Soluzioni primo esonero anno passato

• Esercizio 1.

Per ogni $a \in X$ si verificano le seguenti equivalenze:

$a \in \mathring{A}$ se e solo se

esiste un aperto U di X tale che $a \in U$ e $U \subseteq A$, se e solo se

$a \in A$ ed esiste un chiuso C di X tale che $a \notin C$ e $C \supseteq X \setminus A$ (basta prendere U e C complementari uno dell'altro), se e solo se

$a \in A$ e $a \notin \overline{X \setminus A}$ (poiché $\overline{X \setminus A}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono $X \setminus A$), se e solo se

$a \in A \setminus \overline{X \setminus A}$.

Siccome questo è vero per ogni $a \in X$, segue che $\mathring{A} = A \setminus \overline{X \setminus A}$.

(N.B.: non si usa l'ipotesi che A sia non vuoto.)

• Esercizio 2.

Siano X, A ed f come nel testo. Basta dimostrare che $X \setminus A$ è aperto.

Sia $x \in X \setminus A$, e sia $a = f(x)$. $f(x)$ appartiene ad A, perchè A è lo spazio di arrivo di f, quindi per ipotesi $f(a) = a$. Siccome $a \in A$ e $x \in X \setminus A$, $a \neq x$, e siccome X è di Hausdorff, esistono aperti disgiunti U e V tali che $a \in U$ e $x \in V$.

$U \cap A$ è un aperto di A, quindi, siccome f è continua, $f^{-1}(U \cap A)$ è aperto di X. Dico che $W = V \cap f^{-1}(U \cap A)$ è un intorno aperto di x disgiunto da A.

W è aperto perchè intersezione di aperti.

Inoltre, $x \in W$, poiché $x \in V$, e $f(x) = a \in U \cap A$, quindi $x \in f^{-1}(U \cap A)$.

Se $b \in A$, allora $f(b) = b$, e se $b \in W$, allora $b \in V$ e $b \in f^{-1}(U \cap A)$, cioè $f(b) \in U \cap A$ e $b = f(b) \in U$. Quindi, se $b \in A \cap W$, allora $b \in V \cap U$, ma U e V sono disgiunti, quindi anche A e W sono disgiunti.

In conclusione, per ogni $x \in X \setminus A$ abbiamo trovato un suo intorno aperto W disgiunto da A, e questo dimostra che A è chiuso.

Esercizio aggiuntivo: l'ipotesi che X sia di Hausdorff si può indebolire a T_1?

• Esercizio 3.

Innanzitutto, $S \cap T$ è di Hausdorff poiché ogni sottospazio di uno spazio di Hausdorff è ancora di Hausdorff.

Dimostriamo adesso che $S \cap T$ è compatto. Siccome un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso, T è un chiuso di X, quindi $X \setminus T$ è aperto in X.

Sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $S \cap T$, dove gli U_i sono aperti di X. Se ad $(U_i)_{i \in I}$ aggiungiamo $X \setminus T$, otteniamo un ricoprimento aperto di S. Infatti, $X \setminus T \supseteq S \setminus (S \cap T)$, e $S = (S \cap T) \cup (S \setminus (S \cap T))$.

Siccome S è compatto, esiste un sottoricoprimento finito di S, costituito da (eventualmente) $X \setminus T$ e da certi $(U_i)_{i \in F}$, per un F finito, $F \subseteq I$. Siccome $X \setminus T$ e $S \cap T$ sono disgiunti, allora $(U_i)_{i \in F}$ da solo è un ricoprimento di $S \cap T$.

Abbiamo dimostrato che da ogni ricoprimento aperto di $S \cap T$ si può estrarre un sottoricoprimento finito, e questo significa che $S \cap T$ è compatto.

N.B.: Si sa dalla teoria che un sottospazio Y di uno spazio topologico X è compatto (in quanto spazio topologico Y) se e solo se è compatto come sottoinsieme di X, cioè per ogni ricoprimento di Y con aperti di X esiste un sottoricoprimento finito che ricopre Y. Concettualmente, queste sarebbero nozioni distinte, ma le due nozioni sono equivalenti.

NB: Nella risoluzione della seconda parte dell'esercizio, l'ipotesi che X sia di Hausdorff è stata usata solo per dimostrare che T è chiuso. In realtà , abbiamo dimostrato che se T è chiuso ed S è compatto, allora $S \cap T$ è compatto, e quasta affermazione vale per qualunque spazio topologico X.

• Esercizio 4.

a) Ogni elemento di $r \in \mathbb{R}$ sta in almeno un $B \in \mathcal{B}$: per esempio, $r \in [r, +\infty)$. Inoltre, dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, allora $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, e questi fatti implicano che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia.

Questa topologia è più fine della topologia degli intervalli aperti illimitati a destra, perchè ognuno di questi ultimi intervalli si può esprimere come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Infatti, ad esempio, $(r,+\infty)=\bigcup_{n>0}[r+\frac{1}{n},+\infty)$.

(ed è strettamente più fine, perchè, per ogni $a\in\mathbb{R}$, $[a,+\infty)$ non è aperto nella topologia degli intervalli aperti illimitati a destra)

b) Non è compatto, perchè, ad esempio, $\{[-n,+\infty)\mid n\in\mathbb{N}\}$ è un ricoprimento che non ammette sottoricoprimento finito (se lo ammettesse, basterebbe prendere n^* il massimo fra gli n che determinano gli intervalli del sottoricoprimento, e allora $-n^*-1$ non apparterrebbe a nessun insieme del sottoricoprimento, assurdo)

È però connesso. Siano per assurdo A e B aperti disgiunti non vuoti, con unione tutto $\mathbb{R}$. Siccome A e B sono non vuoti, esistono $r\in A$ e $s\in B$. Siccome A è aperto, e $r\in A$, c'è un aperto U della base che contiene r, e tale che U è contenuto in A. Sia $U=[a,+\infty)\subseteq A$, con $a\in\mathbb{R}$. Allo stesso modo, c'è $b\in\mathbb{R}$ con $[b,+\infty)\subseteq B$. Ma, allora, $\sup\{a,b\}\in A\cap B$, contraddicendo l'ipotesi che A e B siano disgiunti, assurdo. (in realtà, addirittura, in $\mathcal{T}$ non esistono due aperti disgiunti non vuoti, quale che sia la loro unione!)

Si poteva anche risolvere l'esercizio verificando che se A e B sono aperti e $A\cup B=\mathbb{R}$, allora $A=\mathbb{R}$ oppure $B=\mathbb{R}$.

• Esercizio 5.

Per ogni $x\in X$, $\{x\}\times Y$ è omeomorfo a Y, quindi è connesso. Allo stesso modo, per ogni $y\in Y$, $X\times\{y\}$ è connesso.

Si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ costituita da tutti i sottoinsiemi di $X\times Y$ del tipo

$$\{x\}\times Y$$

al variare di $x\in X\setminus A$, e del tipo

$$X\times\{y\}$$

al variare di $y\in Y\setminus B$.

L'unione di questi sottoinsiemi coincide col complementare di $A\times B$ in $X\times Y$ (un disegno può aiutare molto!). Per quanto detto sopra, ciascuno di questi sottoinsiemi è connesso.

Si ha che $(\{x\}\times Y)\cap(X\times\{y\})=\{(x,y)\}\neq\emptyset$, per ogni $x\in X$ e $y\in Y$.

Inoltre, dati $x_1,x_2\in X\setminus A$, scegliendo un qualunque $y\in Y\setminus B$ (un tale y esiste poiché, per ipotesi, il complementare di B è non vuoto), si ottiene $(\{x_1\}\times Y)\cap(X\times\{y\})\neq\emptyset$, e $(\{x_2\}\times Y)\cap(X\times\{y\})\neq\emptyset$.

Dati $y_1,y_2\in Y\setminus B$, scegliendo $x\in X\setminus A$ si ha $(X\times\{y_1\})\cap(\{x\}\times Y)\neq\emptyset$ e $(X\times\{y_2\})\cap(\{x\}\times Y)\neq\emptyset$.

La famiglia $\mathcal{F}$ è dunque costituita da insiemi connessi, tali che due qualunque di questi sottoinsiemi possono essere collegati da una catena di insiemi della famiglia tali che l'intersezione di due insiemi consecutivi è non vuota. Infatti, come detto sopra, $\{x\}\times Y$ e $X\times\{y\}$ sono essi stessi non disgiunti. Inoltre, ad esempio, se $x_1,x_2\in X\setminus A$, basta scegliere $y\in Y\setminus B$ per ottenere una catena che collega $\{x_1\}\times Y$ e $\{x_2\}\times Y$, e cioè la catena: $\{x_1\}\times Y$, $X\times\{y\}$, $\{x_2\}\times Y$.

Dunque l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ è connessa, per un teorema dimostrato a lezione.

(N.B.: non si usa l'ipotesi che A e B siano non vuoti, ma si è usato che il loro complemento è non vuoto)