \alpha_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + \alpha_3(-\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (2\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v}_1 + (-\alpha_1 - \alpha_3)\mathbf{v}_2 + (-\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{v}_3$. Questo vettore è uguale al vettore nullo se e solo se $2\alpha_1 + \alpha_2$, $-\alpha_1 - \alpha_3$ e $-\alpha_2 + 2\alpha_3$ sono contemporaneamente nulli, ancora usando l'ipotesi che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ costituiscono una base di V. Ponendo $\alpha_3 = t$, si ottiene $\alpha_1 = -t$, $\alpha_2 = 2t$, quindi i vettori del nucleo sono esattamente i vettori del tipo $-t\mathbf{v}_1 + 2t\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3$, da cui si vede che il vettore $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ costituisce una base per il nucleo.

Naturalmente, l'esercizio si poteva risolvere anche usando le matrici, anzi, questo metodo sarebbe stato preferibile, a patto di essere a conoscenza (e spiegare!!) quello che si stava facendo.

La matrice associata a T, rispetto alla base data (considerata come base sia relativamente allo spazio di partenza che a quello di arrivo), è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Per qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ se e solo se A moltiplicata per le componenti di $\mathbf{v}$ mi da le componenti di $\mathbf{w}$. Ad esempio, $T(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ si traduce in $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una qualunque base per lo spazio generato dalle colonne di A mi da le **componenti** di una base dell'immagine di T. Le **componenti** dei vettori del nucleo di T sono esattamente le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice associata è A.

Esercizio 2.

Un metodo per controllare se r ed s sono sghembe è di controllare prima se sono o meno incidenti. Un'equazione parametrica di s è

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 0 + t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$$

Per determinare l'intersezione di r ed s basta sostituire nelle equazioni di r le coordinate del punto generico di r, cioè:

$$\begin{cases} (1 - 2t) - (1 + t) = 0 \\ (1 - 2t) + t + 1 = 0 \end{cases}$$

Effettuando i calcoli si verifica che si tratta di un sistema incompatibile, quindi r ed s non si intersecano. Possono quindi essere parallele o sghembe; per verificare che si tratta effettivamente di quest'ultimo caso, basta determinare coefficienti direttori e verificare che non sono proporzionali.

Naturalmente, per quel che riguarda la posizione relativa di due rette nello spazio, ciascuno ha i suoi procedimenti preferiti, che sono comunque ammissibili, purchè corretti!

Esercizio 3.

Se $(y_1, y_2) = \varphi((x_1, x_2))$, l'equazione di φ è

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = -x_1 - 3x_2 + 2 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + 3 \end{cases}$$

Vi sono vari metodi possibili per risolvere la parte (b). Per esempio, si possono prendere due punti P e Q appartenenti ad r; $\varphi(r)$ sarà la retta che passa per $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$. Oppure si può determinare un'equazione parametrica di r

$$\begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

e sostituire in (1), ottenendo un'equazione parametrica per $\varphi(r)$, poi eliminare il parametro ottenendo equazioni cartesiane; o anche semplicemente ricavare x_1 dall'equazione di r, sostituire in (1) ed eliminare x_2. Notate però che se (x_1, x_2) è un vettore direttore di r, allora un vettore direttore di $\varphi(r)$ si ottiene applicando ad (x_1, x_2) solo la parte lineare φ_ℓ di φ, cioè

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 3x_2 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

(applicando φ si otterrebbe un risultato sbagliato!).

Un altro metodo concettualmente semplice, ma complicato dal punto di vista dei calcoli, è quello di ricavare equazioni per l'inversa di φ

$$\begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

e sostituire nell'equazione di r.

Crea confusione scrivere l'equazione di φ nella forma

$$(2) \begin{cases} x_1 = -y_1 - 3y_2 + 2 \\ x_2 = -2y_1 - y_2 + 3 \end{cases}$$

In questo caso, si danno i nomi alle variabili in modo che sia $(x_1, x_2) = \varphi((y_1, y_2))$. Se si sostituisce (2) nell'equazione di r, **non** si ottiene un'equazione di $\varphi(r)$, ma si ottiene l'equazione di una retta s tale che $\varphi(s) = r$!

Esercizio 4.

Le nozioni di dipendenza e indipendenza per spazi vettoriali e per spazi affini sono **differenti** (anche se collegate). Vedi la definizione 2.2.6 delle dispense sui sottospazi affini.

In bocca al lupo!