Soluzioni primo esonero topologia 2011-2012

• Esercizio 1.

a) Sia $x \in A \cap \overline{B}$, cioè $x \in A$ e $x \in \overline{B}$.

Sia U un intorno aperto di x. Siccome A è aperto, $V = U \cap A$ è aperto, poiché intersezione di due aperti. Poiché $x \in U$ e $x \in A$, allora $x \in U \cap A$, quindi $V = U \cap A$ è un intorno aperto di x. Siccome $x \in \overline{B}$, allora $V \cap B \neq \emptyset$, cioè $U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap B = V \cap B \neq \emptyset$.

Ho dimostrato che $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, per ogni intorno aperto U di x, e questo significa esattamente che $x \in \overline{A \cap B}$

N.B.: Da $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap B \neq \emptyset$ non si deduce necessariamente che $U \cap A \cap B \neq \emptyset$. Quindi ci vuole un'argomentazione ulteriore! Del resto, senza l'ipotesi che A sia aperto, a) non vale (trovate un controesempio!).

b) Da $A \supseteq A \cap B$ segue che $\overline{A} \supseteq \overline{A \cap B}$ per una proprietà dell'operatore di chiusura dimostrata a lezione. Per questa inclusione non si usa l'ipotesi che B sia denso.

Se B è denso, $\overline{B} = X$, quindi $A = A \cap X = A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ per la parte a). Abbiamo quindi $A \subseteq \overline{A \cap B}$, da cui segue $\overline{A} \subseteq \overline{A \cap B}$.

N.B.: Se (per due insiemi qualsiasi W e Z) dimostrate

$W \subseteq Z$

e

$Z \supseteq W$,

non state dimostrando una "doppia inclusione": state dimostrando due volte la stessa cosa!

c) Supponiamo per assurdo che U e V siano due sottoinsiemi di $A \cup B$ entrambi non vuoti e aperti nella topologia indotta da X su $A \cup B$, e tali che $A \cup B = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Siccome $A \cup B = U \cup V$, allora $A = A \cap (A \cup B) = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V)$. Siccome U e V sono aperti in $A \cup B$, allora $A \cap U$ e $A \cap V$ sono aperti in A. Siccome A è connesso per ipotesi, allora $A \cap U = \emptyset$ oppure $A \cap V = \emptyset$. Allo stesso modo, siccome B è connesso, allora $B \cap U = \emptyset$ oppure $B \cap V = \emptyset$.

A e B sono entrambi non vuoti, perchè, se uno dei due fosse vuoto, allora $A \cap \overline{B}$ sarebbe il vuoto, poiché $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Siccome $U \cup V = A \cup B$, e A e B sono entrambi non vuoti, allora necessariamente $U = A$ e $V = B$, oppure $U = B$ e $V = A$, e A e B sono disgiunti, poiché U e V sono disgiunti. Se $A = U$, allora A è aperto in $A \cup B$, siccome U è aperto in $A \cup B$: allo stesso modo A è aperto se $A = V$, quindi A è aperto in ogni caso. Ma allora, siccome A e B sono disgiunti, B è il complementare di A in $A \cup B$, quindi B è chiuso in $A \cup B$, e, sempre in $A \cup B$, $\emptyset = A \cap B = A \cap \overline{B}$, poiché $B = \overline{B}$. Questo contraddice l'ipotesi che $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ in X, poiché se $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ in X, allora $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ anche in $A \cup B$.

N.B.: L'ipotesi che $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ non si può indebolire ad $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Ad esempio, in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $A = (0,1)$ e $B = (1,2)$ sono entrambi connessi, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$, ma $A \cup B$ è sconnesso.

L'argomento dato nel risolvere l'esercizio non si può estendere al caso quando $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, poiché dall'ipotesi che $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ in X non si ottiene necessariamente $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ in $A \cup B$ (i punti di $\overline{A} \cap \overline{B}$ potrebbero stare tutti fuori da $A \cup B$, come nell'esempio dato).

• Esercizio 2.

a) Per un teorema, una funzione è continua se e solo se la controimmagine di ogni chiuso è un chiuso.

I chiusi di $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ sono esattamente i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ (e tutto $\mathbb{R}$). Siccome, per $n > 0$, l'equazione $x^n = a$ ha al massimo 2 soluzioni in $\mathbb{R}$, la controimmagine secondo f_n di un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ è ancora finito (ha al massimo il doppio degli elementi), quindi è un chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$. Quindi ogni f_n è continua.

b) $f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ non è continua per nessun $n > 0$. Ad esempio, $[1, \infty)$ è un chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$, ma $f_n^{-1}([1, \infty))$ non è mai chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (infatti $f_n^{-1}([1, \infty)) = [1, \infty)$ se n è dispari, e $f_n^{-1}([1, \infty)) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ se n è pari).

$f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbb{R}, \mathcal{C})$ non è continua per nessun n. Ad esempio, $\{0\}$ è un chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$, ma $f_n^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ non è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

c) Sia $P = \{r\}$. Allora $\overline{P} = [r, \infty)$. $[r, \infty)$ non è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$, poiché, ad esempio, $(-\infty, r+1+n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $[r, \infty)$ che non ammette un sottoricoprimento finito. Infatti, un sottoricoprimento finito sarebbe del tipo $\{(-\infty, r+1+n_0), \dots, (-\infty, r+1+n_k)\}$, per un sottoinsieme finito $\{n_0, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$. Ma se prendo $n^* = \max\{n_0, \dots, n_k\}$, allora $r+1+n^*$ non appartiene a nessuno degli insiemi $(-\infty, r+1+n_0)$, ..., $(-\infty, r+1+n_k)$, quindi nessun sottoinsieme finito di $(-\infty, r+1+n)_{n\in\mathbb{N}}$ è mai un ricoprimento.

d) $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ è un aperto nella topologia prodotto, perchè prodotto di due aperti. Quindi $S \cap U = \{(r, r) | r \neq 0\}$ è un aperto di S, quindi il suo complementare $\{(0, 0)\}$ è un chiuso in S. Quindi S contiene un punto che è chiuso (in realtà, in S tutti i punti sono chiusi). Nessun punto è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$, quindi S non è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

Ovviamente, l'esercizio si poteva risolvere in moltissimi altri modi. S in realtà è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^*)$, dove $\mathcal{T}^*$ è una topologia più fine sia di $\mathcal{T}_s$ che di $\mathcal{C}$. Anzi, $\mathcal{T}^*$ è esattamente la topologia meno fine fra le topologie che sono più fini sia di $\mathcal{T}_s$ che di $\mathcal{C}$. Questo è un caso particolare di un fatto più generale. Se su un insieme Y ho due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, considero il prodotto $X = (Y, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$ e il sottoinsieme $S = \{(y, y) | y \in Y\}$, allora S, con la topologia indotta da $X = (Y, \mathcal{T}_1) \times (Y, \mathcal{T}_2)$, è omeomorfo ad $(Y, \mathcal{T})$, dove $\mathcal{T}$ è una topologia più fine sia di $\mathcal{T}_1$ che di $\mathcal{T}_2$, e $\mathcal{T}$ è esattamente la topologia meno fine fra le topologie che sono più fini sia di $\mathcal{T}_1$ che di $\mathcal{T}_2$.

• Esercizio 3.

a) Per un teorema dimostrato a lezione, una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di un insieme X è la base per una topologia se e solo se

(1) per ogni elemento $x \in X$ esiste almeno un $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$.

(2) per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, se $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ e $x \in B_1 \cap B_2$, allora esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Queste due condizioni sono verificate nel caso in questione, dunque $\mathcal{B}$ è la base per una topologia. Infatti, se $r \in \mathbb{R}_{\geq}$, esiste un $n > r$, $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio, basta prendere come n $[r] + 1$, dove $[r]$ indica la parte intera di r).

Inoltre, se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, allora $B_1 \cap B_2 = B_1$ oppure $B_1 \cap B_2 = B_2$, da cui la condizione (2) è necessariamente verificata (basta prendere, come B_3, o B_1 o B_2). Infatti, per la definizione di $\mathcal{B}$, B_1 è del tipo $[0, n_1)$, con $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$ e B_2 è del tipo $[0, n_2)$, con $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq 1$. Ma allora $B_1 \cap B_2 = [0, \min\{n_1, n_2\})$.

N.B.: La topologia $\mathcal{T}$ generata dalla base $\mathcal{B}$ è l'insieme delle unioni di elementi di $\mathcal{B}$. In effetti, per risolvere il resto dell'esercizio, non è necessario determinare esplicitamente $\mathcal{T}$. Se, comunque, si volesse descrivere esplicitamente $\mathcal{T}$, essa consiste esattamente degli insiemi di $\mathcal{B}$, del vuoto, e di tutto $\mathbb{R}_{\geq}$. Infatti, l'unione di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$ è ancora un elemento di $\mathcal{B}$. L'unione di un numero infinito di elementi di $\mathcal{B}$ è sempre tutto $\mathbb{R}_{\geq}$.

N.B.: Naturalmente, l'esercizio si poteva risolvere anche usando la definizione di base come famiglia $\mathcal{B}$ tale che tutte le unioni di sottoinsiemi di $\mathcal{B}$ costituiscono una topologia. Questo metodo, in generale, risulta parecchio più lungo e poco pratico.

Nell'esercizio in questione, bisognava innanzitutto determinare $\mathcal{T}$, l'insieme di tutte le unioni di sottoinsiemi di $\mathcal{B}$, e verificare che $\mathcal{T}$ costituisce effettivamente una topologia. $\mathcal{T}$ è stata descritta sopra, e, per verificare che sia una topologia bisogna verificare che sia chiusa rispetto ad intersezioni finite, e ad unioni arbitrarie.

Naturalmente, però, **è un errore** cominciare a dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base per una certa $\mathcal{T}$, **senza prima precisare** cosa sia esattamente $\mathcal{T}$!

N.B.: La condizione (2) sopra, naturalmente, è automaticamente verificata nel caso in cui l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ sia ancora un elemento di $\mathcal{B}$, cosa che si verifica frequentemente. Ma non sempre: ad esempio, in uno spazio metrico, l'intersezione di due palle non è necessriamente una palla (ma è comunque un aperto, e quindi unione di un numero, generalmente infinito, di palle)

b) Dimostro che l'intersezione di due aperti non vuoti di $\mathcal{T}$ è ancora non vuota.

Infatti, per definizione di base, ogni aperto non vuoto di $\mathcal{T}$ contiene almeno un $B \in \mathcal{B}$. Siccome ogni elemento di $\mathcal{B}$ contiene $\{0\}$ (anzi, contiene tutto $[0, 1)$), o anche osservando (vedi sopra) che l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ sta ancora in $\mathcal{B}$, si ottiene che l'intersezione di due aperti non vuoti di $\mathcal{T}$ è ancora non vuota.

Quindi $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ non è T_2 (la condizione di essere T_2 richiede l'esistenza di due aperti disgiunti non vuoti per ogni coppia di elementi dello spazio. In effetti, $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ non è nemmeno T_1). Siccome ogni spazio metrico è T_2, $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ non è metrizzabile.

Se $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ fosse non connesso, esisterebbero due aperti non vuoti U e V con intersezione vuota, ma abbiamo appena visto che questo non è possibile, quindi $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ è connesso (non c'è nemmeno bisogno di usare che $U \cup V = \mathbb{R}_{\geq}$).

Un altro modo per far veder che $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ è connesso è di far vedere che, se U e V sono aperti, e $U \cup V = \mathbb{R}_{\geq}$, allora $U = \mathbb{R}_{\geq}$ oppure $V = \mathbb{R}_{\geq}$ (non c' è bisogno di nessuna supposizione su $U \cap V$).

$(\mathbb{R}_{\geq}, \mathcal{T})$ non è compatto. $\mathcal{B}$ stesso è un controesempio. Per definizione di base, $\mathcal{B}$ è un ricoprimento aperto. Ma $\mathcal{B}$ non ammette nessun sottoricoprimento finito. Un insieme finito di elementi di $\mathcal{B}$ è del tipo $\{[0, n_1), \dots, [0, n_k)\}$. Se prendo $n = \sup\{n_1, \dots, n_k\}$, allora n non appartiene a nessuno degli $[0, n_i)$. Dunque un sottoinsieme finito di $\mathcal{B}$ non è mai un ricoprimento.

c) Il derivato di S in X è $\{x \in X \mid x \in \overline{S \setminus \{x\}}\}$.

Caso $S = \{\frac{3}{4}\}$.

Se $x \neq \frac{3}{4}$, allora $S \setminus \{\frac{3}{4}\} = \frac{3}{4}$, e $\overline{\{\frac{3}{4}\}} = \mathbb{R}_{\geq}$, quindi x appartiene al derivato di S.

Se $x = \frac{3}{4}$, allora $S \setminus \{\frac{3}{4}\} = \emptyset$, quindi $\frac{3}{4}$ non appartiene al derivato di S.

In conclusione, per $S = \{\frac{3}{4}\}$, il derivato di S è $\mathbb{R}_{\geq} \setminus \{\frac{3}{4}\}$.

Caso $S = \{\frac{7}{4}\}$.

Se $x \neq \frac{7}{4}$, allora $S \setminus \{\frac{7}{4}\} = \frac{7}{4}$, e $\overline{\{\frac{7}{4}\}} = [1, \infty)$, quindi x appartiene al derivato di S se e solo se $x \geq 1$.

Se $x = \frac{7}{4}$, allora $S \setminus \{\frac{7}{4}\} = \emptyset$, quindi $\frac{7}{4}$ non appartiene al derivato di S.

In conclusione, per $S = \{\frac{7}{4}\}$, il derivato di S è $[1, \infty) \setminus \{\frac{7}{4}\}$.